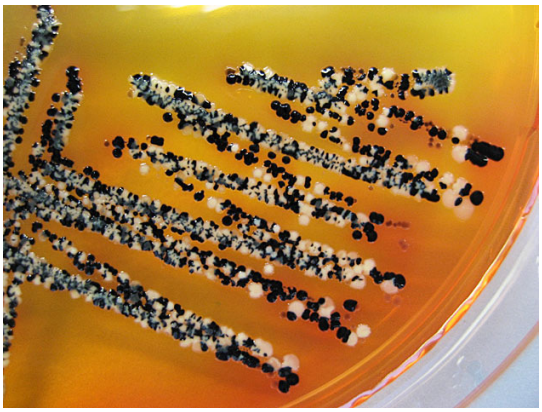
Aufgabe A1

In einer wissenschaftlichen Studie wurde eine Bakterienkultur in einem Gefäß beobachtet.

Jede Stunde wurde die Fläche, die von den Bakterien bedeckt war, gemessen. Die bedeckte Fläche kann mithilfe der Funktion A modelliert werden:

$A(t) = -0{,}01t^3 + 0{,}1t^2 + t + 1{,}5$ ($A(t)$ in cm^2, t in h).



a) Berechne die Größe der von den Bakterien bedeckten Fläche zu Beginn der Messung und nach drei bzw. nach acht Stunden.

b) Skizziere den Graphen der Funktion $t \longrightarrow A$.

c) Bestimme die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der bakterienbesetzten Fläche in cm^2/h in den ersten vier Stunden der Messung.

d) Wann war die momentane Wachstumsgeschwindigkeit genauso groß wie zu Beginn der Messung? Wann war die momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten? Wann wurde die Fläche wieder kleiner?

Aufgabe A2

In einem Einkaufszentrum wurde an einem Samstag die Anzahl der Besucher gezählt.

Die Funktion b mit

$b(t) = -1{,}1t^4 + 23{,}2t^3 - 150t^2 + 361t$ gibt näherungsweise an, wie viele Besucher $b(t)$ zum Zeitpunkt t (in h) nach Öffnung in dem Einkaufszentrum waren.

a) Wie viele Besucher befanden sich etwa eine Stunde nach Öffnung im Einkaufszentrum?

b) Zu welchem Zeitpunkt waren die meisten Besucher im Einkaufszentrum?

c) Wie groß war der Zuwachs der Besucher pro Stunde nach drei bzw. nach 11 Stunden nach Öffnung im Einkaufszentrum?

d) Wie viele Personen haben das Einkaufszentrum in den ersten fünf Minuten vermutlich betreten?

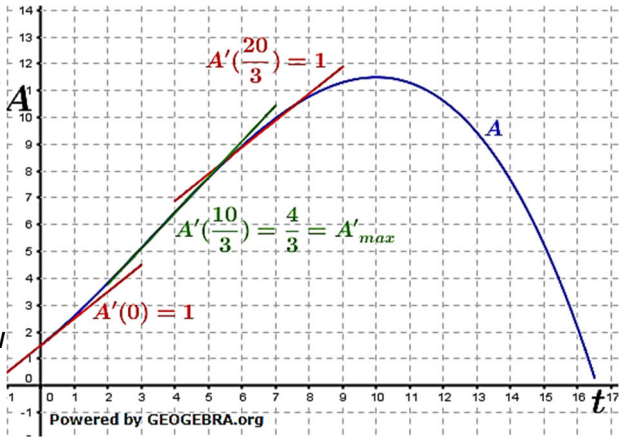
e) Wie lange war das Einkaufszentrum vermutlich geöffnet?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) *Beginn der Messung:*
$A(0) = 1{,}5$
Zu Beginn der Messung waren $1{,}5\ cm^2$ *mit Bakterien bedeckt.*
Nach drei Stunden:
$A(3) = -0{,}01 \cdot 3^3 + 0{,}1 \cdot 3^2 + 3 + 1{,}5 = 5{,}13$
Nach drei Stunden waren $5{,}67\ cm^2$ *mit Bakterien bedeckt.*
Nach acht Stunden:
$A(8) = -0{,}01 \cdot 8^3 + 0{,}1 \cdot 8^2 + 8 + 1{,}5 = 5{,}02$
Nach acht Stunden waren $5{,}02\ cm^2$ *mit Bakterien bedeckt*

b) Siehe Grafik rechts.



c) $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(4)-A(0)}{4-0} = \frac{6{,}46}{4} = 1{,}615$
Die mittlere Änderungsrate in den ersten vier Stunden beträgt etwa $1{,}6\ cm^2/h$.

d) *Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn der Messung:*
$A'(t) = -0{,}03t^2 + 0{,}2t + 1$
$A'(0) = 1$
Die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn der Messung betrug $1\ cm^2/h$.

