Ableitungen
Tangente und Normale

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis

Tangente und Normale

Kapitel mit 157 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(19 Aufgaben)*	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	12
Aufgabenblatt 2 *(22 Aufgaben)*	15
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	17
Aufgabenblatt 3 *(17 Aufgaben)*	19
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	20
Aufgabenblatt 4 *(11 Aufgaben)*	23
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	25
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 2 *(16 Aufgaben)*	26
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	27
Aufgabenblatt 2 *(14 Aufgaben)*	29
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	30
Aufgabenblatt 3 *(11 Aufgaben)*	34
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	35
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(13 Aufgaben)*	39
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	40
Aufgabenblatt 2 *(16 Aufgaben)*	45
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	47
Aufgabenblatt 3 *09 Aufgaben)*	55
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	56
Aufgabenblatt 4 *(09 Aufgaben)*	61
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	63

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

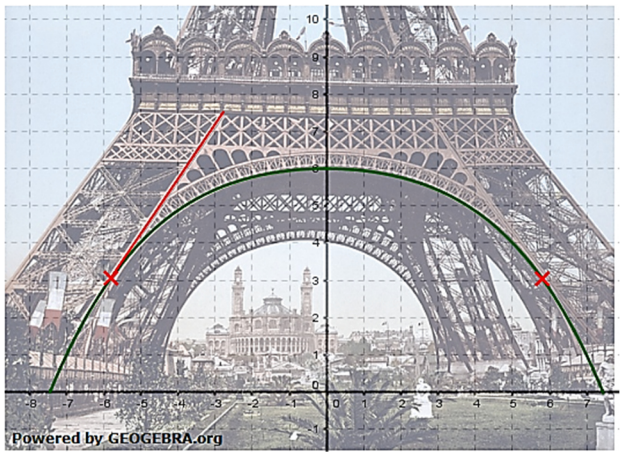
Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Nachdem wir nun alle Ableitungsregeln kennen, stellt sich doch die Frage, was wir damit anfangen können. Eines dieser Anwendungsgebiete beschäftigt sich mit der Aufstellung von Tangenten- bzw. Normalengleichungen in bestimmten Punkten von Graphen anderer Funktionen bzw. legen von Tangenten von bestimmten Punkten aus an den Graphen einer Funktion.

Tangente und Normale in bestimmten Punkten

Wegen Reparaturarbeiten ist der Austausch von acht Seitenträgern des Eiffelturms erforderlich. Die Seitenträger beginnen in einem Punkt des unteren Bogens und enden kurz vor dem ersten Aussichtsplateau des Turms.
Für die Anfertigung der neuen Träger wird eine Konstruktionszeichnung benötigt, um die Arbeiten in Auftrag geben zu können. Hierzu muss zunächst die Schrägstellung sowie die Länge des Trägers ermittelt werden.



Eine Architektengruppe fertigte Bilder der Situation im geeigneten Maßstab an. Die obige Grafik zeigt die Situation, einer der acht auszutauschenden Träger ist in der Grafik rot gekennzeichnet.
Die Aufnahmen wurden digitalisiert und vermessen. Dabei wurde festgestellt, dass der Bogen durch $f(x) = -0{,}0096x^4 + 0{,}00002x^3 - 0{,}05537x^2 - 0{,}0023x + 6$ beschrieben werden kann. Der Ansatzpunkt des schrägen Trägers am Bogen liegt im Punkt $P(-5{,}8|3{,}0)$. Der Träger geht in diesem Punkt tangential in den Bogen über.
Gesucht wird die Funktionsgleichung g, die den Verlauf des Trägers beschreibt.

Eine solche, wie auch immer geartete Aufgabenstellung ist ein Tangentenproblem in einem bestimmten Punkt des Graphen einer Funktion. In unserem Beispiel stellt die Funktion f den Verlauf des Bogens dar, der Punkt P liegt auf dem Bogen, wird also durch die Funktionsgleichung von f beschrieben und der Träger wird zur Tangente an den Bogen im Punkt P.

Hieraus ergeben sich die nachfolgenden Bedingungen:
Soll der Träger im Punkt P den Bogen tangential berühren, so muss die Geradengleichung des Trägers dieselbe Steigung haben, wie der Bogen selbst im Punkt P. Zudem liegt P außer auf dem Bogen selbst auch auf der Tangente. Also beschreibt auch die Tangentengleichung den Punkt P.

Eine Tangente ist mathematisch gesehen eine Grade mit der Funktionsgleichung $y = mx + c$, wobei m die Steigung der Geraden und c deren Schnittpunkt mit der y-Achse ist (y-Achsenabschnitt). Somit benötigen wir zunächst die Steigung m. Da diese gleich groß sein muss wie die Steigung des Bogens im Punkt P, können wir diese über die erste Ableitung der Funktionsgleichung des Bogens berechnen.

$f(x) = -0{,}00096x^4 + 0{,}00002x^3 - 0{,}05537x^2 - 0{,}0023x + 6$
$f'(x) = -0{,}00384x^3 + 0{,}00006x^2 - 0{,}11047x - 0{,}0023$
Der Punkt P hat die x-Koordinate $-5{,}8$, also benötigen wir $f'(-5{,}8)$
$f'(-5{,}8) = -0{,}00384 \cdot (-5{,}8)^3 + 0{,}00006 \cdot (-5{,}8)^3 - 0{,}111047 \cdot (-5{,}8) - 0{,}0023$
$= 1{,}393$
Die Tangente hat somit etwa die Steigung $m = 1{,}393$, die Tangentengleichung ist somit zunächst $y = 1{,}393x + c$.
Jetzt benötigen wir noch den Wert von c. Da aber P auf der Tangente liegt, können wir den Punkt P in die Tangentengleichung einsetzen und daraus c berechnen.
$3{,}0 = 1{,}393 \cdot (-5{,}8) + c$
$3{,}0 = -8{,}0794 + c \qquad | \quad +8{,}0794$
$c = 11{,}0794$
Die Geradengleichung, die den Verlauf des Trägers beschreibt, lautet somit:

$$y = 1{,}393x + 11{,}08$$

Tangentengleichung über die Punkt-Steigungs-Formel

Die zuvor beschriebene Aufstellung der Geradengleichung der Tangente entspricht der Vorgehensweise zum Aufstellen von Geraden in Klasse 8 bzw. Klasse 9. Wegen der etwas umständlichen Berechnung lernen wir hier nun eine elegantere Methode kennen, ohne die wir Aufgaben eines späteren Kapitels auch nicht lösen können.

Zunächst beschreiben wir die Tangentengleichung nicht mehr mit der Variablen $y =$, sondern vielmehr beginnen wir mit $t(x) =$. Das t steht hier für Tangente, mit $t(x) =$ weiß jeder, dass nachfolgend eine Tangentengleichung beschrieben wird.

Dann merken wir uns die Punkt-Steigungs-Formel einer Geraden. Für diese gilt:

Ist ein Punkt $P(u|f(u))$ Element einer Funktion f , so lautet die Funktionsgleichung der Tangente im Punkt P

$$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

Wie wir sehen, benötigen war also lediglich den Wert der Steigung des Graphen der Funktion f im Punkt P, also $f'(u)$ und schon können wir die Tangentengleichung ohne weitere Berechnung aufstellen.

Für unser obiges Beispiel bedeutet dies: $f'(u) = f'(-5{,}8) = 1{,}393$, $u = -5{,}8$ und $f(u) = 3$. Die Gleichung des Trägers damit

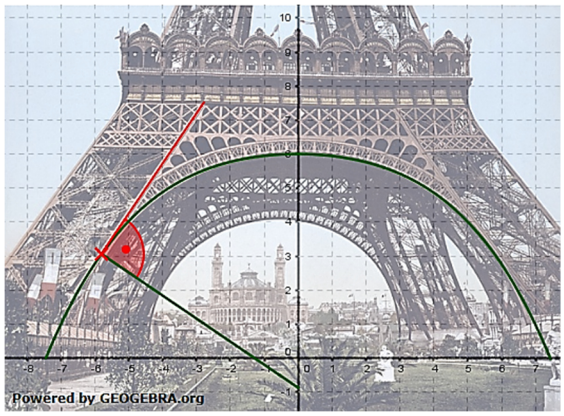
$$t(x) = 1{,}393 \cdot (x + 5{,}8) + 3$$

(Ausmultipliziert ergibt dies wie oben $t(x) = 1{,}393x + 11{,}0794$)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Normalengleichung über die Punkt-Steigungs-Formel

Zunächst definieren wir, was eine Normale ist. Eine Normale ist ebenfalls eine Gerade, die auf irgendeiner Tangente senkrecht (orthogonal) steht. Die Tangente ist in nebenstehender Grafik rot, die Normale grün gekennzeichnet.



