Lösung A1

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ $\qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

$f'(1) = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$

b) $f(x) = 2e^{0,5x+1} - 3$ $\qquad f'(x) = e^{0,5x+1}$

$f'(1) = e^{1,5}$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ $\qquad f'(x) = x^3 - 3x$

$f'(-2) = -8 + 6 = -2$

d) $f(x) = 4cos(0,25x) + 1$ $\qquad f'(x) = -sin(0,25x)$

$f'(4) = -sin(1)$

Lösung A2

a) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \implies x_0 = 1$ $\qquad f(1) = 2$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0(1|1)$ ist parallel zur Geraden.

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 1 = \frac{1}{x^2} \implies x_1 = 1;\ x_2 = -1$ $\qquad f(1) = 1;\ f(-1) = 1$

Die Tangenten an den Graphen von f in den Punkten $P_1(1|1)$ und $P_2(-1|1)$ sind parallel zur Geraden.

c) $f(x) = -0,01x^3$ $\qquad f'(x) = -0,03x^2$

$f'(x) = 1 = -0,03x^2 \implies x^2 = -\frac{100}{3}$ keine Lösung

Der Graph von f besitzt keinen Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ in dem eine Parallele zur Geraden gelegt werden kann.

d) $f(x) = x^2 + a$ $\qquad f'(x) = 2x$

$f'(x) = 1 = 2x \implies x_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + a$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4} + a\right)$ ist parallel zur Geraden.

e) $f(x) = bx^2$ $\qquad f'(x) = 2bx$

$f'(x) = 1 = 2bx \implies x_0 = \frac{1}{2b}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2b}\right) = \frac{b}{4c^2} = \frac{1}{4b}$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2b}\middle|\frac{1}{4b}\right)$ ist parallel zur Geraden.

d) $f(x) = bx^2 + c$ $\qquad f'(x) = 2bx$

$f'(x) = 1 = 2bx \implies x_0 = \frac{1}{2b}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{4b} + c$

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P_0\left(\frac{1}{2b}\middle|\frac{1}{4b} + c\right)$ ist parallel zur Geraden.

Lösung A3

a) $f(x) \cap g(x)$

$-x^2 - 2x + 1 = x^3 + 1$

$x^3 + x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 + x + 1) = 0$

$x_0 = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$ hat keine Lösung.

$f(0) = 1 \implies f$ und g haben für $x_0 = 0$ denselben Funktionswert 1.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $f'(x) \cap g'(x)$

$-2x - 2 = 3x^2$

$3x^2 + 2x + 2 = 0 \qquad | \quad :3$

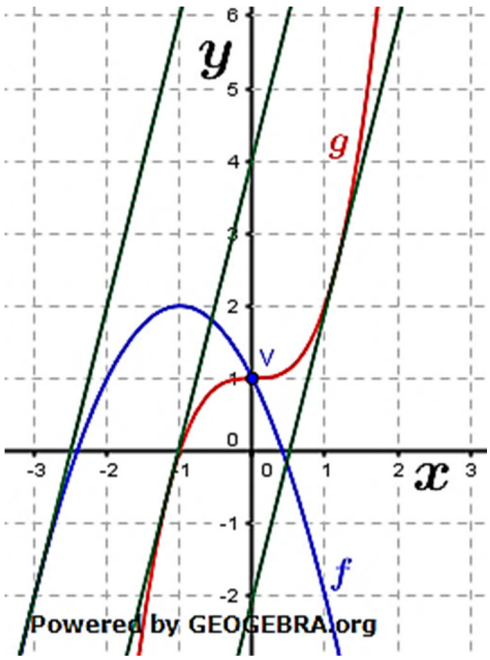
$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{6}{9}} \qquad | \quad p/q$-Formel

Die Diskriminante ist negativ, somit keine Lösung.

Es existiert keine gemeinsame Stelle x_0, in der die Ableitung der beiden gegebenen Funktionen gleich sind.

c) Zur Verdeutlichung der Situation betrachten wir uns nebenstehende Grafik.



g ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die streng monoton steigend ist, also nur positive Steigungen aufweist. f hingegen ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-1|2)$. Diese Parabel hat positive Steigungen nur im Bereich von $x_f \leq -1$.

Somit kommen unterschiedliche Stellen von x_f und x_g nur für $x_f \leq -1$ vor. Wegen der Punktsymmetrie von g gehören dann aber zu jeder Stelle $x_f \leq -1$ zwei Stellen x_g.

<u>Berechnung:</u>

Es soll ja gelten $g'(x_g) = f'(x_f)$.

$-2x_f - 2 = 3x_g^2$

Diese Gleichung lösen wir nach x_f auf.

$x_g^2 = -\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}$

$x_{g_{1,2}} = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}}$

Diese Gleichung hat nur Lösungen für $-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3} \geq 0$, was bedeutet, dass $x_f \leq -1$ sein muss. (Für $x_f = -1$ ist die Wurzel gleich Null, was bedeutet, dass es für $= -1$ nur eine Stelle $x_g = 0$ gibt mit gleicher Steigung von f und g).

Die Stellen x_g und x_f mit gleicher Steigung berechnen sich über:

$$x_{g_{1,2}} = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}x_f - \frac{2}{3}};\ \ x_f \in \mathbb{R}\,; x_f \leq -1.$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

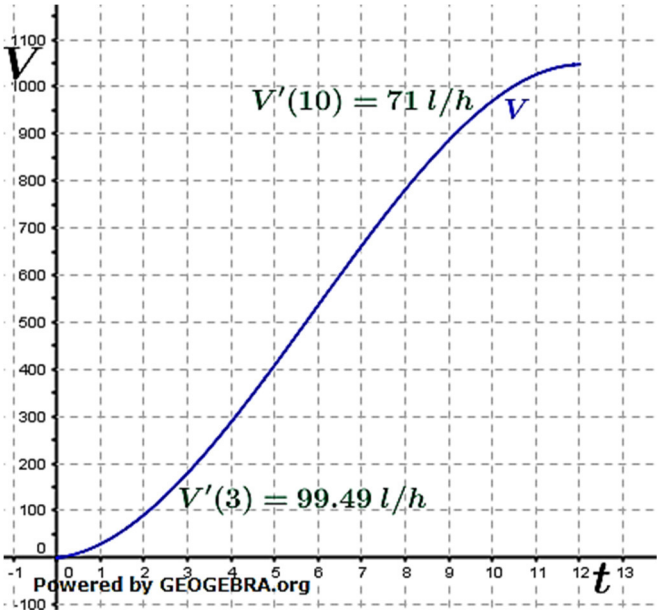
Lösung A4

a) Grafik siehe Abbildung rechts.

b) $V(12) = 1047{,}36$
Der Baum hat etwa $1050\ l$ *in* 12 *Stunden an seine Umgebung abgegeben.*

c) $V'(t)$ gibt die momentane Änderungsrate in l/h an.
$V'(3) = 99{,}5\ l/h$
$V'(10) = 71\ l/h$

d) $V'(5) = 125{,}25\ l/h$
$V'(6) = 127{,}96\frac{l}{h}$
$V'(7) = 123{,}89\ l/h$
Etwa zum Zeitpunkt $t = 6$ *gibt der Baum den meisten Sauerstoff an seine Umgebung ab.*



Begründung:
Die Messung wurde offensichtlich im Zeitraum von 6 Uhr morgens bis 18 Uhr abends durchgeführt, sodass der Zeitpunkt $t = 6$ zur Mittagszeit zu liegen kommt, dem Zeitpunkt mit der stärksten Sonneneinstrahlung.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de