



Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f . Bestimme die Steigung von f im Punkt A .

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $A(1|f(1))$

b) $f(x) = 2e^{0,5x+1} - 3$; $A(1|f(1))$

Hinweis: $g(x) = e^{0,5x+1}$

$g'(x) = 0,5e^{0,5x+1}$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$; $A(-2|f(-2))$

d) $f(x) = 4\cos(0,25x) + 1$; $A(4|f(4))$

Hinweis: $g(x) = \cos(0,25x)$

$g'(x) = -0,25\sin(0,25x)$

Aufgabe A2

In welchem Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden g mit $y = 10 + x$?

a) f mit $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$

b) f mit $f(x) = -\frac{1}{x}$

c) f mit $f(x) = -0,01x^3$

d) f mit $f(x) = x^2 + a$

e) f mit $f(x) = bx^2$

f) f mit $f(x) = bx^2 + c$

Aufgabe A3

Gegeben sind die beiden Funktion f und g mit $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = x^3 + 1$.

- An welchen Stellen sind die Funktionswerte der beiden gegebenen Funktionen gleich groß?
- Prüfe, ob es eine gemeinsame Stelle x_0 gibt, in der f und g die gleiche Steigung haben.
- An welchen unterschiedlichen Stellen x_f bzw. x_g sind die Ableitungen der beiden gegebenen Funktionen gleich groß?

Aufgabe A4

Mit Hilfe der Fotosynthese wandeln Blätter Kohlenstoffdioxid in Sauerstoff um, der dann an seine Umgebung abgegeben wird.

Die abgegebene Sauerstoffmenge hängt u. a. von der Tageszeit t ab. Die Funktion

$$V(t) = -1,1t^3 + 20t^2 + 10t$$

($V(t)$ in l ; t in h) gibt den Messzeitraum von 12 Stunden während eines Tages näherungsweise an, wie viel Sauerstoff von den Blättern eines Baumes insgesamt bis zum Zeitpunkt t an seine Umgebung abgegeben worden ist.



- Zeichne den Graphen von V in ein geeignetes Koordinatensystem.
- Wie viel Sauerstoff hat der Baum während der Messzeit an seine Umgebung insgesamt abgegeben?
- Welche Bedeutung hat $V'(t)$? Bestimme $V'(3)$ und $V'(10)$.
- Bestimme näherungsweise, zu welcher Zeit der Baum am meisten Sauerstoff an seine Umgebung abgibt. Wie lässt sich das Ergebnis begründen?

Lösung A1

- a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$
 $f'(1) = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$
- b) $f(x) = 2e^{0,5x+1} - 3$ $f'(x) = e^{0,5x+1}$
 $f'(1) = e^{1,5}$
- c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ $f'(x) = x^3 - 3x$
 $f'(-2) = -8 + 6 = -2$
- d) $f(x) = 4\cos(0,25x) + 1$ $f'(x) = -\sin(0,25x)$
 $f'(4) = -\sin(1)$

Lösung A2

- a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $f'(x) = 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x_0 = 1$ $f(1) = 2$
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0(1|1)$ ist parallel zur Geraden.
- b) $f(x) = -\frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{1}{x^2}$
 $f'(x) = 1 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$ $f(1) = 1; f(-1) = 1$
Die Tangenten an den Graphen von f in den Punkten $P_1(1|1)$ und $P_2(-1|1)$ sind parallel zur Geraden.
- c) $f(x) = -0,01x^3$ $f'(x) = -0,03x^2$
 $f'(x) = 1 = -0,03x^2 \Rightarrow x^2 = -\frac{100}{3}$ keine Lösung
Der Graph von f besitzt keinen Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ in dem eine Parallele zur Geraden gelegt werden kann.
- d) $f(x) = x^2 + a$ $f'(x) = 2x$
 $f'(x) = 1 = 2x \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + a$
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4} + a\right)$ ist parallel zur Geraden.
- e) $f(x) = bx^2$ $f'(x) = 2bx$
 $f'(x) = 1 = 2bx \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2b}$ $f\left(\frac{1}{2b}\right) = \frac{b}{4c^2} = \frac{1}{4b}$
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2b} \mid \frac{1}{4b}\right)$ ist parallel zur Geraden.
- d) $f(x) = bx^2 + c$ $f'(x) = 2bx$
 $f'(x) = 1 = 2bx \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2b}$ $f\left(\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{4b} + c$
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2b} \mid \frac{1}{4b} + c\right)$ ist parallel zur Geraden.

Lösung A3

- a) $f(x) \cap g(x)$
 $-x^2 - 2x + 1 = x^3 + 1$
 $x^3 + x^2 + 2x = 0$
 $x(x^2 + x + 1) = 0$
 $x_0 = 0$
 $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine Lösung.
 $f(0) = 1 \Rightarrow f$ und g haben für $x_0 = 0$ denselben Funktionswert 1.

b) $f'(x) \cap g'(x)$

$$-2x - 2 = 3x^2$$

$$3x^2 + 2x + 2 = 0$$

| :3

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{6}{9}}$$

| p/q-Formel

Die Diskriminante ist negativ, somit keine Lösung.

