

# Aufgabenblatt Ableitungen

## zur Produkt- und Quotientenregel

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 18 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Leite nach der Produktregel ab und vereinfache so weit wie möglich.

Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst.

- |                                        |                                                              |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| a) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)$  | b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot (4 - 0,8x^2)$ |
| c) $f(t) = (3t^2 + 1) \cdot (1 - t^2)$ | d) $f(x) = (x^3 + x^2) \cdot (1 - x)$                        |
| e) $f(r) = (1 + r^2)^2$                | f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$                               |

**Aufgabe A2**

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen mit Hilfe der Produktregel. Beachte, dass du in manchen Fällen auch die Kettenregel benötigst.

Vereinfache die 1. Ableitung bevor du die 2. Ableitung bildest.

- |                                     |                                                    |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x - 1)$ | b) $f(t) = (4t^2 - 1) \cdot \sqrt{t}$              |
| c) $f(a) = \sqrt{a} \cdot (1 - a)$  | d) $f(z) = (z^2 - 1) \cdot \sqrt{z}$               |
| e) $f(t) = \sin(t) \cdot \cos(t)$   | f) $f_a(t) = a(\sin(at) \cdot \cos(at) \cdot t^2)$ |

**Aufgabe A3**Berechne die Steigung der Funktionen  $f_n$  an der angegebenen Stelle  $x_0$ .

- |                                                            |                                               |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| a) $f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - x^3); x_0 = -1$        | b) $f_2(x) = x \cdot (t^2 - t); x_0 = 2$      |
| c) $f_3(x) = \sin(x) \cdot (x^2 + 1); x_0 = \frac{\pi}{2}$ | d) $f_4(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x); x_0 = 0$ |

**Aufgabe A4**An welcher Stelle verlaufen die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  parallel? Welche Steigung haben die Tangenten an dieser Stelle?

- |                                           |                                              |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{2 + (x - 1)^2}$          | $g(x) = (f(x))^2$                            |
| b) $f(x) = (\sin(2x))^2; 0 \leq x \leq 1$ | $g(x) = \sin(1 - \sqrt{x}); 0 \leq x \leq 1$ |

# Aufgabenblatt Ableitungen

## zur Produkt- und Quotientenregel

## Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 1

### Lösung A1

a)  $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)$      $u = x^2 - 4$      $u' = 2x$      $v = x^3 + 1$      $v' = 3x^2$   
 $f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 1) + 3x^2 \cdot (x^2 - 4) = 2x^4 + 2x + 3x^4 - 12x^2 = x \cdot (5x^3 - 12x + 2)$

b)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot (4 - 0,8x^2)$      $u = \frac{1}{2}x - 1$      $u' = \frac{1}{2}$   
 $v = 4 - \frac{4}{5}x^2$      $v' = -\frac{8}{5}x$   
 $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{4}{5}x^2\right) - \frac{8}{5}x \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x$   
 $= \frac{6x^2 - 8x - 10}{5}$

c)  $f(t) = (3t^2 + 1) \cdot (1 - t^2)$      $u = 3t^2 + 1$      $u' = 6t$   
 $v = 1 - t^2$      $v' = -2t$   
 $f'(t) = 6t \cdot (1 - t^2) - 2t \cdot (3t^2 + 1) = 2t \cdot (3 - 3t^2 - 3t^2 - 1)$   
 $= 4t \cdot (1 - 3t^2)$

d)  $f(x) = (x^3 + x^2) \cdot (1 - x)$      $u = x^3 + x^2$      $u' = 3x^2 + 2x$   
 $v = 1 - x$      $v' = -1$   
 $f'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot (1 - x) - (x^3 + x^2) = 3x^2 - 3x^3 + 2x - 2x^2 - x^3 - x^2$   
 $= -4x^3 + 2x = -2x \cdot (2x^2 - 1)$

e)  $f(r) = (1 + r^2)^2$   
 $f'(r) = 2(1 + r^2) \cdot 2r = 4r \cdot (r^2 + 1)$

f)  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}}$   
 $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x}$

### Lösung A2

a)  $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x - 1)$      $u = \sqrt{x}$      $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 $v = 2x - 1$      $v' = 2$   
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x - 1) + 2\sqrt{x} = \frac{2x-1+4x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$   
 $u = \frac{6x-1}{2}$      $u' = 3$   
 $v = x^{-\frac{1}{2}}$      $v' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$   
 $f''(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{6x-1}{4x\sqrt{x}} = \frac{12x-6x+1}{4x\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{4\sqrt{x}}$

b)  $f(t) = (4t^2 - 1) \cdot \sqrt{t}$      $u = 4t^2 - 1$      $u' = 8t$   
 $v = \sqrt{t}$      $v' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$   
 $f'(t) = 8t \cdot \sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (4t^2 - 1) = 8t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{20t^2 - 1}{2\sqrt{t}}$   
 $u = 20t^2 - 1$      $u' = 40t$   
 $v = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$      $v' = -\frac{1}{4t\sqrt{t}}$   
 $f''(t) = \frac{20t}{\sqrt{t}} - \frac{20t^2 - 1}{4t\sqrt{t}} = \frac{80t^2 - 20t^2 + 1}{4t\sqrt{t}} = \frac{60t^2 + 1}{4t\sqrt{t}}$