Stelle mit gleicher Wachstumsgeschwindigkeit:
$A'(t) = 1 = -0{,}03t^2 + 0{,}2t + 1$
$-0{,}03t^2 + 0{,}2t = 0$
$t(-0{,}03t + 0{,}2) = 0$
$t_1 = 0$
$-0{,}03t + 0{,}2 = 0 \Longrightarrow \ t_2 = \frac{20}{3}$ | Satz vom Nullprodukt
Nach etwa $6{,}7$ *Stunden war die Wachstumsgeschwindigkeit gleich groß wie zu Beginn der Messung.*
Größte momentane Wachstumsgeschwindigkeit:
Die größte Wachstumsgeschwindigkeit ist im Wendepunkt des Graphen von A.
$A''(t) = -0{,}06t + 0{,}2$
$A''(t) = 0 = -0{,}06t + 0{,}2$
$0{,}06t = 0{,}2 \ \Longrightarrow \ t = \frac{10}{3}$
$A'\left(\frac{10}{3}\right) = -0{,}03 \cdot \frac{100}{9} + 0{,}2 \cdot \frac{10}{3} + 1 = \frac{4}{3}$
Die größte Wachstumsgeschwindigkeit mit etwa $1{,}33\ cm^2/h$ *ist ca.* $3{,}3$ *Stunden nach Beobachtungsbeginn.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Zeitpunkt, ab dem die Fläche wieder kleiner wird:
Nach Erreichen des Hochpunktes des Graphen von A wird die Fläche wieder kleiner.

$A'(t) = 0$

$-0{,}03t^2 + 0{,}2t + 1 = 0 \qquad | \quad :(-0{,}03)$

$t^2 - \frac{20}{3}t - \frac{100}{3} = 0$

$t_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{300}{9}} = \frac{10}{3} \pm \frac{20}{3} \qquad | \quad p/q$-Formel

$t_1 = 10; \;\; t_2 = -\frac{10}{3}$

Wegen $t \geq 0$ ist $t_1 = 10$ die einzigste Lösung.
Die Fläche nimmt für $t > 10$ wieder ab.

Lösung A2

a) *Anzahl der Besucher eine Stunde nach Öffnung:*
$b(1) = -1{,}1 \cdot 1^4 + 23{,}2 \cdot 1^3 - 150 \cdot 1^2 + 361 = 233$
Eine Stunde nach Öffnung befinden sich etwa 233 Personen im Zentrum.

b) *Zeitpunkt der größten Besucheranzahl:*
Ermittlung der Maxima des Graphen von b:
$b'(t) = -4{,}4t^3 + 46{,}4t^2 - 300t + 361$
$b'(t) = 0$
$-4{,}4t^3 + 46{,}4t^2 - 300t + 361 = 0$
$t_1 \overset{GTR}{=} 2{,}06; \quad t_2 \overset{GTR}{=} 9{,}61$
$b(2{,}06) \overset{GTR}{=} 290{,}12; \quad b(9{,}61) \overset{GTR}{=} 824{,}68$
Etwa $9{,}5$ Stunden nach Eröffnung waren die meisten Besucher im Einkaufszentrum.

c) *Zuwachs der Besucher nach drei bzw. 11 Stunden:*
$b'(3) \overset{GTR}{=} -31{,}4 \qquad b'(11) \overset{GTR}{=} -373{,}8$
Der Zuwachs der Besucher nach drei bzw. Stunden betrug zur Stunde drei etwa -31 Besucher pro Stunde, zur Stunde 11 etwa -374 Besucher pro Stunde. Die Besucheranzahl nahm also ab.

d) Anzahl Besucher in den ersten 5 Minuten:
$b\left(\frac{1}{12}\right) = -1{,}1 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^4 + 23{,}2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 - 150 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + 361 \cdot \frac{1}{12} \overset{GTR}{=} 29{,}06$
In den ersten fünf Minuten betraten etwa 29 Personen das Einkaufszentrum.

e) *Länge der Öffnung des Einkaufszentrums:*
Das Einkaufszentrum schließt dann, wenn sich keine Personen mehr darin befinden. Geometrisch ist dies die Nullstelle der Funktion b für $t > 0$.
$-1{,}1t^4 + 23{,}2t^3 - 150t^2 + 361t = 0$
$t_1 \overset{GTR}{=} 0; \quad t_2 \overset{GTR}{=} 12$
Das Einkaufszentrum war vermutlich 12 Stunden lang geöffnet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de