Es existiert keine gemeinsame Stelle x_0 , in der die Ableitung der beiden gegebenen Funktionen gleich sind.

- c) Zur Verdeutlichung der Situation betrachten wir uns nebenstehende Grafik.

g ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die streng monoton steigend ist, also nur positive Steigungen aufweist. f hingegen ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-1|2)$. Diese Parabel hat positive Steigungen nur im Bereich von $x_f \leq -1$.

Somit kommen unterschiedliche Stellen von x_f und x_g nur für $x_f \leq -1$ vor. Wegen der Punktsymmetrie von g gehören dann aber zu jeder Stelle $x_f \leq -1$ zwei Stellen x_g .

Berechnung:

Es soll ja gelten $g'(x_g) = f'(x_f)$.

$$-2x_f - 2 = 3x_g^2$$

Diese Gleichung lösen wir nach x_f auf.

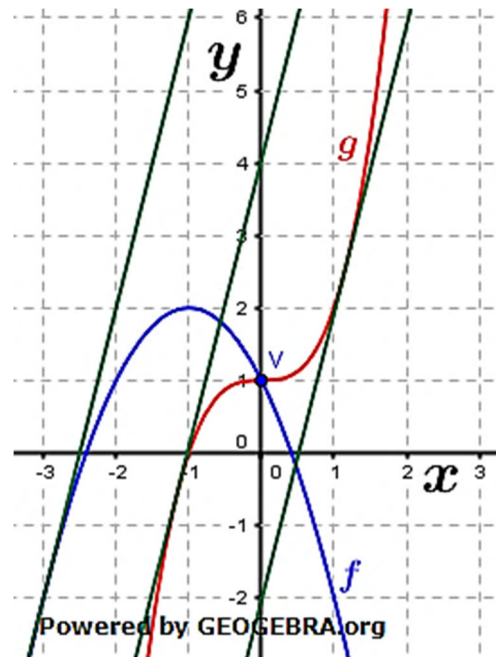
$$x_g^2 = -\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}$$

$$x_{g1,2} = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}}$$

Diese Gleichung hat nur Lösungen für $-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3} \geq 0$, was bedeutet, dass $x_f \leq -1$ sein muss. (Für $x_f = -1$ ist die Wurzel gleich Null, was bedeutet, dass es für $x_f = -1$ nur eine Stelle $x_g = 0$ gibt mit gleicher Steigung von f und g).

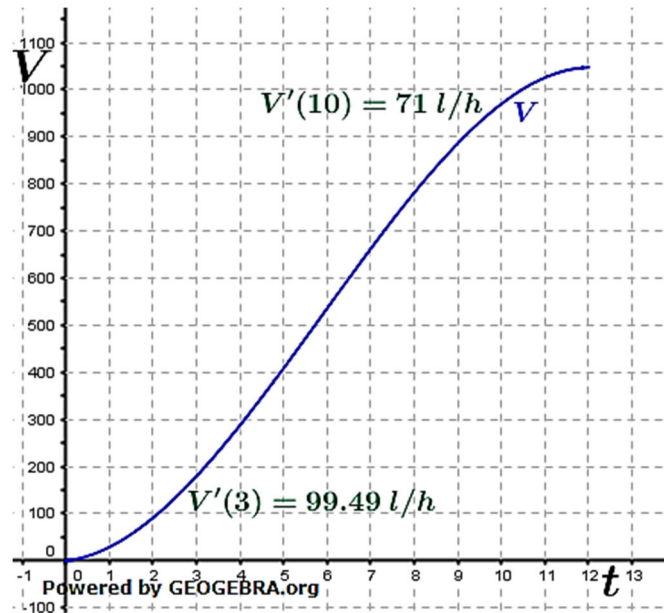
Die Stellen x_g und x_f mit gleicher Steigung berechnen sich über:

$$x_{g1,2} = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}}; \quad x_f \in \mathbb{R}; x_f \leq -1.$$



Lösung A4

- a) Grafik siehe Abbildung rechts.
- b) $V(12) = 1047,36$
 Der Baum hat etwa 1050 l in 12 Stunden an seine Umgebung abgegeben.
- c) $V'(t)$ gibt die momentane Änderungsrate in l/h an.
 $V'(3) = 99,5 \text{ l/h}$
 $V'(10) = 71 \text{ l/h}$
- d) $V'(5) = 125,25 \text{ l/h}$
 $V'(6) = 127,96 \text{ l/h}$
 $V'(7) = 123,89 \text{ l/h}$
 Etwa zum Zeitpunkt $t = 6$ gibt der Baum den meisten Sauerstoff an seine Umgebung ab.



Begründung:

Die Messung wurde offensichtlich im Zeitraum von 6 Uhr morgens bis 18 Uhr abends durchgeführt, sodass der Zeitpunkt $t = 6$ zur Mittagszeit zu liegen kommt, dem Zeitpunkt mit der stärksten Sonneneinstrahlung.