Die Summen- bzw. Differenzregel

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel mit 211 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(21 Aufgaben)*	04
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	05
Aufgabenblatt 2 *(27 Aufgaben)*	06
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	08
Aufgabenblatt 3 *(64 Aufgaben)*	09
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	11
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 *(21 Aufgaben)*	13
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	14
Aufgabenblatt 2 *(17 Aufgaben)*	15
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	17
Aufgabenblatt 3 *(18 Aufgaben)*	19
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	21
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(16 Aufgaben)*	22
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	23
Aufgabenblatt 2 *(17 Aufgaben)*	26
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	27
Aufgabenblatt 3 *(9 Aufgaben)*	30
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	31
Level 4 Universität	
Aufgabenblatt 1 *(1 Aufgabe)*	33
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	34

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Die Summenregel

Gegeben sei die Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = ax^5 + cx^3 + dx + e$.
Wie lautet die erste Ableitung $f'(x)$?

Wir dürfen hier die Funktionsgleichung in Unterfunktionsgleichungen aufteilen mit $u(x) = ax^5$; $v(x) = cx^3$; $w(x) = dx$ und $t(x) = e$.

Somit ist $f(x) = u(x) + v(x) + w(x) + t(x)$.
Wir leiten nun alle einzelnen Glieder der Funktionsgleichung nach den bislang gelernten Regeln ab und erhalten dadurch $f'(x)$.

$u(x) = ax^5$ abgeleitet nach der Faktor-/Potenzregel ergibt	$u'(x) = 5ax^4$
$v(x) = cx^3$ abgeleitet nach der Faktor-/Potenzregel ergibt	$v'(x) = 3cx^2$
$w(x) = dx$ abgeleitet nach der Faktor-/Potenzregel ergibt	$w'(x) = d$
$t(x) = e$ abgeleitet nach der Konstantenregel ergibt	$t'(x) = 0$

Die Ableitung der gegebenen Funktion ist damit

$$f'(x) = 5ax^4 + 3cx^2 + d.$$

Die Differenzregel

Da die Differenz nichts anderes ist als die Umkehrung der Addition, gilt die Differenzregel als Umkehrung der Additionsregel.

Gegeben sei die Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = -ax^5 - cx^3 - dx - e$.

$u(x) = -ax^5$ abgeleitet nach der Faktor-/Potenzregel ergibt	$u'(x) = -5ax^4$
$v(x) = -cx^3$ abgeleitet nach der Faktor-/Potenzregel ergibt	$v'(x) = -3cx^2$
$w(x) = -dx$ abgeleitet nach der Faktor-/Potenzregel ergibt	$w'(x) = -d$
$t(x) = -e$ abgeleitet nach der Konstantenregel ergibt	$t'(x) = 0$

Die Ableitung der gegebenen Funktion ist damit $f'(x) = -5ax^4 - 3cx^2 - d$.

Merksatz

Die Summen- bzw. Differenzregel lautet:
Sind zwei (oder mehr) Funktionen u und v (und w) in x_0 differenzierbar, so ist an dieser Stelle auch die Summen- bzw. Differenzfunktion f mit

$$f(x) = \pm u(x) \pm v(x) \pm (w(x) \pm \cdots)$$

differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x) = \pm u'(x) \pm v'(x) \pm (w'(x) \pm \cdots).$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Summen- bzw. Differenzregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 21 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Summen- bzw. Differenzregel.

$f_1(x) = x^2 + x$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = 2x^2 - x + 5$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = -5x^4 + 3x^2$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = 2{,}5t^5 + \frac{1}{t^2}$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Summen- bzw. Differenzregel

$f_1(x) = x^4 + x^8$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = x^{12} + x^{-3}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{1}{x} + x^4$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{1}{x} + x - 5$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{2}{5}t^{-1} + 1$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = \sqrt{t} - t$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Summen- bzw. Differenzregel

$f_1(x) = \frac{2}{x^{-2}} + x^2$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = -\frac{3}{4}x^8 + 2{,}5x^4 - 2x + 4$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{5}{8}x^2 + 0{,}4x - 1{,}6$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} + 2x^{-3} - 5 + x^6$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{20}x^{-3} - \frac{1}{10x^{10}}$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{1}{2t} + 4\sqrt{t} - t + 1$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = \sqrt{20} \cdot t + \frac{1}{20t} + (20t)^2 - 20t$	$f_7'(t) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f_1(x) = x^2 + x;$ $f_1'(x) = 2x + 1$	$f_2(x) = 2x^2 - x + 5;$ $f_2'(x) = 4x - 1$
$f_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1;$ $f_3'(x) = 3x^2 + 2x + 1$	$f_4(x) = -5x^4 + 3x^2;$ $f_4'(x) = -20x^3 + 6x$
$f_5(x) = 2x^2 - 3x^3 + 4x^4;$ $f_5'(x) = 4x - 9x^2 + 16x^3$	$f_6(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2;$ $f_6'(t) = t^3 + t^2 + t$
$f_7(t) = 2{,}5t^5 + \frac{1}{t^2};$ $f_7'(t) = 12{,}5t^4 - \frac{2}{t^3}$	

Lösung A2

$f_1(x) = x^4 + x^8;$ $f_1'(x) = 4x^3 + 8x^7$	$f_2(x) = x^{12} + x^{-3};$ $f_2'(x) = 12x^{11} - 3x^{-4}$
$f_3(x) = \frac{1}{x} + x^4;$ $f_3'(x) = -\frac{1}{x^2 + 4x^3}$	$f_4(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x};$ $f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$
$f_5(x) = \frac{1}{x} + x - 5;$ $f_5'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$	$f_6(t) = \frac{2}{5}t^{-1} + 1;$ $f_6'(t) = -\frac{2}{5}t^{-2}$
$f_7(t) = \sqrt{t} - t;$ $f_7'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 1$	

Lösung A3

$f_1(x) = \frac{2}{x^{-2}} + x^2 = 3x^2;$ $f_1'(x) = 6x$	$f_2(x) = -\frac{3}{4}x^8 + 2{,}5x^4 - 2x + 4;$ $f_2'(x) = -6x^7 + 10x^3 - 2$
$f_3(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{5}{8}x^2 + 0{,}4x - 1{,}6;$ $f_3'(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{4}x + 0{,}4$	$f_4(x) = f_4(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} + 2x^{-3} - 5 + x^6;$ $f_4'(x) = -\frac{3}{x^2} - 6x^{-4} + 6x^5$
$f_5(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{20}x^{-3} - \frac{1}{10x^{10}};$ $f_5'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{20}x^{-4} + \frac{1}{x^{11}}$	$f_6(t) = \frac{1}{2t} + 4\sqrt{t} - t + 1;$ $f_6'(t) = -\frac{1}{2t^2} + \frac{2}{\sqrt{t}} - 1$
$f_7(t) = \sqrt{20} \cdot t + \frac{1}{20t} + (20t)^2 - 20t;$ $f_7'(t) = \sqrt{20} - \frac{1}{20t^2} + 800t - 20$	

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Summen- bzw. Differenzregel

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 27 Aufgaben

Aufgabe A1

Ordne den gegebenen Funktionen f_1 bis f_6 ihre korrekte 1. Ableitung zu.

a) $f_1(x) = x^2 - 2x^3$	(1) $2x - 3x^2$ (2) $2x - 6x^2$ (3) $6x - 2x^2$	b) $f_2(x) = x^4 - x^2$	(1) $4x^3 - 2x$ (2) $2x^3 - 4x$ (3) $3x^2 - x$
c) $f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$	(1) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}x$ (2) $9x^2 - 4x$ (3) $x^2 - x$	d) $f_4(x) = \frac{1}{8}$	(1) 0 (2) x (3) $\frac{1}{8}x$
e) $f_5(x) = \frac{1}{2}x(x^3 + x)$	(1) $\frac{1}{2}(3x^3 + 1)$ (2) $2x^3 + x$ (3) $\frac{3}{2}x(x^2 + \frac{1}{2}x)$	f) $f_6(x) = \frac{1}{2x^2}$	(1) $-4x$ (2) $\frac{1}{x}$ (3) $-\frac{1}{x^3}$