Mithilfe der Punktsteigungsformel ist es nun ein leichtes, die Funktionsgleichung dieser Normalen aufzustellen. Wir bezeichnen die Normale zunächst mit $n(x)$, dann lautet die Funktionsgleichung:

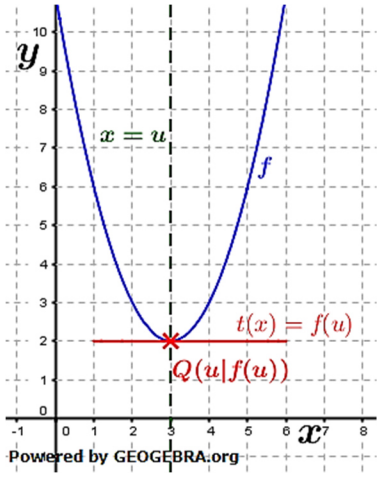
$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$$

Wie wir sehen, ist der einzige Unterschied zur Tangentengleichung der Ausdruck $f'(u)$ und $-\frac{1}{f'(u)}$. Alles andere ist identisch. Die Normalengleichung unseres Beispiels lautet also

$$n(x) = -\frac{1}{1{,}393} \cdot (x+5{,}8) + 3 = -0{,}7179(x+5{,}8) + 3.$$

Normale bei waagrechter Tangente

Einen Sonderfall stellen waagrechte Tangenten und deren zugehörige Normalen dar. Waagrechte Tangenten verlaufen parallel zur x-Achse, während deren Normalen parallel zur y-Achse verlaufen. Dies führt zu einer Sonderform der Tangenten- bzw. Normalengleichung.



Bei einer waagrechten Tangente, deren Steigung $(f'(u))$ ja Null ist, erhalten wir über die Punkt-Steigungs-Formel $t(x) = 0 + f(u) = f(u)$.

Da die Normale eine unendlich große Steigung hat, kann deren Gleichung nicht mehr über die Punkt-Steigungs-Formel dargestellt werden. In diesem Falle lautet ihre Gleichung $x = u$.

Merksatz Tangente und Normale

Ist $P(u|f(u)) \in f(x)$ dann lautet die Gleichung der Tangente in $P(u|f(u))$

$$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$$

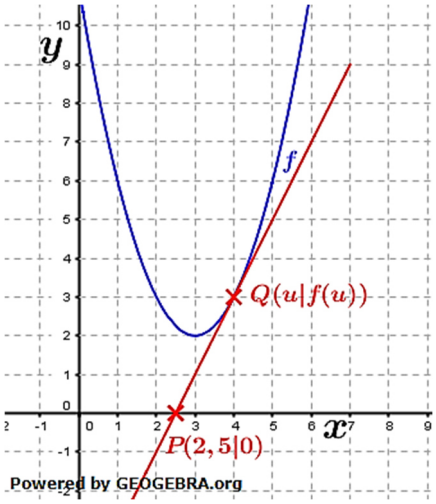
und die Gleichung der Normalen in diesem Punkt

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$$

Hat f in $P(u|f(u))$ eine waagrechte Tangente, so lautet deren Gleichung $t(x) = f(u)$ und die Gleichung der Normalen in diesem Punkt $x = u$.

Tangente von einem bestimmten Punkt an eine Funktion

Wollten wir im bisherigen Verlauf wissen, wie die Steigung einer Tangente in einem ***bekannten Punkt*** der Kurve lautet, so betrachten wir uns nun den Fall, wie die Funktionsgleichung einer Tangente lautet, die von einem Punkt, der ***nicht*** auf der Kurve liegt, an eine Kurve lautet.



Der Unterschied in diesem Falle ist der, dass wir die Koordinaten des Kurvenpunktes nicht kennen, dass diese also vorläufig unbekannt sind. In der seitlichen Grafik ist dies durch den Punkt $Q(u|f(u))$ dargestellt, der Punkt, von dem aus die Tangente an die Kurve gelegt werden soll, ist der Punkt $P(2{,}5|0)$.

Aufgabenstellung

Gegeben sei f mit $f(x) = (x-3)^2 + 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Tangente durch $P(2{,}5|0)$ an den Graphen der Funktion f?

Lösungsweg

Auch hier stellen wir die Tangentengleichung über die Punkt-Steigungs-Formel auf, also $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$. Wir sehen, dass wir $f'(u)$ benötigen, also bilden wir zuerst einmal $f'(x)$.

$f(x) = (x-3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11 \implies \quad f'(x) = 2x - 6$

Somit ist $f'(u) = 2u - 6$, unsere Tangentengleichung lautet

$$t(x) = (2u-6) \cdot (x-u) + f(u).$$

Leider sind in diesem Fall die Koordinaten von Q mit u und $f(u)$ unbekannt. Zwar lässt sich $f(u) = u^2 - 6u + 11$ bilden, aber was setzen wir denn nun ein?

Wir haben jedoch noch eine andere Bedingung, denn die Tangente soll durch den Punkt $P(2{,}5|0)$ verlaufen. Also beschreibt die Tangentengleichung alle Punkte, auch den Punkt $P(2{,}5|0)$ und damit ist doch $x = 2{,}5$ und $t(x) = 0$. Wir sind also in der Lage, eine Punktprobe zu machen und wir erhalten:

$$0 = (2u-6)(2{,}5-u) + u^2 - 6u + 11$$

Jetzt müssen wir diese Gleichung nach u auflösen:

$5u - 2u^2 - 15 + 6u + u^2 - 6u + 11 = 0$

$-u^2 + 5u - 4 = 0 \qquad | \quad \cdot(-1)$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

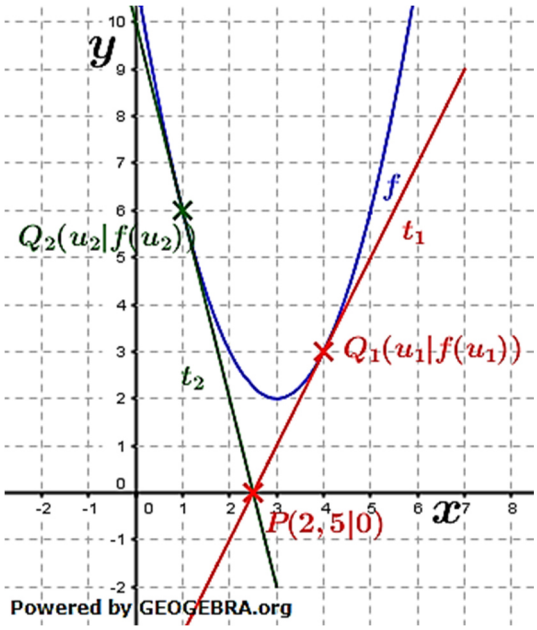
$u_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} \qquad | \quad p/q$-Formel

$u_1 = 4; \quad u_2 = 1$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Wir erhalten also zwei Werte für u, was bedeutet, dass es zwei Tangenten vom Punkt $P(2{,}5|0)$ aus an den Graphen der Funktion f gibt. Mit der Kenntnis der Werte u_1 und u_2 können wir jetzt problemlos die beiden Tangentengleichungen aufstellen, nämlich

$$t_1(x) = (2u_1 - 6) \cdot (x - u_1) + f(u_1)$$
$$= 2 \cdot (x - 4) + 3 = 2x - 5$$
$$t_2(x) = (2u_2 - 6) \cdot (x - u_2) + f(u_2)$$
$$= -4 \cdot (x - 1) + 6 = -4x + 10$$



Beispielaufgaben

Beispiel 1

Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x^2 - x)^2$ im Punkt $P(2|f(2))$.

Lösung 1

$t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$
$f'(x) = 2(x^2 - x) \cdot (2x - 1)$
$f'(2) = 2(4 - 2) \cdot (4 - 1) = 16$
$f(2) = (4 - 2)^2 = 4$
$t(x) = 16 \cdot (x - 2) + 4 = 16x - 28$
$n(x) = -\frac{1}{f'(2)} \cdot (x - 2) + f(2) = -\frac{1}{16}(x - 2) + 4$
$n(x) = -\frac{1}{16}x + \frac{33}{8}$

Beispiel 2

Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x^2 - x - 4)$ die parallel zur Geraden mit $y = x + 5$ verläuft.

Lösung 2

Die Tangente soll parallel zur Geraden mit $y = x + 5$ verlaufen. Parallel Geraden müssen dieselbe Steigung haben. Da $y = x + 5$ die Steigung $m = 1$ hat, muss $f'(x) = 1$ sein.

$f(x) = x \cdot (x^2 - x - 4)$
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$
$f'(x) = 1 \implies 3x^2 - 2x - 4 = 1$
$3x^2 - 2x - 5 = 0 \qquad | \quad :3$
$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$
$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}$
$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = -1$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 4\right) = -\frac{130}{27}$ $\qquad f(-1) = (-1) \cdot (1 + 1 - 4) = 2$

$t_1(x) = 1 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) - \frac{130}{27} = x - \frac{175}{27}$ $\qquad t_2(x) = 1 \cdot (x + 1) + 2 = x + 3$

Beispiel 3

Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x^2 - x - 4)$ deren Normale parallel zur Geraden mit $y = -x$ verläuft.

