Aufgabenblatt Ableitungen zur Produkt- und Quotientenregel

Level 3 – Expert – Blatt 2

Dokument mit 14 Aufgaben

Aufgabe A1

Bei einer Funktion f gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \neq 0$; ist differenzierbar und $f'(x) = x \cdot f(x)$.

a) Stelle $f''(x)$ und $f'''(x)$ durch $f(x)$ dar.

b) Zeige, dass der Graph von f an der Stelle $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente hat.

c) Begründe, warum es keine Stelle $f''(x) = 0$ geben kann.

Aufgabe A2

Der Graph einer Funktion f berührt die x-Achse im Punkt $P(2|0)$.

a) Zeige, dass dann auch der Graph der Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ die x-Achse im Punkt P berührt.

b) Gibt drei Beispiele für solche Funktionen f und g an. Dabei sollen die folgenden Funktionstypen Berücksichtigung finden: Polynomfunktion, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion.
Überprüfe deine Beispiele mit dem GTR.

Aufgabe A3

Welcher Fehler wurde beim Ableiten der Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot cos(x)$ gemacht?

a) $f'(x) = 3x^2\, cos(x) + x^3 sin(x)$ b) $f'(x) = x^3\, cos(x) - 3x^2 sin(x)$

Aufgabe A4

Eine Firma hat festgestellt, dass sie beim Verkauf von n Stück eines von ihr hergestellten Produktes einen Gewinn pro Stück von $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ Geldeinheiten macht.

a) Zeige, dass der Gewinn pro Stück mit wachsender Stückzahl abnimmt.

b) Zeige, dass der Gesamtgewinn mit wachsender Stückzahl zunimmt.

Aufgabe A5

Eine Ente landet auf einem See und schwimmt in Richtung eines Stegs. Ihre Entfernung vom Steg wird beschrieben durch die Funktion s mit $s(t) = \frac{8t^2+7}{9t^2+2}$; $0 \leq t \leq 17$ (t in Sekunden nach der Landung bis zum Ende des Beobachtungszeitraums, $s(t)$ in m).

a) Wie weit ist die Ente ursprünglich vom Steg entfernt?

b) Angenommen, die Ente schwimmt nach dieser Zeit ungebremst bis zum Steg weiter. Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Ente auf den Steg?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A6

Beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen:

a) Hat der Graph von f die x-Achse als waagrechte Tangente, dann gilt dies auch für $x \neq 0$ für den Graphen g mit $g(x) = \frac{f(x)}{g}$.

b) Wenn die Funktion g monoton fällt, so ist die Funktion $\frac{1}{g}$ monoton steigend.

c) Wenn die Funktion g auf dem Intervall I monoton fallend und differenzierbar ist und keine Nullstellen hat, so ist die Funktion $\frac{1}{g}$ auf I monoton steigend.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f'(x) = x \cdot f(x)$

a) $f''(x)$ mit Produktregel:
$f''(x) = f(x) + x \cdot f'(x) = f(x) + x \cdot x \cdot f(x) = f(x) \cdot (x^2 + 1)$
$f'''(x)$ mit Produktregel aus $f''(x)$:
$f'''(x) = f'(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot f(x) = x \cdot f(x) \cdot (x^2 + 1) + 2x \cdot f(x)$
$= f(x) \cdot (x \cdot (x^2 + 1) + 2x) = f(x) \cdot (x^3 + 3x)$

b) Wenn der Graph von f in $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente besitzen soll, muss gelten: $f'(x) = 0$.
$f'(x) = x \cdot f(x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_0 = 0$ **q.e.d.**

c) Nach Voraussetzung gilt: $f(x) \neq 0$
$f''(x) = f(x) \cdot (x^2 + 1)$
Da aber stets $(x^2 + 1) > 0$ gibt es keine Stelle $f''(x) = 0$.

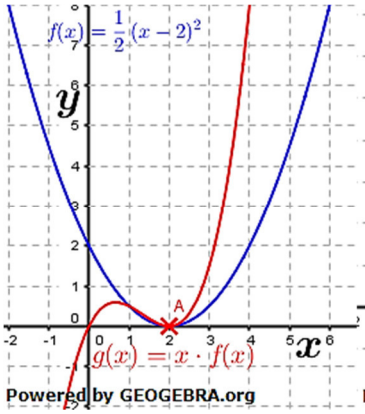
Lösung A2

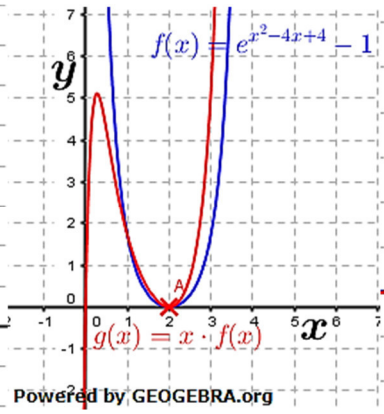
Nach Voraussetzung gilt $f(2) = 0$ (Nullstelle) und $f'(2) = 0$ (Berührpunkt, waagrechte Tangente).