Aufgabe A2

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionen mit Hilfe der Ableitungsformeln.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$

b) $f(x) = 2x^6 - 4x^3 + 8x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{6}x^8 - \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{2}x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{a}x^3 + \dfrac{1}{b}x^2 + \dfrac{1}{c}x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{16}(x^4 - x^2 + 1)$

f) $f(x) = ux^5 - vx^4 + wx^2 - z$

g) $f(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{1}{2}t^2 + t$

h) $f(z) = -0{,}04z^4 + 0{,}001z^2$

Aufgabe A3

Zur Wiederholung:

Die Ableitung einer Konstanten ist 0 (null): $f(x) = c;\ \ f'(x) = 0$

Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten: $f(x) = a \cdot g(x);\ \ f'(x) = a \cdot g'(x)$

Die Potenzregel lautet: $f(x) = x^n;\ \ f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Die Summen- bzw. Differenzregel besagt, dass einzelne Summanden/Subtrahenden einzeln abgeleitet werden: $f(x) = g(x) \pm h(x);\ \ f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Trage jeweils die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen in nachfolgender Tabelle ein und kreuze an, welche der genannten Regeln du für die Ableitung verwendest. Dabei steht: KR (Konstantenregel), FAK (Faktorregel), POT (Potenzregel) und SD (Summen-, Differenzregel).

			KR	FAK	POT	SD
a)	$f_1(x) = x^7$	$f_1{}'(x) =$				
b)	$f_2(x) = \dfrac{5}{9}$	$f_2{}'(x) =$				
c)	$f_3(x) = 4x^2$	$f_3{}'(x) =$				

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

			KR	FAK	POT	SD
d)	$f_4(x) = 3x^4 - 2$	$f_4{}'(x) =$				
e)	$f_5(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$	$f_5{}'(x) =$				
f)	$f_6(x) = -5 + 6x^2$	$f_6{}'(x) =$				
g)	$f_7(x) = \frac{1}{x} + 4$	$f_7{}'(x) =$				

Aufgabe A4

Ordne die nachfolgende Tabelle so, dass die Ableitungsfunktion $f_n{}'$ deren Ableitung $f_n{}''$ und ihre zugehörige Ursprungsfunktion f_n jeweils in einer Zeile stehen.

	f_n'	f_n''	f_n
a)	$f_1{}'(x) = 0$	$f_7{}''(x) = 0$	$f_{13}(x) = 3x^2 - 5$
b)	$f_2{}'(x) = 6x$	$f_8{}''(x) = \frac{1}{4}x$	$f_{14}(x) = x$
c)	$f_3{}'(x) = 1$	$f_9{}''(x) = 6$	$f_{15}(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$
d)	$f_4{}'(x) = \frac{1}{16}(2x^2 + 1)$	$f_{10}{}''(x) = 20ux^3 + 6vx$	$f_{16}(x) = 25$
e)	$f_5{}'(x) = 8x^3 - 4x$	$f_{11}{}''(x) = 24x^2 - 4$	$f_{17}(x) = ux^5 + vx^3 + w$
f)	$f_6{}'(x) = 5ux^4 + 3vx^2$	$f_{12}{}''(x) = 0$	$f_{18}(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f_1(x) = x^2 - 2x^3$	(2) $2x - 6x^2$	b) $f_2(x) = x^4 - x^2$	(1) $4x^3 - 2x$
c) $f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$	(3) $x^2 - x$	d) $f_4(x) = \frac{1}{8}$	(1) 0
e) $f_5(x) = \frac{1}{2}x(x^3 + x)$	(2) $2x^3 + x$	f) $f_6(x) = \frac{1}{2x^2}$	(3) $-\frac{1}{x^3}$

Lösung A2

a)	$f(x) = \frac{1}{3x^2}$	$f'(x) = -\frac{2}{3x^3}$	$f''(x) = \frac{2}{x^4}$
b)	$f(x) = 2x^6 - 4x^3 + 8x$	$f'(x) = 12x^5 - 12x^2 + 8$	$f''(x) = 60x^4 - 24x$
c)	$f(x) = \frac{1}{6}x^8 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x$	$f'(x) = \frac{4}{3}x^7 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}$	$f''(x) = \frac{28}{3}x^6 - 4x^2$
d)	$f(x) = \frac{1}{a}x^3 + \frac{1}{b}x^2 + \frac{1}{c}x$	$f'(x) = \frac{3}{a}x^2 + \frac{2}{b}x + \frac{1}{c}$	$f''(x) = \frac{6}{a}x + \frac{2}{b}$
e)	$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - x^2 + 1)$	$f'(x) = \frac{1}{16}(4x^3 - 2x)$	$f''(x) = \frac{1}{16}(12x^2 - 2)$
f)	$f(x) = ux^5 - vx^4 + wx^2 - z$	$f'(x) = 5ux^4 - 4vx^3 + 2wx$	$f''(x) = 20ux^3 - 12vx^2 + 2w$
g)	$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t$	$f'(x) = t^2 - t + 1$	$f''(x) = 2t - 1$
h)	$f(z) = -0{,}04z^4 + 0{,}001z^2$	$f'(x) = -0{,}16z^3 + 0{,}002z$	$f''(x) = -0{,}48z^2 + 0{,}002$

Lösung A3

			KR	FAK	POT	SD
a)	$f_1(x) = x^7$	$f_1'(x) = 7x^6$			☒	
b)	$f_2(x) = \frac{5}{9}$	$f_2'(x) = 0$	☒			
c)	$f_3(x) = 4x^2$	$f_3'(x) = 8x$		☒	☒	
d)	$f_4(x) = 3x^4 - 2$	$f_4'(x) = 12x^3$	☒	☒	☒	☒
e)	$f_5(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$	$f_5'^{(x)} = x^2 - x$		¤	☒	☒
f)	$f_6(x) = -5 + 6x^2$	$f_6'(x) = 12x$	☒	☒	☒	☒
g)	$f_7(x) = \frac{1}{x} + 4$	$f_7'(x) = -\frac{1}{x^2}$	☒		☒	

Lösung A4

a)	$f_1'(x)/f_7''(x)/f_{16}(x)$	b)	$f_2'(x)/f_9''(x)/f_{13}(x)$	c)	$f_3'(x)/f_{12}''(x)/f_{14}(x)$
d)	$f_4'(x)/f_8''(x)/f_{18}(x)$	e)	$f_5'(x)/f_{11}''(x)/f_{15}(x)$	f)	$f_6'(x)/f_{10}''(x)/f_{17}(x)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Leite nach der Summen- bzw. Differenzregel ab. Manchmal musst du zuvor Klammern auflösen.