Lösung 3

Die Normale muss wegen der Angabe „parallel zu $y = -x$„ die Steigung $m = -1$ haben. Damit muss die Tangente wegen $m_1 \cdot m_2 = -1$ die Steigung $m = 1$ haben.
Da somit dieselben Bedingungen herrschen wie in Beispiel 2, ist die Lösung dieser Aufgabe dieselbe, nämlich:

$t_1(x) = 1 \cdot \left(x - \frac{5}{3}\right) - \frac{130}{27} = x - \frac{175}{27}$ $\qquad t_2(x) = 1 \cdot (x + 1) + 2 = x + 3$

(siehe auch Beispiel 2)

Beispiel 4

Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot (-x^2 + x + 4)$ die senkrecht auf der Geraden durch die Punkte $P(3|9)$ und $Q(-1|1)$ steht.
Berechne auch die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 4

Bestimmung der Steigung der Geraden durch P und Q über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$m_n = \frac{9-1}{3-(-1)} = 2$

Bestimmung der Steigung der Tangente über $m_n \cdot m_t = -1$:

$2 \cdot m_t = -1 \Rightarrow \; m_t = -\frac{1}{2}$

Bestimmung der Tangentengleichung über $t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$:

$f'(u) = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -x^3 + x^2 + 4x$ $\qquad f'(x) = -3x^2 + 2x + 4$

$f'(u) = -\frac{1}{2} = -3u^2 + 2u + 4$

$-3u^2 + 2u + \frac{9}{2} = 0$ $\qquad | \qquad : (-3)$

$u^2 - \frac{2}{3}u - \frac{9}{6} = 0$

$u_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{9}{6}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{29}{18}}$ $\qquad | \qquad p/q$-Formel

$u_1 = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{29}{18}} \approx 1{,}6; \quad u_2 = \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{29}{18}} \approx -0{,}94$

Auch hier erhalten wir wieder zwei Lösungen, benötigen allerdings noch $f(u_1)$ und $f(u_2)$.

$f(u_1) = 1{,}6 \cdot (-1{,}6^2 + 1{,}6 + 4) \approx 4{,}9$ $\qquad f(u_2) = -0{,}94 \cdot (-(-0{,}94)^2 - 0{,}94 + 4) = -2$

$t_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1{,}6) + 4{,}9 = -\frac{1}{2}x + 5{,}7$ $\qquad t_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 0{,}94) - 2 = -\frac{1}{2}x - 2{,}47$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
Schnittpunkte mit x-Achse mit $t(x) = 0$:

$-\frac{1}{2}x_1 + 5{,}63 = 0; \Rightarrow x_1 = 11{,}26$ $\qquad -\frac{1}{2}x_2 - 2{,}47 = 0; \Rightarrow \; x_2 = -4{,}94$

$N_1(11{,}26|0)$ $\qquad N_2(-4{,}94|0)$

Schnittpunkte mit y-Achse mit $t(0)$

$S_{y_1}(0|5{,}63)$ $\qquad S_{y_2}(0|-2{,}47)$

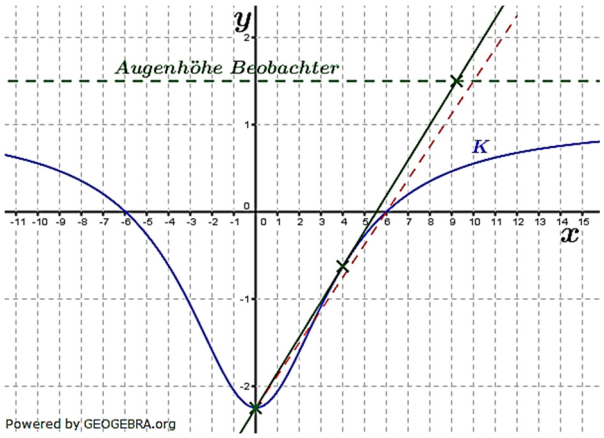
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 5

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16}$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.
K stellt für $-6 \leq x \leq 6$ den Querschnitt eines $500\,m$ langen Kanals dar (x in Meter, $f(x)$ in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y = 0$. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal $2{,}25\,m$.
An Land steht eine Person.
In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe $1{,}50\,m$)?
(Quelle: Abitur BW Analysis 2004)

Lösung 5

Dies ist eine Aufgabe zur Tangentenbildung von einem Punkt an eine Kurve.
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Die Sichtlinie des Beobachters ist eine Tangente an f durch die Kanalsohle. Steht er weiter weg vom Kanal als die x–Koordinate seines Beobachtungspunktes, kann er den Grund des Kanals nicht mehr sehen.
Die x–Koordinate seines Beobachtungspunktes ergibt sich über den Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden $y = 1.5$ (Augenhöhe des Beobachters).



Der Berührpunkt ist $P(u|f(u))$, damit können wir die Punkt-Steigungsformel der Tangente aufstellen mit: $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$.

$f(u) = \frac{u^2-36}{u^2+16}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2+16)-2x(x^2-36)}{(x^2+16)^2} = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$ $\qquad f'(u) = \frac{104u}{(u^2+16)^2}$

$t(x) = \frac{104u}{(u^2+16)^2} \cdot (x-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16}$

Die Talsohle mit $T(0|-2{,}25)$ ist Punkt dieser Tangentengleichung. Wir machen eine Punktprobe mit T und erhalten:

$-2{,}25 = \frac{104u}{(x^2+16)^2} \cdot (0-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16}$

$-\frac{104u^2}{(u^2+16)^2} + \frac{u^2-36}{u^2+16} + 2{,}25 = 0 \qquad | \quad \cdot (u^2+16)^2$

$-104u^2 + (u^2-36)(u^2+16) + 2{,}25(u^2+16)^2 = 0$

$-104u^2 + u^4 - 20u^2 - 576 + 2{,}25u^4 + 72u^2 + 576 = 0$

$3{,}25u^4 - 52u^2 = 0$

$u^2 \cdot (3{,}25u^2 - 52) = 0$

$u_{1,2} = 0;\ u_3 = -4;\ u_4 = +4$

Wir erhalten also 3 Stellen, in denen Tangenten an die Kurve gelegt werden können, die gleichzeitig durch den Punkt $T(0|-2{,}25)$ verlaufen. Dies ist aus obiger Grafik auch erkennbar, in der Talsohle bei $u_{1,2} = 0$ haben wir eine waagrechte Tangente, bei $u_4 = 4$ die Tangente zum rechten Ufer hin und wegen der Symmetrie der Funktion zum linken Ufer hin (nicht eingezeichnet) bei $u_3 = -4$.

Zur Lösung der Aufgabe (Entfernung des Beobachters vom Ufer) benötigen wir die Tangente an der Stelle $u_4 = 4$.

$t(x) = \frac{104 \cdot 4}{32^2} \cdot (x-4) + \frac{-20}{32} = 0{,}40625 \cdot (x-4) - 0{,}625 = 0{,}40625x - 2{,}25$

Die Tangente schneidet die Parallel zur x-Achse in Höhe der Augen des Beobachters. Schnittpunktbestimmung durch Gleichsetzung.

$t(x) \cap 1{,}5$

$0{,}40625x - 2{,}25 = 1{,}5 \Longrightarrow \ x \approx 9{,}23$

Dies ist die Entfernung des Beobachters von der Symmetrieachse (y-Achse), seine Entfernung vom rechten Ufer ergibt sich unter Abzug der rechten Nullstelle der Funktion.

$f(x) = 0 \Longrightarrow \ x_{1,2} = \pm 6$

$9{,}23 - 6 = 3{,}23$

Der Beobachter darf nicht mehr als $3{,}23\,m$ vom rechten Uferrand entfernt sein, um bei leerem Kanal die Kanalsohle noch sehen zu können.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne die Funktionsgleichungen der Tangente und der Normalen an das Schaubild von f an der Stelle $x_0 = u$. Gib auch die Koordinaten des Berührpunktes an.

a) $f(x) = 3x - 2x^2;\ \ u = -2$

b) $f(x) = x^3 - x^2;\ \ u = 4$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2(x-6);\ \ u = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2;\ \ u = \sqrt{3}$

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 + x;\ \ x \in \mathbb{R}$.

a) Berechne mit Hilfe der Ableitung die Steigung der Tangente und des Graphen von f an den Stellen x_0.

b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten und zeichne sie in die Grafik ein.