# Aufgabenblatt Ableitungen

## zur Produkt- und Quotientenregel

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 1

c)  $f(a) = \sqrt{a} \cdot (1 - a)$

$$u = \sqrt{a} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$v = 1 - a \quad v' = -1$$

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(1 - a) - \sqrt{a} = \frac{1-a-2a}{2\sqrt{a}} = -\frac{3a-1}{2\sqrt{a}}$$

$$u = -(3a - 1) \quad u' = -3$$

$$v = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \quad v' = -\frac{1}{4a\sqrt{a}}$$

$$f''(a) = -\frac{3}{2\sqrt{a}} + \frac{3a-1}{4a\sqrt{a}} = \frac{-6a+3a-1}{4a\sqrt{a}} = -\frac{3a+1}{4a\sqrt{a}}$$

d)  $f(z) = (z^2 - 1) \cdot \sqrt{z}$

$$u = z^2 - 1 \quad u' = 2z$$

$$v = \sqrt{z} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$f'(z) = 2z\sqrt{z} + \frac{z^2-1}{2\sqrt{z}} = \frac{4z^2+z^2-1}{2\sqrt{z}} = \frac{5z^2-1}{2\sqrt{z}}$$

$$u = 5z^2 - 1 \quad u' = 10z$$

$$v = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} \quad v' = -\frac{1}{4z\sqrt{z}}$$

$$f''(z) = \frac{10z}{2\sqrt{z}} - \frac{5z^2-1}{4z\sqrt{z}} = \frac{20z^2-5z^2+1}{4z\sqrt{z}} = \frac{15z^2+1}{4z\sqrt{z}}$$

e)  $f(t) = \sin(t) \cdot \cos(t)$

$$u = \sin(t) \quad u' = \cos(t)$$

$$v = \cos(t) \quad v' = -\sin(t)$$

$$f'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

$$f''(t) = -2 \cos(t) \sin(t) - 2 \sin(t) \cos(t) = -4 \sin(t) \cos(t)$$

f)  $f_a(t) = a(\sin(at) \cdot \cos(at) \cdot t^2) = at^2 \cdot \sin(at) \cdot \cos(at)$   
Wegen des Additionstheorems  $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$  ist  
 $(\sin(at) \cdot \cos(at)) = \sin(2at)$  und damit

$$f_a(t) = at^2 \cdot \sin(2at) \quad u = at^2 \quad u' = 2at$$

$$v = \sin(2at) \quad v' = 2a\cos(2at)$$

$$f_a'(t) = 2at \cdot \sin(2at) + 2a^2t^2 \cdot \cos(2at)$$

$$= 2at \cdot (\sin(2at) + at\cos(2at))$$

$$f_a''(t) = 2at(3a\cos(2at) - 2a^2t \cdot \sin(2at)) + 2a \cdot (\sin(2at) + at \cdot \cos(2at))$$

$$= (2a - 4a^3t^2)\sin(2at) + 8a^2t\cos(2at)$$

### Lösung A3

a)  $f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - x^3)$

$$u = \frac{1}{x} \quad u' = -\frac{1}{x^2}$$

$$v = 1 - x^3 \quad v' = -3x^2$$

$$f_1'(x) = -\frac{(1-x^3)}{x^2} - \frac{3x^2}{x} = \frac{x^3-1-3x^3}{x^2} = -\frac{2x^3+1}{x^2} \quad f_1'(-1) = 1$$

b)  $f_2(x) = x \cdot (t^2 - t)$

$$f_2'(x) = t^2 - t \quad f_2'(2) = t^2 - t$$

c)  $f_3(x) = \sin(x) \cdot (x^2 + 1)$

$$u = \sin(x) \quad u' = \cos(x)$$

$$v = x^2 + 1 \quad v' = 2x$$

$$f_3'(x) = \cos(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot \sin(x) \quad f_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

d)  $f_4(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x)$

$$u = \sin(2x) \quad u' = 2\cos(2x)$$

$$v = \cos(x) \quad v' = -\sin(x)$$

$$f_4'(x) = 2\cos(2x) \cdot \cos(x) - 2\sin(2x) \cdot \sin(x)$$

$$f_4'(0) = 2$$

# Aufgabenblatt Ableitungen

## zur Produkt- und Quotientenregel

Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 1

### Lösung A4

a)  $f(x) = \sqrt{2 + (x - 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)}{2\sqrt{2+(x-1)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{2+(x-1)^2}}$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) \cap g'(x)$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = 2(x-1)$$

$$x_0 = 1$$

$$g'(1) = 0$$

An der Stelle  $x_0 = 1$  verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von  $m = 0$  parallel.

b)  $f(x) = (\sin(2x))^2$

$$f'(x) = 4\sin(2x) \cdot \cos(2x)$$

$$g(x) = \sin(1 - \sqrt{x})$$

$$g'(x) = -\frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) \cap g'(x)$$

$$4\sin(2x) \cdot \cos(2x) = -\frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$4\sin(2x) \cdot \cos(2x) + \frac{\cos(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$x_0 \approx 0,85; f'(0,85) = g'(0,85) \approx -0,54$$

An der Stelle  $x_0 \approx 0,85$  verlaufen die beiden Graphen mit einer Steigung von  $m \approx -0,54$  parallel.