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$

d) $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 + 2{,}5x^2 - 8$

e) $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$

f) $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$

g) $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$

h) $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right)$

i) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

j) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

k) $f(x) = 6x + \frac{5}{x}$

l) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$

m) $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x}$

n) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

o) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

p) $f(x) = x + 1$

q) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$

r) $f(x) = 5b;\ \ b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

s) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

t) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

u) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

v) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$

Aufgabe A2

Leite nach der Summen- bzw. Differenzregel ab.

a) $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10}$

c) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

d) $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7$

e) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1$

f) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi$

g) $f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c$

h) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + d$

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x$

j) $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7$

k) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$

l) $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 2$

m) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

n) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

o) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1$

p) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7$

q) $f(x) = 1$

r) $f(x) = 0$

s) $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2$

t) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4$

u) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2}x$

v) $f(x) = \sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + 1$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A3

Leite nach der Summen- bzw. Differenzregel ab. Manchmal musst du zuvor Klammern auflösen.

a) $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1$

b) $f(x) = 3{,}5x^2 - 1{,}5x + 2$

c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 1$

d) $f(x) = 3{,}1x^2 + \frac{7}{2}x - 7$

e) $f(x) = 1{,}5x^3 + 2{,}5x^2 - 1$

f) $f(x) = -2{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - \pi$

g) $f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x$

h) $f(x) = 7{,}2x^2 - 8{,}2x + b$

i) $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$

j) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2$

k) $f_t(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$

l) $f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$

m) $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$

n) $f_t(x) = \frac{1}{2t}(x^2 - t)^2$

o) $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$

p) $f(z) = -1{,}5z^3 + 2{,}5z^2 + z$

q) $A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$

r) $A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 + 1)$

Aufgabe A4

Berechne die Steigung von f an der Stelle $x_0 = -3$ und in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = 3x^2 - 5$

b) $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

c) $f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$

d) $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

e) $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$

f) $s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}$

g) $f'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 + 1)$

h) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 4$

i) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

j) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

k) $f'(x) = 6 - \frac{5}{x^2}$

l) $f'(x) = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x^2}$

m) $f'(x) = 3x^2 - 2 - \frac{1}{x^2}$

n) $f'(x) = 4x + 3$

o) $f'(x) = -2x + 2$

p) $f'(x) = 1$

q) $f'(x) = x - \frac{1}{3}$

r) $f'(x) = 0$

s) $f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}$

t) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 4$

u) $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{4}$

v) $f'(x) = x + 3$

Lösung A2

a) $f'(x) = \frac{8}{5}x - \frac{3}{4}$

b) $f'(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{4}{9}$

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

d) $f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$

e) $f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 4x - 1$

f) $f'(x) = -2x^2 + 3x + 2$

g) $f'(x) = 12x^2 + 2\pi x + b$

h) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$

i) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \alpha$

j) $f'(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$

k) $f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$

l) $f'(x) = 10x^4 + 9x^2 - 4x$

m) $f'(x) = 2x^3 + x - 1$

n) $f'(x) = -x^3 + x^2 - x$

o) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x$

p) $f'(x) = 3x^3 + \frac{10}{7}x$

q) $f'(x) = 0$

r) $f'(x) = 0$

s) $f'(x) = 12x^5 - 16x^3 + 4x$

t) $f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

u) $f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + 3x + \sqrt{2}$

v) $f'(x) = 3\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x$

Lösung A3

a) $f'(x) = \frac{4}{\pi}x^2 + \frac{2}{3}x$

b) $f'(x) = 7x - 1{,}5$

c) $f'(x) = x - 2{,}5$

d) $f'(x) = 6{,}2x + \frac{7}{2}$

e) $f'(x) = 4{,}5x^2 + 5x$

f) $f'(x) = -7{,}5x^2 + 3x$

g) $f'(x) = 3t \cdot x^2 + 4x - 4$

h) $f'(x) = 14{,}4x - 8{,}2$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

i) $f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$

j) $f'(x) = \frac{1}{2}(4x^3 - 8x)$

k) $f_t{}'(x) = 2x^3 - 6tx^2$

l) $f_k{}'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k + 1$

m) $f_a{}'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$

n) $f_t{}'(x) = \frac{1}{2t}(4x^3 - 4tx)$

o) $f'(t) = 15t^2 - 2$

p) $f'(z) = -4{,}5z^2 + 5z$

q) $A'(u) = u + 5$

r) $A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}$

Lösung A4

a) $f'(x) = 6x$ $\qquad f'(-3) = 6 \cdot (-3) = -18$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$2x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 2{,}5 \qquad | \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2{,}5}$

$f'\left(+\sqrt{2{,}5}\right) = 6 \cdot \sqrt{2{,}5}$

$f'\left(-\sqrt{2{,}5}\right) = -6 \cdot \sqrt{2{,}5}$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -5;\ S_y(0|-5)$

$f'(0) = 0$

b) $f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2}$ $\qquad f'(-3) = 4 + \frac{1}{9} = \frac{37}{9}$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$4x - \frac{1}{x} = 0$

$4x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{4} \qquad | \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 8$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 8$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)$ kann nicht gebildet werden wegen $\frac{1}{x^2}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Summen- bzw. Differenzregel.

$f_1(x) = x^{-1}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{1}{x}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{2}{3x} + 2$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1}$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = x^{\frac{1}{3}}$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = x^{\frac{1}{4}}$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen mit Hilfe der Summen- bzw. Differenzregel.

$f_1(x) = \sqrt{x} - x$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \sqrt{x^3} + 5$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = \frac{1}{x+1} - 2x$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3}$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = (t-1) \cdot (t-k)^2$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Bilde die Ableitungen mithilfe der Summen- bzw. Differenzregel.

$f_1(x) = x^{3-t} + tx^2;\ \ t \in \mathbb{R}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{a}x^3$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - x$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{1}{x^{-0,5}} - \frac{2}{x^{-1}}$	$f_5'(x) =$
$f_6(z) = \frac{a^2}{\sqrt{2z}} + \frac{b^2}{\sqrt[3]{2z^2}}$	$f_6'(t) =$
$f_7(tx) = f(x) = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3}$	$f_7'(t) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f_1(x) = x^{-1}$	$f_1'(x) = -x^{-2}$
$f_2(x) = \frac{1}{x}$	$f_2'^{(x)} = -\frac{1}{x^2}$
$f_3(x) = \frac{2}{3x} + 2$	$f_3'(x) = -\frac{2}{3x^2}$
$f_4(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2$	$f_4'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2}$
$f_5(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1}$	$f_5'(x) = x^{-3}$
$f_6(t) = t^{\frac{1}{3}}$	$f_6'(t) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$
$f_7(t) = t^{\frac{1}{4}}$	$f_7'(t) = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}$

Lösung A2

$f_1(x) = \sqrt{x} - x = x^{\frac{1}{2}} - x$	$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$
$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 = x^{-\frac{1}{2}} - x^2$	$f_2'^{(x)} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x$
$f_3(x) = \sqrt{x^3} + 5 = x^{\frac{3}{2}} + 5$	$f_3'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
$f_4(x) = \frac{1}{x+1} - 2x = (x+1)^{-1} - 2x$	$f_4'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - 2$
$f_5(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{4}}$	$f_5'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
$f_6(t) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$	$f_6'(t) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2t$
$f_7(t) = (t-1)\cdot(t-k)^2$	$f_7'(t) = 3t^2 - 4tk + k^2 - 2t + 2k$

Lösung A3

$f_1(x) = x^{3-t} + tx^2;\ \ t \in \mathbb{R}$	$f_1'(x) = (3-t)x^{2-t} + 2tx$
$f_2(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{a}x^3$	$f_2'^{(x)} = \frac{a}{2}x + \frac{3}{a}x^2$
$f_3(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - x$	$f_3'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - 1$
$f_4(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2}$	$f_4'(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$
$f_5(x) = \frac{1}{x^{-0,5}} - \frac{2}{x^{-1}} = \sqrt{x} - 2x$	$f_5'(x) = \frac{1}{2^{0,5}} - 2$
$f_6(z) = \frac{a^2}{\sqrt{2z}} + \frac{b^2}{\sqrt[3]{2z^2}}$	$f_6'(t) = -\frac{a^2}{2\cdot\sqrt{2z^3}} - \frac{2b^2}{3\cdot\sqrt[3]{2z}}$
$f_7(tx) = f(x) = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3}$	$f_7'(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{(x-2)^4}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Wende die Summen-/Differenzregel an, um die Ableitungen zu berechnen. Berücksichtige, dass du eventuell zuerst Klammern auflösen musst. Vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich, falls möglich.