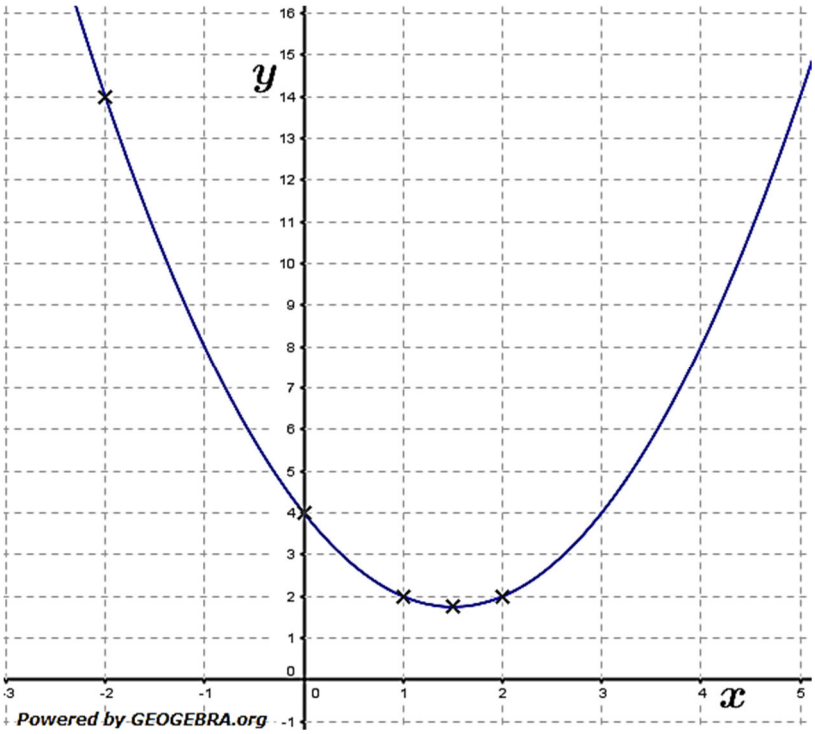
I) $x_0 = 0$

II) $x_0 = 1$

III) $x_0 = 1{,}5$

IV) $x_0 = 2$

V) $x_0 = -2$



Aufgabe A3

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3);\ \ x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale von K in $x_0 = 1$.

b) Welche Tangenten an K verlaufen parallel zur Geraden g mit $y = 2{,}25x - 1$?

c) Welche Tangenten an K stehen senkrecht auf der Geraden h mit $y = 1{,}5x + 4$?

d) In welchem Kurvenpunkt besitzt K eine waagrechte Tangente?

e) In welchem Kurvenpunkt verläuft die Normale von K parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = 2{,}4$?

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

Bestimmung von $f'(x)$ $\qquad f'(x) = 3 - 4x$

Bestimmung von $f(u)$ für $u = -2$ $\qquad f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -14$

Bestimmung von $f'(u)$ für $u = -2$ $\qquad f'(-2) = 3 - 4 \cdot (-2) = 11$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad t(x) = 11 \cdot (x + 2) - 14$

$t(x) = 11x + 8$

Aufstellung der Normalengleichung

$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{11} \cdot (x + 2) - 14$

$n(x) = -\frac{1}{11}x - \frac{156}{11}$

b) $f(x) = x^3 - x^2; \quad u = 4$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(4) = 3 \cdot 16 - 8 = 40$ $\qquad f(4) = 4^3 - 4^2 = 48$

$t(x) = 40(x - 4) + 48$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{40}(x - 4) + 48$

$t(x) = 40x - 112$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{40}x + \frac{481}{10}$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2(x - 6); \quad u = 1$ $\qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

$f'(1) = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$ $\qquad f(1) = \frac{5}{4}$

$t(x) = \frac{9}{4}(x - 1) + \frac{5}{4}$ $\qquad n(x) = -\frac{4}{9}(x - 1) + \frac{5}{4}$

$t(x) = \frac{9}{4}x - 1$ $\qquad n(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{61}{36}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2; \quad u = \sqrt{3}$ $\qquad f'(x) = x^3 - 3x$

$f'(\sqrt{3}) = 0$ $\qquad f(\sqrt{3}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$

$t(x) = -\frac{9}{4}$

Die Normale ist eine Parallele zur y-Achse selbst im Abstand $\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$

Lösung A2

$f(x) = (x - 2)^2 + x$ $\qquad f'(x) = 2(x - 2) + 1 = 2x - 3$

a) I) $f'(0) = -3$ $\quad$ II) $f'(1) = -1$ $\quad$ III) $f'(1{,}5) = 0$ $\quad$ IV) $f'(2) = 1$

V) $f'(-2) = -7$

b) I) $f(0) = 4$ $\qquad t(x) = -3x + 4$

II) $f(1) = 2$ $\qquad t(x) = -(x - 1) + 2$

$t(x) = -x + 3$

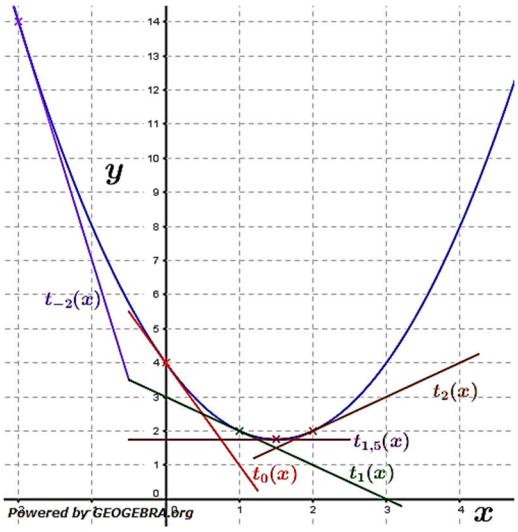
III) $f(1{,}5) = 1{,}75$ $\qquad t(x) = 1{,}75$

IV) $f(2) = 2$ $\qquad t(x) = (x - 2) + 2$

$t(x) = x$

V) $f(-2) = 14$ $\qquad t(x) = -7(x + 1) + 14$

$t(x) = -7x + 7$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

$f(1) = -\frac{1}{2}$ $\qquad f'(1) = -\frac{3}{4}$

$t(x) = -\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{2}$ $\qquad n(x) = \frac{4}{3}(x-1) - \frac{1}{2}$

$t(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ $\qquad n(x) = \frac{4}{3}x - \frac{11}{6}$

b) $f'(x) = 2{,}25 = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = 0$ $\quad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$ $\quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$

$f(3) = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} = 0$ $\qquad f(-1) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

$t_1(x) = 2{,}25(x-3) + 0$ $\qquad t_2(x) = 2{,}25(x-1) - 1$

$t_1(x) = 2{,}25x - 6{,}75$ $\qquad t_2(x) = 2{,}25x - 3{,}25$

c) $m_1 \cdot m_2 = -1$

$1{,}5 \cdot m_2 = -1 \implies m_2 = -\frac{2}{3}$

$f'(x) = -\frac{2}{3} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} = 0$ $\quad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2 - 2x + \frac{8}{9} = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = 1 \pm \frac{1}{3}$ $\quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{27} - \frac{4}{3} = -\frac{20}{27}$ $\qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{27}$

$t_1(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{20}{27}$ $\qquad t_2(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{7}{27}$

$t_1(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{27}$ $\qquad t_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{27}$

d) Waagrechte Tangente bedeutet $f'(x) = 0$.

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

$x \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = 0$ $\quad |$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$

$f(0) = 0; \quad f(2) = -1$

In den Punkten $P(0|0)$ und $Q(2|-1)$ besitzt K eine waagrechte Tangente.

e) $m_1 \cdot m_2 = -1$

$2{,}4 \cdot m_2 = -1 \implies m_2 = -\frac{5}{12}$

$f'(x) = -\frac{5}{12} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{12} = 0 \qquad | \quad \cdot\frac{4}{3}$

$x^2 - 2x + \frac{5}{9} = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = 1 \pm \frac{2}{3} \qquad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{25}{27} \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27}$

In den Punkten $P\left(\frac{5}{3}\middle|-\frac{25}{27}\right)$ und $Q\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{2}{27}\right)$ verläuft die Normale von K parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = 24$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne die Funktionsgleichungen der Tangente und der Normalen an das Schaubild von f an der Stelle $x_0 = u$. Gib auch die Koordinaten des Berührpunktes an.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $u = -2$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $u = 4$

c) $f(x) = x - \frac{1}{x^3}$; $u = 1$

d) $f(x) = -3x(x+1)(x-1) + 1$; $u = 0$

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechne mit Hilfe der Ableitung die Steigung der Tangente und des Graphen von f an den Stellen x_0.

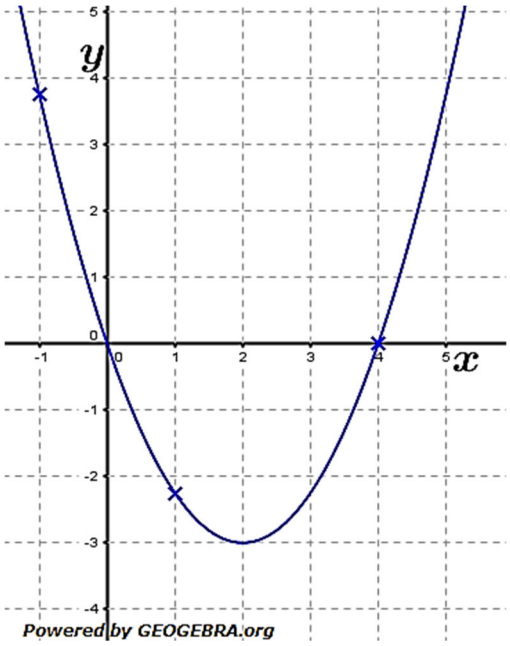
b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten und zeichne sie in die Grafik ein.

I) $x_0 = -1$

II) $x_0 = 1$

III) $x_0 = 2$

IV) $x_0 = 4$



Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + x;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Berechne mit Hilfe der Ableitung die Steigung der Normalen des Graphen von f an den Stellen x_0.

b) Bestimme die Gleichungen der Normalen und zeichne sie in die Grafik ein.