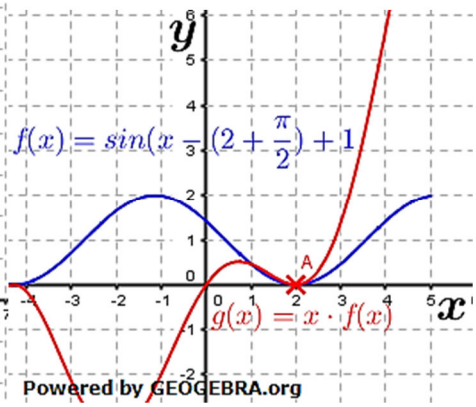
a) $g(2) = 2 \cdot f(2) = 0$
$g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$
$g'(2) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
Somit berührt auch $g(x) = x \cdot f(x)$ die x-Achse im Punkt P.

b) Nachfolgende Funktionen sind nur Beispiele, auch andere Funktionsgleichungen denkbar.

b) Polynomfunktion:
$f(x) = 2 \cdot (x - 2)^2$ $\quad g(x) = 2x \cdot (x - 2)^2$
Exponentialfunktion:
$f(x) = e^{x^2 - 4x + 4} - 1$ $\quad g(x) = x \cdot (e^{x^2 - 4x + 4} - 1)$
Trigonometrische Funktion
$f(x) = sin\left(x - (2 + \frac{\pi}{2})\right) + 1$ $\quad g(x) = x \cdot \left(sin\left(x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1\right)$







Lösung A3

a) $v = \cos(x)$; $v' = -\sin(x)$
Es muss heißen $f'(x) = 3x^2\, cos(x) - x^3 sin(x)$.

b) Mit $u = x^3$ und $v = cos(x)$ wurde fälschlicher Weise gebildet:
$f'(x) = u \cdot v + u' \cdot v'$

Lösung A4

a) $f(n) = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ist der Gewinn für eine Produktionseinheit. Für wachsende n wird $f(n)$ immer kleiner, da $1 + \sqrt{n}$ immer größer wird.
Mathematischer Beweis:
$f'(n) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}{(1+\sqrt{n})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2}$. Die Steigung der Funktion f ist negativ für alle $n \in \mathbb{R}^+$, also streng monoton fallend, d. h., der Gewinn pro Produktionseinheit wird mit steigender Produktionszahl immer geringer.

b) Der Gesamtgewinn wird ausgedrückt durch $g(n) = n \cdot f(n)$.
$g'(n) = f(n) + n \cdot f'(n) = \frac{1}{1+\sqrt{n}} - \frac{n}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2} = \frac{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})-n}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2} = \frac{2\sqrt{n}+n}{2\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt{n})^2}$
Die Steigung der Funktion g ist positiv für alle $n \in \mathbb{R}^+$, also streng monoton steigend, d. h., der Gesamtgewinn steigt mit wachsender Produktionszahl.

Lösung A5

a) Die Entfernung zum Steg ist $s(0) = \frac{7}{2} = 3{,}5\,m$.

b) Da die Geschwindigkeit die Ableitung des Weges nach der Zeit ist, benötigen wir zunächst $s'(t)$.
$s'(t) = v(t) = \frac{16t\cdot(9t^2+2)-18t\cdot(8t^2+7)}{(9t^2+2)^2} = \frac{144t^3+32t-144t^3-126t}{(9t^2+2)^2} = \frac{-94t}{(9t^2+2)^2}$
Es ist nach der Geschwindigkeit nach Ablauf der Beobachtungszeit gefragt, also wird $v(17)$ benötigt.
$|v(17)| = \frac{94\cdot 17}{(9\cdot 17^2+2)^2} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-11} \approx 0\,m/s$
Jetzt müssen wir lediglich noch prüfen, ob die Ente nach 17 Sekunden bereits den Steg erreicht hat, die Entfernung zum Steg ist also:
$d = 3{,}5 - s(17) = 3{,}5 - 0{,}89 \approx 2{,}6\,m$
Da die Ente nach 17 Sekunden noch etwa $2{,}6\,m$ vom Steg entfernt ist, jedoch keine Geschwindigkeit mehr hat, erreicht sie den Steg nie.

Lösung A6

a) Der Graph f berührt die x-Achse bedeutet $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$.
Mit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ erhalten wir $g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} = 0$ als auch mit $g'(x) = \frac{f'(x)-x\cdot f(x)}{x^2}$ $g'(x_0) = \frac{f'(x_0)-x_0\cdot f(x_0)}{x_0^2} = 0$. Die Behauptung stimmt also.

b) Die Behauptung ist falsch. So ist z. B. $f(x) = -x$ streng monoton fallend, der Graph der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{x}$ aber nicht monoton steigend, denn $1 > -1$, aber $g(1) = -1 \ngtr g(-1) = 1$.

c) Die Behauptung ist richtig. Ist g auf I monton fallend, so ist g' auf $I < 0$. Mit $f = \frac{1}{g}$ ist $f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$. Nun hat nach Aufgabenstellung g keine Nullstellen, sodass $g(x)$ in ganz I gebildet werden kann, also hat f' Lösungen in ganz I. Wegen $f' = -\frac{g'}{g^2}$ und $g' < 0$ ist $f' > 0$ in $x \in I$. Somit ist f monoton steigend.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de