$f_1(x) = x^4 + x^{-2}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (3x+5)^3$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = x^2(1+\sqrt{x})$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{\pi}{4}(x^2 - 4x + 1)$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = \frac{x^3 + 8x}{8}$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = \frac{1}{10}x^5 - 4x^3 + 2x$	$f_7'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den Funktionsgleichungen die Bezeichnungen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ zu, indem du die Summen–/Differenzregel anwendest.

a)	b)	c)
$= \frac{3}{2\sqrt{x}} + x$	$= 56 \cdot x^{-9} + 90x^{-7}$	$= \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$
$= \frac{9}{8x^2\sqrt{x}}$	$= -504 \cdot x^{-10} - 630x^{-8}$	$= \frac{21}{64x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}} + \frac{10}{27x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{8x^2 \cdot \sqrt{x}}$
$= 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2$	$= -7 \cdot x^{-8} - 15x^{-6}$	$= -\frac{3}{16 \cdot x \cdot \sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{9 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4x \cdot \sqrt{x}}$
$= -\frac{3}{4\sqrt{x^3}} + 1$	$= x^{-7} + 3x^{-5}$	$= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Aufgabe A3

Bringe die Funktionsgleichung zuerst auf die Form $f(x) = g(x) \pm h(x) \ldots \pm k(x)$, leite sie dann nach der Summen-/Differenzregel ab und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

Funktionsgleichung	Expandierte Funktionsgleichung / Ableitung
$f_1(x) = (x-1)(x+2)(x-5)$	$f_1(x) =$
	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = x^2(2x-1)(x+4)$	$f_2(x) =$
	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$	$f_3(x) =$
	$f_3'(x) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Summen- bzw. Differenzregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Funktionsgleichung	Expandierte Funktionsgleichung / Ableitung
$f_4(x) = (2x-1)^3$	$f_4(x) =$
	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = x \cdot \left(1-\sqrt{x}\right)^2$	$f_5(x) =$
	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = (x+x^2) \cdot (3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})$	$f_6(x) =$
	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (2+x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}})$	$f_7(x) =$
	$f_7'(x) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f_1(x) = x^4 + x^{-2}$	$f_1'(x) = 4x^3 - 2x^{-1}$
$f_2(x) = x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$	$f_2'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$
$f_3(x) = (3x+5)^3$	$f_3'(x) = 81x^2 + 270x + 225$
$f_4(x) = x^2(1+\sqrt{x})$	$f_4'(x) = 2x + \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x}$
$f_5(x) = \frac{\pi}{4}(x^2 - 4x + 1)$	$f_5'(x) = \frac{\pi}{2}x - 4\pi$
$f_6(x) = \frac{x^3 + 8x}{8}$	$f_6'(x) = \frac{3}{8}x^2 + 1$
$f_7(x) = \frac{1}{10}x^5 - 4x^3 + 2x$	$f_7'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 12x^2 + 2$

Lösung A2

a)	b)	c)
$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x$	$f''(x) = 56 \cdot x^{-9} + 90x^{-7}$	$f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$
$f'''(x) = \frac{9}{8x^2\sqrt{x}}$	$f'''(x) = -504 \cdot x^{-10} - 630x^{-8}$	$f'''(x) = \frac{21}{64x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}} + \frac{10}{27x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{8x^2 \cdot \sqrt{x}}$
$f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2$	$f'(x) = -7 \cdot x^{-8} - 15x^{-6}$	$f''(x) = -\frac{3}{16 \cdot x \cdot \sqrt[4]{x^3}} - \frac{2}{9 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4x \cdot \sqrt{x}}$
$f''(x) = -\frac{3}{4\sqrt{x^3}} + 1$	$f(x) = x^{-7} + 3x^{-5}$	$f'(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Lösung A3

Funktionsgleichung	Expandierte Funktionsgleichung / Ableitung
$f_1(x) = (x-1)(x+2)(x-5)$	$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 10$
	$f_1'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
$f_2(x) = x^2(2x-1)(x+4)$	$f_2(x) = 2x^4 + 7x^3 - 4x^2$
	$f_2'(x) = 8x^3 + 21x^2 - 8x$
$f_3(x) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$	$f_3(x) = x - 1$
	$f_3'(x) = 1$
$f_4(x) = (2x-1)^3$	$f_4(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
	$f_4'(x) = 24x^2 - 24x + 6$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Funktionsgleichung	Expandierte Funktionsgleichung / Ableitung
$f_5(x) = x \cdot \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$	$f_5(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$
	$f_5'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$
$f_6(x) = (x + x^2) \cdot (3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})$	$f_6(x) = 3x^2 + 3x - \frac{1}{x^2} + 1$
	$f_6'(x) = 6x + 3 + \frac{2}{x^3}$
$f_7(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (2 + x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})$	$f_7(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + 1 - x^2$
	$f_7'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2x$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Summen- bzw. Differenzregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Dokument mit 18 Aufgaben

Aufgabe A1

Wende die Summen-/Differenzregel an, um die Ableitungen zu berechnen. Berücksichtige, dass du eventuell zuerst Klammern auflösen musst. Vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich, falls möglich.

$f_1(x) = x^3 + x^{-3}$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = x^3 + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3}$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (2x-4)^3$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = x^3(1-\sqrt{x})$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \frac{\pi}{2}(x^4 - 4x^2 + 5)$	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = \frac{x - 8x^2}{8}$	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x$	$f_7'(x) =$

Aufgabe A2

Ordne den Funktionsgleichungen die Bezeichnungen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ zu, indem du die Summen–/Differenzregel anwendest.

a)	b)	c)	d)
$= 6x - \frac{1}{x^2}$	$= -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$	$= (x+2)^2 + (x-4)^2$	$= 4x^{\frac{1}{4}} + 2x$
$= -\frac{6}{x^4}$	$= \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{18}{x^4}$	$= 0$	$= \frac{21}{16}x^{-\frac{11}{4}}$
$= 3x^2 + \frac{1}{x}$	$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^2}$	$= 4$	$= x^{-\frac{3}{4}} + 2$
$= 6 + \frac{2}{x^3}$	$= \sqrt[3]{x} - \frac{3}{x}$	$= 4x - 4$	$= -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

Aufgabe A3

Bringe die Funktionsgleichung zuerst auf die Form $f(x) = g(x) \pm h(x) \ldots \pm k(x)$, leite sie dann nach der Summen-/Differenzregel ab und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

Funktionsgleichung	Expandierte Funktionsgleichung / Ableitung
$f_1(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$	$f_1(x) =$
	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = x^2(1-2x)(4-x)$	$f_2(x) =$
	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2$	$f_3(x) =$
	$f_3'(x) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen zur Summen- bzw. Differenzregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Funktionsgleichung	Expandierte Funktionsgleichung / Ableitung
$f_4(x) = (2 - x^2)^3$	$f_4(x) =$
	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - x)^2$	$f_5(x) =$
	$f_5'(x) =$
$f_6(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot (3 + x^2 - x^3)$	$f_6(x) =$
	$f_6'(x) =$
$f_7(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$	$f_7(x) =$
	$f_7'(x) =$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f_1(x) = x^3 + x^{-3}$	$f_1'(x) = 3x^2 - 3x^{-4}$
$f_2(x) = x^3 + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3}$	$f_2'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{x^4}$
$f_3(x) = (2x-4)^3$	$f_3'(x) = 24x^2 - 96x + 96 = 24(x^2 - 4x + 4)$
$f_4(x) = x^3(1-\sqrt{x})$	$f_4'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2\left(3 - 3{,}5\sqrt{x}\right)$
$f_5(x) = \frac{\pi}{2}(x^4 - 4x^2 + 5)$	$f_5'(x) = \frac{\pi}{2}(4x^3 - 8x) = 2\pi(x^3 - 2x)$
$f_6(x) = \frac{x - 8x^2}{8}$	$f_6'(x) = \frac{1}{8} - 2x$
$f_7(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x$	$f_7'(x) = 2x^4 - 2x^2 + 2$