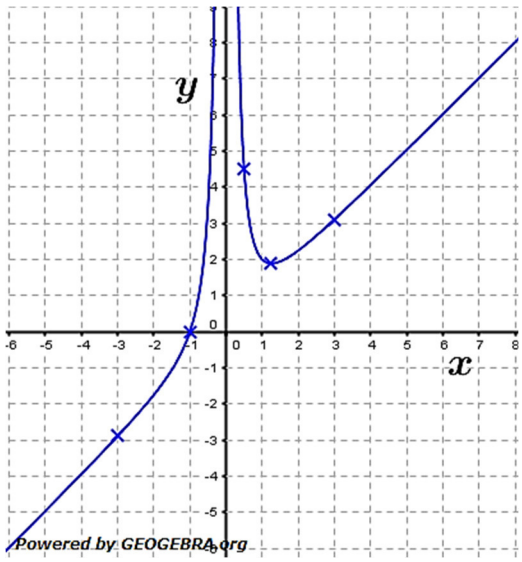
I) $x_0 = 0{,}5$

II) $x_0 = \sqrt[3]{2}$

III) $x_0 = 3$

IV) $x_0 = -1$

V) $x_0 = -3$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

Bestimmung von $f'(x)$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Bestimmung von $f(u)$ für $u = -2$ $\qquad f(-2) = -\frac{1}{2}$

Bestimmung von $f'(u)$ für $u = -2$ $\qquad f'(-2) = -\frac{1}{4}$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad t(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x + 2) - \frac{1}{2}$

$t(x) = -\frac{1}{4}x - 1$

Aufstellung der Normalengleichung

$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad n(x) = 4 \cdot (x + 2) - \frac{1}{2}$

$n(x) = 4x + 7{,}5$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad u = 4$ $\qquad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

$f'(4) = -\frac{1}{32}$ $\qquad f(4) = \frac{1}{16}$

$t(x) = -\frac{1}{32}(x - 4) + \frac{1}{16}$ $\qquad n(x) = 32(x - 4) + \frac{1}{16}$

$t(x) = -\frac{1}{32}x + \frac{3}{16}$ $\qquad n(x) = 32x - \frac{1023}{16}$

c) $f(x) = x - \frac{1}{x^3}; \quad u = 1$ $\qquad f'(x) = 1 + \frac{3}{x^4}$

$f'(1) = 4$ $\qquad f(1) = 0$

$t(x) = 4(x - 1) + 0$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{4}(x - 1) + 0$

$t(x) = 4x - 4$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

d) $f(x) = -3x(x + 1)(x - 1) + 1; \quad u = 0$ $\qquad f'^{(x)} = -9x^2 + 3$

$f'(0) = 3$ $\qquad f(0) = 1$

$t(x) = 3x + 1$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

Lösung A2

$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{2}x - 3$

a) I) $f'(-1) = -\frac{9}{2}$ II) $f'(1) = -\frac{3}{2}$ III) $f'(2) = 0$ IV) $f'(4) = 3$

V) $f'(-2) = -7$

b) I) $f(-1) = \frac{15}{4}$ $\qquad t_{-1}(x) = -\frac{9}{2}(x + 1) + \frac{15}{4}$

$t_{-1}(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{4}$

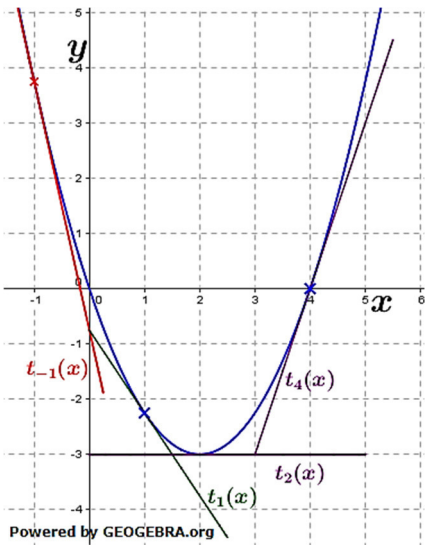
II) $f(1) = -\frac{9}{4}$ $\qquad t_1(x) = -\frac{3}{2} \cdot (x - 1) - \frac{9}{4}$

$t_1(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

III) $f(2) = -3$ $\qquad t_2(x) = -3$

IV) $f(4) = 0$ $\qquad t_4(x) = 3(x - 4)$

$t_4(x) = 3x - 12$



Lösung A2

$f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ $\qquad$ $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1$

a) I) $-\frac{1}{f'(0{,}5)} = \frac{1}{15}$ $\quad$ II) $f'(\sqrt[3]{2}) = 0$ $\quad$ III) $-\frac{1}{f'(3)} = -\frac{27}{25}$ $\quad$ IV) $-\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3}$

V) $-\frac{1}{f'(-3)} = -\frac{27}{29}$

b) I) $f(0{,}5) = \frac{9}{2}$ $\qquad$ $n_{0,5}(x) = \frac{1}{15}(x - 0{,}5) + \frac{9}{2}$

$n_{0,5}(x) = \frac{1}{15}x + \frac{67}{15}$

II) $f(\sqrt[3]{2}) = 1{,}89$ $\qquad$ $x = \sqrt[3]{2}$

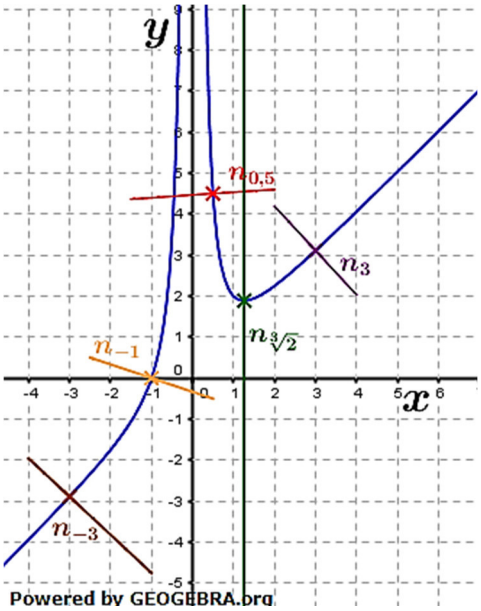
III) $f(3) = \frac{28}{9}$ $\qquad$ $n_3(x) = -\frac{27}{25}(x - 3) + \frac{28}{9}$

$n_3(x) = -\frac{27}{25}x + \frac{1429}{225}$

IV) $f(-1) = 0$ $\qquad$ $n_4(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

V) $f(-3) = -\frac{26}{9}$ $\qquad$ $n_5(x) = -\frac{27}{29}(x + 3) - \frac{26}{9}$

$n_5(x) = -\frac{27}{29}x - \frac{1483}{261}$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Gib die Gleichung der Tangente an K_f im Berührpunkt P an.

a) $f(x) = 2x^3 + x^2;\quad P\big(2\big|f(2)\big)$

b) $f(x) = (x^2+2)^2;\quad P(1|f(1))$

c) $f(x) = 4(x^2+x)^2;\quad P\big(1\big|f(1)\big)$

d) $f(x) = 2x^2 - 2;\quad P\big(1{,}5\big|f(1{,}5)\big)$

e) $f(x) = x^2 + 1;\quad P\big(0{,}5\big|f(0{,}5)\big)$

f) $f(x) = x^2;\quad P\big(-1\big|f(-1)\big)$

g) $f(x) = x^2 - x;\quad P\left(-\frac{1}{3}\middle|f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

Aufgabe A2

Gib die Gleichung der Tangente an K_f im Berührpunkt P an.

a) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5};\quad P\big(2\big|f(2)\big)$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+0{,}75};\quad P\big(-0{,}5\big|f(-0{,}5)\big)$

c) $f(x) = \sqrt{x} + x;\quad P\big(4\big|f(4)\big)$

Aufgabe A3

Bestimme die Funktionsgleichung der Normalen zu f durch Q.

a) $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + x - 4;\quad Q\big(1\big|f(1)\big)$

b) $f(x) = (x-4)(x+4);\quad Q(4|f(4))$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6;\quad Q\big(-2\big|f(-2)\big)$

d) $f(x) = x^3 - 2x + 2;\quad Q\big(-3\big|f(-3)\big)$

e) $f(x) = (x-4)(x+3);\quad Q\big(-4\big|f(-4)\big)$

f) $f(x) = 2x^2 - 1;\quad Q\big(0\big|f(0)\big)$

g) $f(x) = -x^2 + 3x + 3;\quad Q\big(-1\big|f(-1)\big)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

Bestimmung von $f'(x)$ — $f'(x) = 6x^2 + 2x$

Bestimmung von $f(2)$ — $f(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 = 20$

Bestimmung von $f'(2)$ — $f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 28$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$ — $t(x) = 28 \cdot (x-2) + 28$

$t(x) = 28x + 28$

b) $f(x) = (x^2+2)^2;\quad P(1|f(1))$ — $f'(x) = 2(x^2+2) \cdot 2x$

$f'(1) = 2(1+2) \cdot 1 = 6$ — $f(1) = (1+2)^2 = 9$

$t(x) = 6(x-1) + 9$

$t(x) = 6x + 3$

c) $f(x) = 4x^2(x^2+x)^2;\quad P(1|f(1))$ — $f(x) = 4x^2(x^4 + 2x^3 + x^2)$

$f(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^2$ — $f'(x) = 24x^5 + 40x^4 + 8x$