Lösung A2

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} \longrightarrow f'(x) = 6x - \frac{1}{x^2} \longrightarrow f''(x) = 6 + \frac{2}{x^3} \longrightarrow f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{3}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{x^2} \longrightarrow f''(x) = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3} \longrightarrow f'''(x) = \frac{10}{27x^2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{18}{x^4}$

c) $f(x) = (x+2)^2 + (x-4)^2 \longrightarrow f'^{(x)} = 4x - 4 \longrightarrow f''(x) = 4 \longrightarrow f'''(x) = 0$

d) $f(x) = 4x^{\frac{1}{4}} + 2x \longrightarrow f'(x) = x^{-\frac{3}{4}} + 2 \longrightarrow f''(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} \longrightarrow f'''(x) = \frac{21}{16}x^{-\frac{11}{4}}$

Lösung A3

$f_1(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = (x^2-4)(x^2-1) = x^4 - 5x^2 + 4$
$f_1'(x) = 4x^3 - 10x$

$f_2(x) = x^2(1-2x)(4-x) = x^2(4 - 9x + 2x^2) = 2x^4 - 9x^3 + 4$
$f_2'(x) = 8x^3 - 27x^2$

$f_3(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$f_3'(x) = 2x - 2$

$f_4(x) = (2 - x^2)^3 = 6 - 12x^2 + 6x^4 - x^6$
$f_4'(x) = -6x^5 + 24x^3 - 24x = -6x(x^4 - 3x^2 + 3)$

$f_5(x) = \sqrt{x} \cdot (1-x)^2 = \sqrt{x} - 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \sqrt{x}$
$f_5'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} + \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x}$

$f_6(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot (3 + x^2 - x^3) = \frac{3}{x} + x - x^2 + \frac{3}{x^2} + 1 - x = \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} - x^2 + 1$
$f_6'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^2} - 2x$

$f_7(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{4}{2}}$
$f_7'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{4}{2}x^{-3}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionen.

a) $s(t) = -\frac{6}{5}t^3 + \frac{3}{2}t + \frac{2}{5}$ b) $f(x) = x^2(x - \frac{2}{3}x^3)$ c) $f_t(x) = x^{3-t} + tx^2;\ t \in \mathbb{R}$

d) $f_a(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{a}x^3$ e) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ f) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$ h) $f(x) = \frac{1}{x^{-0,5}}$ i) $f_a(z) = \frac{a^2}{\sqrt{2z}}$

Aufgabe A2

Berechne die Steigung des Graphen K_f der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ und im Schnittpunkt von K_f mit der y–Achse.

a) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+3}} + x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3}$

c) $f(x) = 3(x-5)^2 + 4$ d) $f(x) = \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2} + 1{,}84$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{16}{x^2} + x;\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bestimme die Punkte des Graphen K von f, in denen die Tangenten an K parallel zur Geraden $y = 2x$ sind.

Aufgabe A4

Gibt es für die Funktionen f mit $f(x) = x^2 + 3$; g mit $g(x) = x^3$ und h mit $h(x) = 2x + 6$ jeweils eine Stelle mit gleicher Ableitung?

Aufgabe A5

Ein Körper fällt ohne Luftreibung so, dass er in der Zeit t (in s) den Weg $s(t) = 5t^2$ ($s(t)$ in m) zurücklegt. Nach welcher Zeit hat der Körper die Geschwindigkeit $10\,m/s$?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $s(t) = -\frac{6}{5}t^3 + \frac{3}{2}t + \frac{2}{5}$ $\quad s'(t) = -\frac{18}{5}t^2 + \frac{3}{2}$ $\quad s''(t) = -\frac{36}{5}t$

b) $f(x) = x^2\left(x - \frac{2}{3}x^3\right) = x^3 - \frac{2}{3}x^5$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{10}{3}x^4$ $\quad f''(x) = 6x - \frac{40}{3}x^3$

c) $f_t(x) = x^{3-t} + tx^2$ $\quad f_t'(x) = (3-t)x^{2-t} + 2tx$ $\quad f_t''(x) = (6 - 5t + t^2)x^{1-t} + 2t$

d) $f_a(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{a}x^3$ $\quad f_a'(x) = \frac{a}{2}x + \frac{3}{a}x^2$ $\quad f_a''(x) = \frac{a}{2} + \frac{6}{a}x$

e) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$ $\quad f''(x) = \frac{4}{9x^{\frac{7}{3}}}$

f) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ $\quad f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $\quad f''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ $\quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{3}{16}x^{-\frac{5}{4}}$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ $\quad = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{16x\sqrt[4]{x}}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^{-0,5}} = x^{0,5}$ $\quad f'(x) = 0{,}5x^{-0,5}$ $\quad f''(x) = -0{,}25x^{-1,5}$

$= \frac{0{,}5}{x^{0,5}}$ $\quad = -\frac{0{,}25}{x^{1,5}} = -\frac{5}{2x^{1,5}}$

i) $f_a(z) = \frac{a^2}{\sqrt{2z}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}z^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f_a'(z) = -\frac{a^2}{2\sqrt{2}}z^{-\frac{3}{2}}$ $\quad f_a''(z) = \frac{3a^2}{4\sqrt{2}}z^{-\frac{5}{2}}$

$= -\frac{a^2}{2z\sqrt{2z}}$ $\quad = \frac{3a^2}{4z^2\sqrt{2z}}$

Lösung A2

a) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+3}} + x + 3$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\cdot(x+3)\sqrt{x+3}} + 1$

$f'(1) = \frac{2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{4}} + 1 = \frac{9}{8}$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$-\frac{1}{\sqrt{x+3}} + x + 3 = 0 \quad | \quad +\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

$x + 3 = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \quad | \quad ^2$

$(x+3)^2 = \frac{1}{x+3} \quad | \quad \cdot(x+3)$

$(x+3)^3 = 1 \implies x_0 = -2$

$f'(-2) = \frac{2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}} + 1 = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{(x-2)^4}$

$f'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} = \frac{13}{4}$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$\frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3} = 0 \quad | \quad \cdot(x-2)^3$

$\frac{1}{4}(x-2)^4 - 1 = 0 \quad | \quad +1;\ \cdot 4$

$(x-2)^4 = 4$

$x_1 =; \quad x_2 = -\sqrt{2} + 2$

$f'(\sqrt{2}+2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1; \quad f'(-\sqrt{2}+2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) $f(x) = 3(x-5)^2 + 4 = 3x^2 - 30x + 79 \qquad f'(x) = 6x - 30$

$f'(1) = 6 - 30 = -24$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$3x^2 - 30x + 79 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - 10x + \frac{79}{3} = 0$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{79}{3}} = 5 \pm \sqrt{-\frac{4}{3}} \qquad |$ p/q-Formel

Wegen negative Diskriminante hat f keine Nullstellen.

d) $f(x) = \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2} + 1{,}84 \qquad f'(x) = -\frac{1}{(x+5)^2} + \frac{2}{(x+5)^3}$

$f'(1) = -\frac{1}{36} + \frac{1}{108} = -\frac{1}{54}$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$\frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2} + 1{,}84 = 0 \qquad | \quad \cdot (x+5)^2$

$x + 5 - 1 + 1{,}84(x+5)^2 = 0$

$1{,}84x^2 + 19{,}4x + 50 = 0 \qquad | \quad :1{,}84$

$x^2 + 10{,}54x + 27{,}17 = 0$

$x_{1,2} = -5{,}27 \pm \sqrt{27{,}77 - 27{,}17} = -5{,}27 \pm \sqrt{0{,}6}$

$x_1 = -4{,}5; \quad x_2 = -6$

$f'(-4{,}5) = -\frac{1}{0{,}25} + \frac{2}{0{,}125} = -\frac{1}{0{,}125} = -8$

$f'(-6) = -1 - 2 = -3$

Lösung A3

Lösungslogik

Wegen der gegebenen Geraden $y = 2x$ sind die Punkte der Funktion gesucht, die die Steigung $m = 2$ haben, also $f'(x) = 2$.