$f'(1) = 24 + 40 + 8 = 72$ — $f(1) = 16$

$t(x) = 72(x-1) + 16$

$t(x) = 72x - 56$

d) $f(x) = 2x^2 - 2;\quad P(1{,}5|f(1{,}5))$ — $f'(x) = 4x$

$f'(1{,}5) = 6$ — $f(1{,}5) = 2{,}5$

$t(x) = 6(x-1{,}5) + 2{,}5$

$t(x) = 6x - 6{,}5$

e) $f(x) = x^2 + 1;\quad P(0{,}5|f(0{,}5))$ — $f'(x) = 2x$

$f'(0{,}5) = 1$ — $f(0{,}5) = 1{,}25$

$t(x) = (x-0{,}5) + 1{,}25$

$t(x) = x + 0{,}75$

f) $f(x) = x^2;\quad P(-1|f(-1))$ — $f'(x) = 2x$

$f'(-1) = -2$ — $f(-1) = 1$

$t(x) = -2(x+1) + 1$

$t(x) = -2x - 1$

g) $f(x) = x^2 - x;\quad P\left(-\frac{1}{3}\middle|f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ — $f'(x) = 2x - 1$

$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$ — $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$t(x) = -\frac{5}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9}$

$t(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{9}$

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5};\quad P(2|f(2))$

Für die Ableitung: $f(x) = 2 \cdot (x^2+5)^{\frac{1}{2}}$

Bestimmung von $f'(x)$ — $f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

Bestimmung von $f(2)$ — $f(2) = 2 \cdot \sqrt{2^2+5} = 6$

Bestimmung von $f'(2)$ — $f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$ — $t(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-2) + 6$

$t(x) = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 0{,}75} = (x^2 + 0{,}75)^{\frac{1}{2}}$; $P\left(-0{,}5 \middle| f(-0{,}5)\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 0{,}75)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+0{,}75}}$

$f'(-0{,}5) = -\frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}25+0{,}75}} = -0{,}5$ $\qquad f(-0{,}5) = \sqrt{0{,}25 + 0{,}75} = 1$

$t(x) = -0{,}5(x + 0{,}5) + 1$

$t(x) = -0{,}5x + 0{,}75$

c) $f(x) = \sqrt{x} + x = x^{\frac{1}{2}} + x$; $P\left(4 \middle| f(4)\right)$

$f'^{(x)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$

$f'(4) = \frac{0{,}5}{2\sqrt{4}} + 1 = 1{,}125$ $\qquad f(4) = \sqrt{4} + 4 = 6$

$t(x) = 1{,}125(x - 4) + 6$

$t(x) = -1{,}125x + 1{,}5$

Lösung A3

Detaillierte Lösung für a)

Bestimmung von $f'(x)$ $\qquad f'(x) = 5x + 1$

Bestimmung von $f(1)$ $\qquad f(1) = \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 1 - 4 = -0{,}5$

Bestimmung von $f'(2)$ $\qquad f'(1) = 5 \cdot 1 + 1 = 6$

Aufstellung der Normalengleichung

$t(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + f(1)$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x - 1) - 0{,}5$

$n(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$

b) $f(x) = (x - 4)(x + 4)$

$= x^2 - 16$; $Q\left(4 \middle| f(4)\right)$ $\qquad f'(x) = 2x$

$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$ $\qquad f(4) = (4 - 4)(4 + 4) = 0$

$n(x) = -\frac{1}{8}(x - 4) + 0$

$n(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$; $P\left(-2 \middle| f(-2)\right)$ $\qquad f'(x) = -x - 4$

$f'(-2) = 4 - 4 = 0$ $\qquad f(-2) = -2 + 8 + 6 = 12$

Wegen $f'(-2) = 0$ (waagrechte Tangente) ist die Gleichung der Normalen $x = 12$

d) $f(x) = x^3 - 2x + 2$; $Q\left(-3 \middle| f(-3)\right)$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 2 = 25$ $\qquad f(-3) = -27 + 6 + 2 = -19$

$n(x) = -\frac{1}{25}(x + 3) - 19$

$n(x) = -\frac{1}{25}x - 19{,}12$

e) $f(x) = (x - 4)(x + 3)$

$= x^2 - x - 12$; $Q\left(-4 \middle| f(-4)\right)$ $\qquad f'(x) = 2x - 1$

$f'(-4) = -9$ $\qquad f(-4) = 0$

$n(x) = \frac{1}{9}(x + 4)$

$n(x) = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$

f) $f(x) = 2x^2 - 1$; $P\left(0 \middle| f(0)\right)$ $\qquad f'(x) = 4x$

$f'(0) = 0$ $\qquad f(0) = -1$

Wegen $f'(0) = 0$ (waagrechte Tangente) ist die Gleichung der Normalen $x = 0$

g) $f(x) = -x^2 + 3x + 3;\quad Q\big(-1\big|f(-1)\big)$ $\qquad f'(x) = -2x + 3$

$f'(-1) = 5$ $\qquad f(-1) = -1$

$n(x) = -\frac{1}{5}(x+1) - 1$

$n(x) = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Ist die Funktion f differenzierbar und $P(u|f(u))$ ist ein Punkt des Graphen von f, so lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in P:

a) $y = f'(u) \cdot x - u + f(u)$
b) $y = f(u) \cdot (x - u) + f'(u)$
c) $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Richtig ist:
a) ☐
b) ☐
c) ☐

Aufgabe A2

Entscheide, ob die folgenden Aussagen über Tangenten wahr oder falsch sind.

a) Die Gleichung einer Tangente kann man immer in der Form $y = m \cdot x + c$ schreiben.
b) Jede Tangente schneidet die x-Achse.
c) Die Tangente in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ schneidet nie den Graphen f.

	Wahr	Falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐
c)	☐	☐

Aufgabe A3

Geben Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_1 an.

a) $f(x) = 0{,}5x^2$ mit $x_1 = 1$.
b) $g(x) = \sin(x)$ mit $x_1 = \pi$.
c) $h(x) = e^{2x}$ mit $x_1 = 0$.

Tangentengleichung:
a) $y =$ _____ $\cdot x +$ _____
b) $y =$ _____ $\cdot x +$ _____
c) $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - 0{,}5x^2$.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1{,}5$.
b) Bestimme den Schnittpunkt S der Tangenten mit der x -Achse (auf drei Dezimalstellen gerundet).

a) $y =$ _____ $\cdot x +$ _____
b) $S($ | $)$

Aufgabe A5

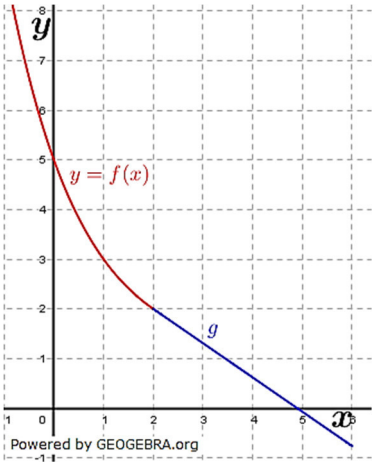
Die Gleichung der Tangenten an den Graphen einer Funktion f im Punkt P lautet $y = 3x + 4$. Entscheide, welches die zugehörige Normalengleichung im Punkt P sein könnte.

a) ☐ $y = -3x + 4$
b) ☐ $y = \frac{1}{3}x - 2$
c) ☐ $y = -\frac{1}{3}x + 2$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A6

Das Schaubild zeigt für $x \leq 2$ den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5^{x-2} + 1$. Welche Gleichung gehört dann zur Geraden g?



a) ☐ $g(x) = -2{,}68x + 7{,}3$

b) ☐ $g(x) = -2{,}68x + 2{,}57$

c) ☐ $g(x) = -0{,}693x + 3{,}39$

Quelle alle Aufgaben in diesem Blatt: WADI-Arbeitsblätter Kursstufe Aufgaben Nr. C36 1-6

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Richtig ist c) ☑ $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
Dies ist die Punkt-Steigungsformel einer Geraden.

Lösung A2

a) Die Gleichung einer Tangente kann man immer in der Form $y = m \cdot x + c$ schreiben. (Selbst waagrechte Tangenten mit $m = 0$ sind in dieser Form möglich mit $y = c$.=
b) Jede Tangente schneidet die x-Achse. (Waagrechte Tangenten schneiden die x-Achse nicht.)
c) Die Tangente in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ schneidet nie den Graphen f. (Als Gegenbeispiel sei hier die Wendetangenten ganzrationaler Funktionen angeführt.)