Klausuraufschrieb:

$f(x) = -\frac{16}{x^2} + x = -16 \cdot x^{-2} + x \qquad f'(x) = \frac{32}{x^3} + 1$

$f'(x) = 2 = \frac{32}{x^3} + 1$

$x^3 = 32 \implies x_0 = 5$

$f(5) = -\frac{16}{25} + 5 = \frac{109}{25}$

Im Punkt $P\left(5 \middle| \frac{109}{25}\right)$ *hat* f *die Steigung* $m = 2$.

Lösung A4

Lösungslogik

Gesucht werden die x-Koordinaten, in denen f, g und h dieselbe Steigung haben. Die Berechnung erfolgt über Gleichsetzungen der 1. Ableitungen.

Klausuraufschrieb:

$f(x) = x^2 + 3 \qquad f'(x) = 2x$

$g(x) = x^3 \qquad g'(x) = 3x^2$

$h(x) = 2x + 6 \qquad h'(x) = 2$

Wegen $h'(x) = 2$ als Konstante, sind die x-Stellen von f und g mit der Steigung $m = 2$ gesucht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$f'(x) = 2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$g'(x) = 2 = 3x^2 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}};\;\; x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

f hat in $x = 1$, g in $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ dieselbe Steigung wie h.

Lösung A5

Lösungslogik

Die Ableitung des Weges nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit, also ist $v = s'(t)$.

Klausuraufschrieb:

$s(t) = 5t^2$ $\qquad\qquad$ $s'(t) = 10t$

$s'(t) = 10 = 10t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Der Körper hat nach 1 Sekunde die Geschwindigkeit $10\,m/s$.

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f. Bestimme die Steigung von f im Punkt A.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2;\ A(1|f(1))$

b) $f(x) = 2e^{0,5x+1} - 3;\ A(1|f(1))$ Hinweis: $g(x) = e^{0,5x+1}$
$g'(x) = 0,5e^{0,5x+1}$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2;\ A(-2|f(-2))$

d) $f(x) = 4cos(0,25x) + 1;\ A(4|f(4))$ Hinweis: $g(x) = cos(0,25x)$
$g'(x) = -0,25sin(0,25x)$

Aufgabe A2

In welchem Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden g mit $y = 10 + x$?

a) f mit $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ b) f mit $f(x) = -\frac{1}{x}$ c) f mit $f(x) = -0,01x^3$

d) f mit $f(x) = x^2 + a$ e) f mit $f(x) = bx^2$ f) f mit $f(x) = bx^2 + c$

Aufgabe A3

Gegeben sind die beiden Funktion f und g mit $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = x^3 + 1$.

a) An welchen Stellen sind die Funktionswerte der beiden gegebenen Funktionen gleich groß?

b) Prüfe, ob es eine gemeinsame Stelle x_0 gibt, in der f und g die gleiche Steigung haben.

c) An welchen unterschiedlichen Stellen x_f bzw. x_g sind die Ableitungen der beiden gegebenen Funktionen gleich groß?

Aufgabe A4

Mit Hilfe der Fotosynthese wandeln Blätter Kohlenstoffdioxid in Sauerstoff um, der dann an seine Umegbung abgegeben wird.

Die abgegebene Sauerstoffmenge hängt u. a. von der Tageszeit t ab. Die Funktion

$$V(t) = -1,1t^3 + 20t^2 + 10t$$

($V(t)$ in l; t in h) gibt den Messzeitraum von 12 Stunden während eines Tages näherungsweise an, wie viel Sauerstoff von den Blättern eines Baumes insgesamt bis zum Zeitpunkt t an seine Umgebung abgegeben worden ist.

a) Zeichne den Graphen von V in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Wie viel Sauerstoff hat der Baum während der Messzeit an seine Umgebung insgesamt abgegeben?

c) Welche Bedeutung hat $V'(t)$? Bestimme $V'(3)$ und $V'(10)$.

d) Bestimme näherungsweise, zu welcher Zeit der Baum am meisten Sauerstoff an seine Umgebung abgibt. Wie lässt sich das Ergebnis begründen?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ $\qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

$f'(1) = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$

b) $f(x) = 2e^{0,5x+1} - 3$ $\qquad f'(x) = e^{0,5x+1}$

$f'(1) = e^{1,5}$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ $\qquad f'(x) = x^3 - 3x$

$f'(-2) = -8 + 6 = -2$

d) $f(x) = 4cos(0,25x) + 1$ $\qquad f'(x) = -sin(0,25x)$

$f'(4) = -sin(1)$

Lösung A2

a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x_0 = 1$ $\qquad f(1) = 2$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0(1|1)$ ist parallel zur Geraden.

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 1 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1$ $\qquad f(1) = 1;\ f(-1) = 1$

Die Tangenten an den Graphen von f in den Punkten $P_1(1|1)$ und $P_2(-1|1)$ sind parallel zur Geraden.

c) $f(x) = -0,01x^3$ $\qquad f'(x) = -0,03x^2$

$f'(x) = 1 = -0,03x^2 \Rightarrow x^2 = -\frac{100}{3}$ keine Lösung

Der Graph von f besitzt keinen Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ in dem eine Parallele zur Geraden gelegt werden kann.

d) $f(x) = x^2 + a$ $\qquad f'(x) = 2x$

$f'(x) = 1 = 2x \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + a$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4} + a\right)$ ist parallel zur Geraden.

e) $f(x) = bx^2$ $\qquad f'(x) = 2bx$

$f'(x) = 1 = 2bx \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2b}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2b}\right) = \frac{b}{4c^2} = \frac{1}{4b}$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2b}\middle|\frac{1}{4b}\right)$ ist parallel zur Geraden.

d) $f(x) = bx^2 + c$ $\qquad f'(x) = 2bx$

$f'(x) = 1 = 2bx \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2b}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{4b} + c$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2b}\middle|\frac{1}{4b} + c\right)$ ist parallel zur Geraden.

Lösung A3

a) $f(x) \cap g(x)$

$-x^2 - 2x + 1 = x^3 + 1$

$x^3 + x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 + x + 1) = 0$

$x_0 = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$ hat keine Lösung.