	Wahr	Falsch
a)	☑	
b)	☐	☑
c)	☐	☑

Lösung A3

a) $f(x) = 0{,}5x^2$ mit $x_1 = 1$.
b) $g(x) = \sin(x)$ mit $x_1 = \pi$.
c) $h(x) = e^{2x}$ mit $x_1 = 0$.

a) $y = x + \left(-\frac{1}{2}\right)$
b) $y = -x + \pi$
c) $y = 2 \cdot x + 1$

Lösung A4

a) Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1{,}5$.
b) Schnittpunkt S der Tangente mit der x-Achse (auf drei Dezimalstellen gerundet).

a) $y = -1{,}5 \cdot x + 5{,}125$
b) $S\,(3{,}417\,|\,0)$

Lösung A5

Die Gleichung der Tangenten an den Graphen einer Funktion f im Punkt P lautet $y = 3x + 4$. Die zugehörige Normalengleichung im Punkt P lautet:
(Wegen der Orthogonalitätsbedingung $m_t \cdot m_n = -1$

c) ☑ $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Lösung A6

c) ☑ $g(x) = -0{,}693x + 3{,}39$ ist richtig, denn aus der Graphik lesen wir ab, dass die Steigung der Geraden g etwa $-\frac{2}{3}$ ist.

Aufgabe A1

Berechne das Schaubild der Tangente und der Normalen an das Schaubild von f an der Stelle $x_0 = u$. Gib auch die Koordinaten des Berührpunktes an.

a) $f(x) = x - 2e^{0,25x}$; $u = 4$

b) $f(x) = \frac{1}{2}sin(3x) + 1$; $u = \frac{\pi}{6}$

c) $f(x) = 3 - 2e^{-x}$; $u = 0$

d) $f(x) = 2\cos(2x) + 2$; $u = \frac{\pi}{4}$

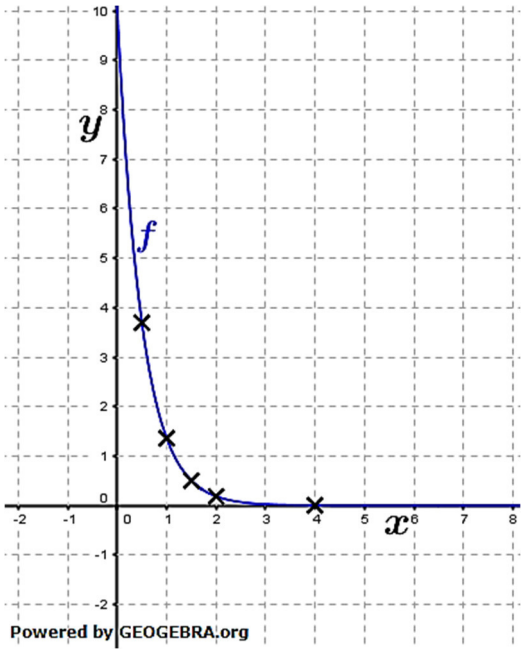
Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x+3}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechne mit Hilfe der Ableitung die Steigung der Tangente und des Graphen von f an den Stellen x_0.

b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten und zeichne sie in die Grafik ein.

I) $x_0 = 0,5$
II) $x_0 = 1$
III) $x_0 = 1,5$
IV) $x_0 = 2$
V) $x_0 = 4$



Aufgabe A3

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$ und $g(x) = -4x + 5$.

a) Berechne die Stellen, an denen die Graphen von f und g parallele Tangenten haben.

b) In welchen Punkten stehen die Tangenten des Graphen von f senkrecht zum Graphen von g?
Tipp: Zeichne zunächst eine Skizze der Graphen von f und g in ein geeignetes Koordinatensystem.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f(x) = x - 2e^{0,25x}; \quad u = 4$ $\qquad f'(x) = 1 - 0,5e^{0,25x}$

$f(4) = 4 - 2e$ $\qquad f'(4) = 1 - 0,5e$

$t(x) = (1 - 0,5e)(x - 4) + 4 - 2e$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{1-0,5e}(x - 4) + 4 - 2e$

$t(x) = (1 - 0,5e) \cdot x$ $\qquad n(x) = \frac{1}{0,5e-1}x + \frac{8-4e+e^2}{1-0,5e}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}sin(3x) + 1; \quad u = \frac{\pi}{6}$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{2}cos(3x)$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

$t(x) = \frac{3}{2}$ $\qquad x = \frac{\pi}{6}$

c) $f(x) = 3 - 2e^{-x}; \quad u = 0$ $\qquad f'(x) = 2e^{-x}$

$f(0) = 1$ $\qquad f'(0) = 2$

$t(x) = 2x + 1$ $\qquad n(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

d) $f(x) = 2\,cos(2x) + 2; \quad u = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -4sin(2x)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$

$t(x) = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$ $\qquad n(x) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

$t(x) = -4 \cdot x + 2 + \pi$ $\qquad n(x) = \frac{1}{4}x + 2 - \frac{\pi}{16}$

Lösung A2

$f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x+3}$ $\qquad f'(x) = -e^{-2x+3}$

a) I) $f'(0,5) = -e^2$ II) $f'(1) = -e$ III) $f'(1,5) = -1$ IV) $f'(2) = -\frac{1}{e}$

V) $f'(4) = -\frac{1}{e^5}$

b) I) $f(0,5) = \frac{1}{2}e^2$ $\qquad t_{0,5}(x) = -e^2(x - 0,5) + \frac{1}{2}e^2$

$t_{0,5}(x) = -e^2x + e^2$

II) $f(1) = \frac{1}{2}e$ $\qquad t_1(x) = -e \cdot (x - 1) + \frac{1}{2}e$

$t_1(x) = -ex + \frac{3}{2}e$

III) $f(1,5) = \frac{1}{2}$ $\qquad t_{1,5}(x) = -(x - 1,5) + \frac{1}{2}$

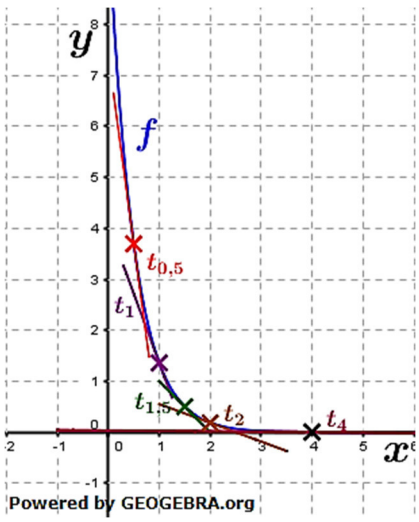
$t_{1,5}(x) = -x + 2$

IV) $f(2) = \frac{1}{2e}$ $\qquad t_2(x) = -\frac{1}{e}(x - 2) + \frac{1}{2e}$

$t_2(x) = -\frac{1}{e}x + \frac{5}{2e}$

V) $f(4) = \frac{1}{2e^5}$ $\qquad t_4(x) = -\frac{1}{e^5}(x - 4) + \frac{1}{2e^5}$

$t_4(x) = -\frac{1}{e^5}x + \frac{9}{2e^5}$



Lösung A3

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

$g(x) = -4x + 5$ $\qquad g'(x) = -4$

a) Stellen gleicher Steigung mithilfe von $f'(x) \cap g'(x)$

$3x^2 - 6x - 1 = -4$

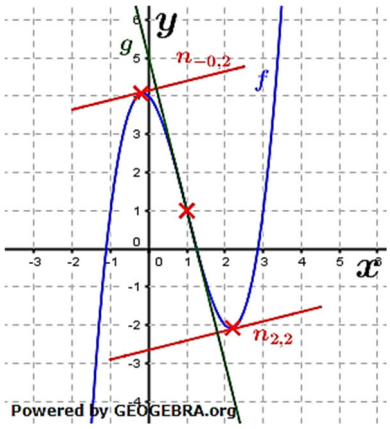
$3x^2 - 6x + 3 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} \qquad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = 1$

An der Stelle $x_1 = 1$ haben die Graphen von f und g parallele Tangenten. Wie aus der Grafik ersichtlich, ist g sogar Tangente an f in $x_1 = 1$.



b) Wegen $m_1 \cdot m_2 = -1$, müssen die Tangenten des Graphen von f, die senkrecht auf dem Graphen von 3 stehen, die Steigung $f'(x) = -\frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{4}$ haben.

$3x^2 - 6x - 1 = \frac{1}{4}$

$3x^2 - 6x - 1{,}25 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - 2x - \frac{5}{12} = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{12}} = 1 \pm \sqrt{\frac{17}{12}} \qquad | \quad p/q$-Formel

$= 1 \pm 1{,}19$

$x_1 \approx 2{,}2; \quad x_2 \approx -0{,}2$

$f(2{,}2) \approx -2{,}1; \quad f(-0{,}2) \approx 4{,}1$

$n_{2,2}(x) = \frac{1}{4}(x - 2{,}2) - 2{,}1 = \frac{1}{4}x - 2{,}65$

$n_{-0,2}(x) = \frac{1}{4}(x + 0{,}2) + 4{,}1 = \frac{1}{4}x + 4{,}15$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Gib die Gleichung der Tangente an K_f im Berührpunkt P an.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $P(1|f(1))$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; $P(1|f(1))$

c) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$; $P(2|f(2))$

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f und die Steigung einer Tangente an K_f. Prüfe, ob nur eine Tangente oder mehrere Tangenten mit dieser Steigung existieren. Gib alle möglichen Tangentengleichungen an.

a) $f(x) = 2x^3$; $m_t = 6$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$; $m_t = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $m_t = 4$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1}$; $m_t = 1$

e) $f(x) = \sqrt{x} + x$; $m_t = 2$

Aufgabe A3

Bestimme die Gleichung der Normalen von h welche senkrecht zur Geraden g verläuft.