$f(0) = 1 \Rightarrow f$ und g haben für $x_0 = 0$ denselben Funktionswert 1.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $f'(x) \cap g'(x)$

$-2x - 2 = 3x^2$

$3x^2 + 2x + 2 = 0 \qquad | \quad :3$

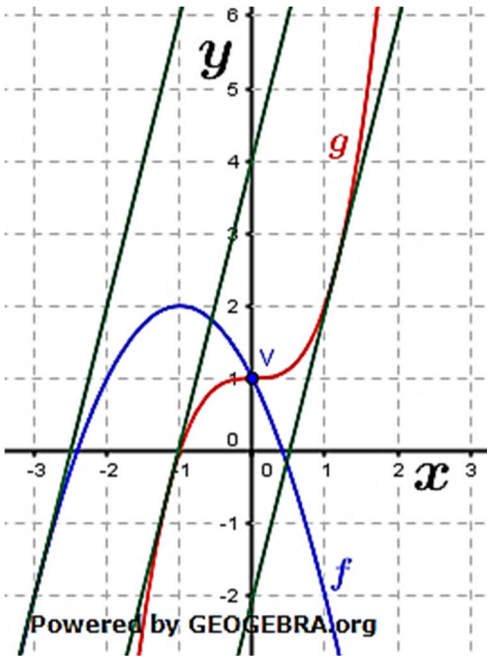
$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{6}{9}} \qquad | \quad p/q$-Formel

Die Diskriminante ist negativ, somit keine Lösung.

Es existiert keine gemeinsame Stelle x_0, in der die Ableitung der beiden gegebenen Funktionen gleich sind.

c) Zur Verdeutlichung der Situation betrachten wir uns nebenstehende Grafik.



g ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die streng monoton steigend ist, also nur positive Steigungen aufweist. f hingegen ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-1|2)$. Diese Parabel hat positive Steigungen nur im Bereich von $x_f \leq -1$.

Somit kommen unterschiedliche Stellen von x_f und x_g nur für $x_f \leq -1$ vor. Wegen der Punktsymmetrie von g gehören dann aber zu jeder Stelle $x_f \leq -1$ zwei Stellen x_g.

<u>Berechnung:</u>

Es soll ja gelten $g'(x_g) = f'(x_f)$.

$-2x_f - 2 = 3x_g^2$

Diese Gleichung lösen wir nach x_f auf.

$x_g^2 = -\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}$

$x_{g_{1,2}} = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}}$

Diese Gleichung hat nur Lösungen für $-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3} \geq 0$, was bedeutet, dass $x_f \leq -1$ sein muss. (Für $x_f = -1$ ist die Wurzel gleich Null, was bedeutet, dass es für $= -1$ nur eine Stelle $x_g = 0$ gibt mit gleicher Steigung von f und g).

Die Stellen x_g und x_f mit gleicher Steigung berechnen sich über:

$$x_{g_{1,2}} = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}};\ \ x_f \in \mathbb{R}\,; x_f \leq -1.$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

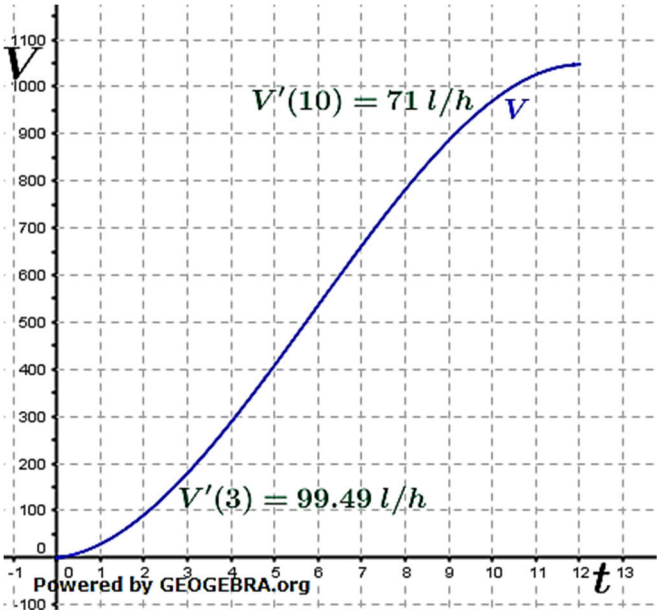
Lösung A4

a) Grafik siehe Abbildung rechts.

b) $V(12) = 1047{,}36$
Der Baum hat etwa $1050\ l$ *in* 12 *Stunden an seine Umgebung abgegeben.*

c) $V'(t)$ gibt die momentane Änderungsrate in l/h an.
$V'(3) = 99{,}5\ l/h$
$V'(10) = 71\ l/h$

d) $V'(5) = 125{,}25\ l/h$
$V'(6) = 127{,}96\frac{l}{h}$
$V'(7) = 123{,}89\ l/h$
Etwa zum Zeitpunkt $t = 6$ *gibt der Baum den meisten Sauerstoff an seine Umgebung ab.*



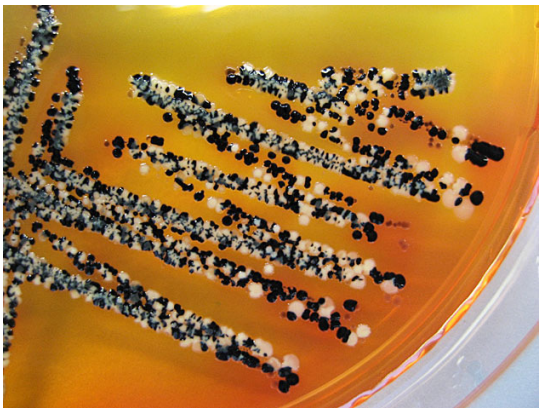
Begründung:
Die Messung wurde offensichtlich im Zeitraum von 6 Uhr morgens bis 18 Uhr abends durchgeführt, sodass der Zeitpunkt $t = 6$ zur Mittagszeit zu liegen kommt, dem Zeitpunkt mit der stärksten Sonneneinstrahlung.

Aufgabe A1

In einer wissenschaftlichen Studie wurde eine Bakterienkultur in einem Gefäß beobachtet.

Jede Stunde wurde die Fläche, die von den Bakterien bedeckt war, gemessen. Die bedeckte Fläche kann mithilfe der Funktion A modelliert werden:

$A(t) = -0{,}01t^3 + 0{,}1t^2 + t + 1{,}5$ ($A(t)$ in cm^2, t in h).



a) Berechne die Größe der von den Bakterien bedeckten Fläche zu Beginn der Messung und nach drei bzw. nach acht Stunden.

b) Skizziere den Graphen der Funktion $t \longrightarrow A$.

c) Bestimme die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der bakterienbesetzten Fläche in cm^2/h in den ersten vier Stunden der Messung.

d) Wann war die momentane Wachstumsgeschwindigkeit genauso groß wie zu Beginn der Messung? Wann war die momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten? Wann wurde die Fläche wieder kleiner?

Aufgabe A2

In einem Einkaufszentrum wurde an einem Samstag die Anzahl der Besucher gezählt.

Die Funktion b mit

$b(t) = -1{,}1t^4 + 23{,}2t^3 - 150t^2 + 361t$ gibt näherungsweise an, wie viele Besucher $b(t)$ zum Zeitpunkt t (in h) nach Öffnung in dem Einkaufszentrum waren.

a) Wie viele Besucher befanden sich etwa eine Stunde nach Öffnung im Einkaufszentrum?

b) Zu welchem Zeitpunkt waren die meisten Besucher im Einkaufszentrum?

c) Wie groß war der Zuwachs der Besucher pro Stunde nach drei bzw. nach 11 Stunden nach Öffnung im Einkaufszentrum?

d) Wie viele Personen haben das Einkaufszentrum in den ersten fünf Minuten vermutlich betreten?

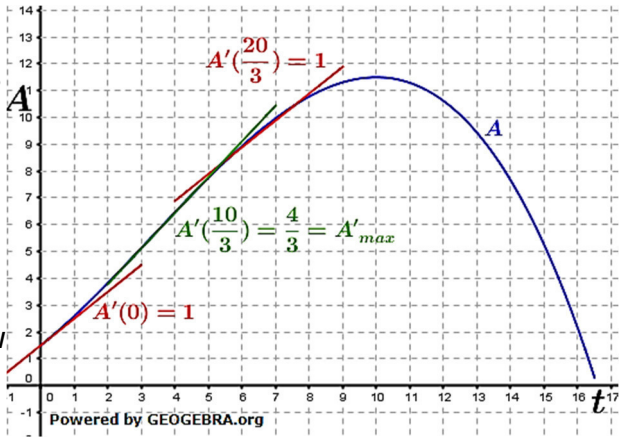
e) Wie lange war das Einkaufszentrum vermutlich geöffnet?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) *Beginn der Messung:*
$A(0) = 1{,}5$
Zu Beginn der Messung waren $1{,}5\ cm^2$ *mit Bakterien bedeckt.*
Nach drei Stunden:
$A(3) = -0{,}01 \cdot 3^3 + 0{,}1 \cdot 3^2 + 3 + 1{,}5 = 5{,}13$
Nach drei Stunden waren $5{,}67\ cm^2$ *mit Bakterien bedeckt.*
Nach acht Stunden:
$A(8) = -0{,}01 \cdot 8^3 + 0{,}1 \cdot 8^2 + 8 + 1{,}5 = 5{,}02$
Nach acht Stunden waren $5{,}02\ cm^2$ *mit Bakterien bedeckt*

b) Siehe Grafik rechts.



c) $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(4)-A(0)}{4-0} = \frac{6{,}46}{4} = 1{,}615$
Die mittlere Änderungsrate in den ersten vier Stunden beträgt etwa $1{,}6\ cm^2/h$.

d) *Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn der Messung:*
$A'(t) = -0{,}03t^2 + 0{,}2t + 1$
$A'(0) = 1$
Die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn der Messung betrug $1\ cm^2/h$.

Stelle mit gleicher Wachstumsgeschwindigkeit:
$A'(t) = 1 = -0{,}03t^2 + 0{,}2t + 1$
$-0{,}03t^2 + 0{,}2t = 0$
$t(-0{,}03t + 0{,}2) = 0$
$t_1 = 0$
$-0{,}03t + 0{,}2 = 0 \Longrightarrow \ t_2 = \frac{20}{3}$ | Satz vom Nullprodukt
Nach etwa $6{,}7$ *Stunden war die Wachstumsgeschwindigkeit gleich groß wie zu Beginn der Messung.*
Größte momentane Wachstumsgeschwindigkeit:
Die größte Wachstumsgeschwindigkeit ist im Wendepunkt des Graphen von A.
$A''(t) = -0{,}06t + 0{,}2$
$A''(t) = 0 = -0{,}06t + 0{,}2$
$0{,}06t = 0{,}2 \ \Longrightarrow \ t = \frac{10}{3}$
$A'\left(\frac{10}{3}\right) = -0{,}03 \cdot \frac{100}{9} + 0{,}2 \cdot \frac{10}{3} + 1 = \frac{4}{3}$
Die größte Wachstumsgeschwindigkeit mit etwa $1{,}33\ cm^2/h$ *ist ca.* $3{,}3$ *Stunden nach Beobachtungsbeginn.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Zeitpunkt, ab dem die Fläche wieder kleiner wird:
Nach Erreichen des Hochpunktes des Graphen von A wird die Fläche wieder kleiner.

$A'(t) = 0$

$-0{,}03t^2 + 0{,}2t + 1 = 0 \qquad | \quad :(-0{,}03)$

$t^2 - \frac{20}{3}t - \frac{100}{3} = 0$

$t_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{300}{9}} = \frac{10}{3} \pm \frac{20}{3} \qquad | \quad p/q$-Formel

$t_1 = 10; \;\; t_2 = -\frac{10}{3}$

Wegen $t \geq 0$ ist $t_1 = 10$ die einzigste Lösung.
Die Fläche nimmt für $t > 10$ wieder ab.

Lösung A2

a) *Anzahl der Besucher eine Stunde nach Öffnung:*
$b(1) = -1{,}1 \cdot 1^4 + 23{,}2 \cdot 1^3 - 150 \cdot 1^2 + 361 = 233$
Eine Stunde nach Öffnung befinden sich etwa 233 Personen im Zentrum.

b) *Zeitpunkt der größten Besucheranzahl:*
Ermittlung der Maxima des Graphen von b:
$b'(t) = -4{,}4t^3 + 46{,}4t^2 - 300t + 361$
$b'(t) = 0$
$-4{,}4t^3 + 46{,}4t^2 - 300t + 361 = 0$
$t_1 \overset{GTR}{=} 2{,}06; \quad t_2 \overset{GTR}{=} 9{,}61$
$b(2{,}06) \overset{GTR}{=} 290{,}12; \quad b(9{,}61) \overset{GTR}{=} 824{,}68$
Etwa $9{,}5$ Stunden nach Eröffnung waren die meisten Besucher im Einkaufszentrum.

c) *Zuwachs der Besucher nach drei bzw. 11 Stunden:*
$b'(3) \overset{GTR}{=} -31{,}4 \qquad b'(11) \overset{GTR}{=} -373{,}8$
Der Zuwachs der Besucher nach drei bzw. Stunden betrug zur Stunde drei etwa -31 Besucher pro Stunde, zur Stunde 11 etwa -374 Besucher pro Stunde. Die Besucheranzahl nahm also ab.

d) Anzahl Besucher in den ersten 5 Minuten:
$b\left(\frac{1}{12}\right) = -1{,}1 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^4 + 23{,}2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 - 150 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + 361 \cdot \frac{1}{12} \overset{GTR}{=} 29{,}06$
In den ersten fünf Minuten betraten etwa 29 Personen das Einkaufszentrum.

e) *Länge der Öffnung des Einkaufszentrums:*
Das Einkaufszentrum schließt dann, wenn sich keine Personen mehr darin befinden. Geometrisch ist dies die Nullstelle der Funktion b für $t > 0$.
$-1{,}1t^4 + 23{,}2t^3 - 150t^2 + 361t = 0$
$t_1 \overset{GTR}{=} 0; \quad t_2 \overset{GTR}{=} 12$
Das Einkaufszentrum war vermutlich 12 Stunden lang geöffnet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten dass gilt:
Sei $f(x) = g(x) + k(x)$ mit $g(x) = 3x^2$ und $k(x) = (x+2)^3$ so ist $f'(x) = g'(x) + k'(x)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+h)-g(x)+k(x+h)-k(x)}{x+h-x} = \frac{3(x+h)^2-3x^2+(x+h+2)^3-(x+2)^3}{h}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2+6hx+3h^2-3x^2+(x+h+2)^2\cdot(x+h+2)-(x^3+6x^2+12x+8)}{h}$$

$$= \frac{6hx+3h^2+(x^2+2hx+4x+4h+h^2+4)(x+h+2)-x^3-6x^2-12x-8}{h}$$

$$= \frac{h(6x+3h)+x^3+3hx^2+6x^2+3h^2x+12hx+12x+h^3+6h^2+12h+8-x^3-6x^2-12x-8}{h}$$

$$= \frac{h(6x+3h)+3hx^2+3h^2x+12hx+12x+h^3+6h^2+12h}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(6x+3h)+\cancel{h}(3x^2+3hx+12x+h^2+6h+12)}{\cancel{h}}$$

$$= (6x+3h)+(3x^2+3hx+12x+h^2+6h+12)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}(6x+3h)+(3x^2+3hx+12x+h^2+6h+12) = (6x)+(3x^2+12x+12)$$

$g(x) = 3x^2;$ $\qquad g'(x) = 6x$

$k(x) = (x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$ $\qquad k'(x) = 3x^2+12x+12$

$f'(x) = g'(x)+k'(x) = 6x+3x^2+12x+12$

q.e.d.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de