a) $h(x) = 1{,}5x^2 + x - 2$
$g(x) = 7x + 4$

b) $h(x) = 2x^2 + 5x - 3$
$g(x) = 3x - 2$

c) $h(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3{,}5x + 6$
$g(x) = -\frac{1}{2}x - 11$

d) $h(x) = x^2 - x + 1$
$g(x) = 1{,}5x - 2{,}5$

e) $h(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$
$g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

Aufgabe A4

Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen im Wendepunkt des Schaubilds f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

Funktion - Berührpunkt $f(x) = \frac{x+1}{x}; \quad P\left(1 \middle| f(1)\right)$

Bestimmung von $f'(x)$ (Quotientenregel) $f'(x) = \frac{x-(x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Bestimmung von $f(1)$ $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$

Bestimmung von $f'(1)$ $f'^{(1)} = -\frac{1}{1} = -1$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$ $t(x) = -(x-1) + 2$

$t(x) = -x + 3$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}; \quad P\left(1 \middle| f(1)\right)$ $f'(x) = \frac{2x(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$ $f'(1) = \frac{1}{2}$

$t(x) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$ $t(x) = \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}; \quad P\left(2 \middle| f(2)\right)$ $f'(x) = \frac{2x(x+2)^2 - x^2 \cdot 2 \cdot (x+2)}{(x+2)^4} = \frac{4x}{(x+2)^3}$

$f(2) = \frac{1}{4}$ $f'(2) = \frac{1}{8}$

$t(x) = \frac{1}{8}(x-2) + \frac{1}{4}$ $t(x) = \frac{1}{8}x$

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a)

Funktion - Steigung $f(x) = 2x^3; \quad m_t = 6$

Bestimmung von $f'(x)$ $f'(x) = 6x$

Gleichsetzung $f'(x) = m_t$

$6x = 6 \quad | \quad :6$

$x = 1$

Es gibt nur eine einzige Tangente.

Bestimmung von $f(1)$ $f(1) = 2$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$ $t(x) = 6(x-1) + 2$

$t(x) = 6x - 4$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x; \quad m_t = \frac{1}{2}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}$

$x = -1$

$f(-1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ $f'(-1) = \frac{1}{2}$

$t(x) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{4}$

$t(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}; \quad m_t = 4$ $f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$\frac{1}{(x+1)^2} = 4$

$(x+1)^2 = \frac{1}{4} \quad | \quad \sqrt{}$

$|x+1| = \frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = -\frac{3}{2}$

Es gibt zwei Tangenten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-0{,}5}{-0{,}5+1} = -1$ $\qquad$ $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-1{,}5}{-1{,}5+1} = 3$

$t_1(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1$ $\qquad$ $t_2(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right) + 3$

$t_1(x) = 4x + 1$ $\qquad$ $t_2(x) = 4x + 9$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1}; \quad m_t = 1$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

$\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = 1$

$2\sqrt{2x+1} = 1 \quad | \quad ^2$

$4(2x+1) = 1$

$8x + 4 = 1$

$8x = -3$

$x = -\frac{3}{8}$

$f\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{6}{8}+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$t(x) = \left(x + \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4}$

$t(x) = x + \frac{5}{8}$

e) $f(x) = \sqrt{x} + x; \quad m_t = 2$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 = 2$

$2\sqrt{x} = 1 \quad | \quad ^2$

$4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$t(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}$

$t(x) = 2x + \frac{1}{4}$

Lösung A3

Detaillierte Lösung für a)

Funktion $\qquad$ $h(x) = 1{,}5x^2 + x - 2$

Steigung Gerade $g(x) = 7x + 4$ $\qquad$ $m_g = 7$

Steigung der Normalen $(m_g \cdot m_n = -1)$ $\qquad$ $m_N = -\frac{1}{7}$

Bestimmung von $f'(x)$ $\qquad$ $h'(x) = 3x + 1$

Gleichsetzung $f'(x) = m_g$

$3x + 1 = 7 \quad | \quad -1; : 3$

$x = 2$

Bestimmung von $f(2)$ $\qquad$ $h(2) = 1{,}5 \cdot (2)^2 + 2 - 2 = 6$

Aufstellung der Normalengleichung

$n(x) = -\frac{1}{7} \cdot (x - 2) + 6$

$n(x) = -\frac{1}{7}x + \frac{44}{7}$

b) $h(x) = 2x^2 + 5x - 3$ $\qquad g(x) = 3x - 2$

$m_g = 3$ $\qquad m_N = -\frac{1}{3}$

$h'(x) = 4x + 5$

$4x + 5 = 3 \quad | \quad -5;\ :4$

$x = -\frac{1}{2}$

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -5$

$n(x) = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5$

$n(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{31}{6}$

c) $h(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3{,}5x + 6$ $\qquad g(x) = -\frac{1}{2}x - 11$

$m_g = -\frac{1}{2}$ $\qquad m_N = 2$

$h'(x) = \frac{3}{2}x - 3{,}5$

$\frac{3}{2}x - 3{,}5 = -\frac{1}{2} \quad | \quad +3{,}5;\ \cdot 2$

$3x = 6$

$x = 3$

$h(3) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 - 3{,}5 \cdot 2 + 6 = 2$

$n(x) = 2(x - 3) + 2$

$n(x) = 2x - 4$

d) $h(x) = x^2 - x + 1$ $\qquad g(x) = 1{,}5x - 2$

$m_g = \frac{3}{2}$ $\qquad m_N = -\frac{2}{3}$

$h'(x) = 2x - 1$

$2x - 1 = \frac{3}{2} \quad | \quad +1;\ :2$

$x = \frac{5}{4}$

$h\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} + 1 = \frac{21}{16}$

$n(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{21}{16}$

$n(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{103}{48}$

e) $h(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

$m_g = \frac{1}{4}$ $\qquad m_N = -4$

$h'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} \quad | \quad -\frac{1}{4};\ \cdot 2$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = 4; \quad x_2 = -1$

Es gibt zwei Normalen:

$h(4) = \frac{32}{3} - 12 - 7 + \frac{1}{4} = -\frac{97}{12}$ $\qquad h(-1) = -\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$

$n_1(x) = -4(x - 4) - \frac{97}{12}$ $\qquad n_2(x) = -4(x + 1) + \frac{13}{12}$

$n_1(x) = -4x + \frac{95}{12}$ $\qquad n_2(x) = -4x + \frac{25}{12}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A4

$f(x) = x^3 - 3x^2$

Wendepunkte über $f''(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ $\qquad$ $f''(x) = 6x - 6$

$f'''(x) = 6$

$f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0 \;\; => \;\; x = 1$

$f'''(1) \neq 0$ $\qquad$ | $\quad x_0 = 1$ ist eine Wendestelle.

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2$ $\qquad$ $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 = m_t$

$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{3}$

$t(x) = -3(x-1) - 2$ $\qquad$ $n(x) = \frac{1}{3}(x-1) - 2$

$t(x) = -3x + 1$ $\qquad$ $n(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion $3x^3 - 3x$. Bestimme die Normale im Wendepunkt.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Bestimme die Gleichung der Normalen,

a) welche parallel zur Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist.

b) welche orthogonal zu der Geraden $y = -4x + 4$ ist.

Aufgabe A3

Bestimme die Gleichung der Tangenten an f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$, die die Steigung $m = 2$ besitzt. Bestimme auch diejenige Tangente, die parallel zur Geraden $y = -4x + 10$ verläuft.

Aufgabe A4

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3);\ x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale an K in $x_0 = 1$.

b) Welche Tangenten an K verlaufen parallel zur Geraden g mit $y = 2{,}25x - 1$?

c) Welche Tangenten an K stehen senkrecht auf der Geraden h mit $y = 1{,}5x + 4$?

d) In welchen Kurvenpunkten besitzt K eine waagrechte Tangente?

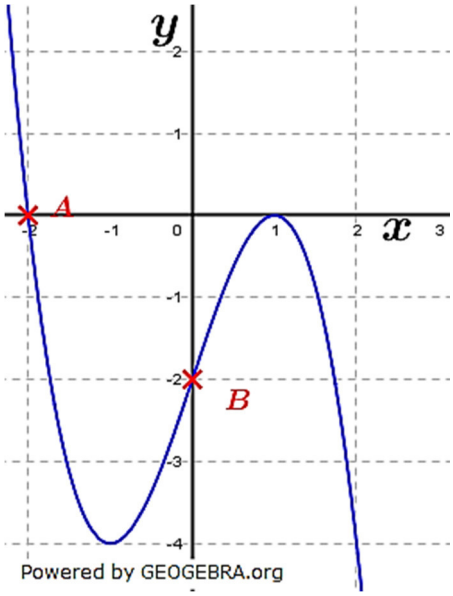
e) In welchen Kurvenpunkten verläuft die Normale von K parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = 2{,}4$?

Aufgabe A5

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -(x-1)^2(2+x);\ x \in \mathbb{R}$.

a) K schneidet die Koordinatenachsen in A und B. Eine Tangente an K ist parallel zur Geraden durch A und B.
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte auf zwei Dezimalstellen gerundet.

b) Unter welchem Winkel schneidet K die x –Achse in A?



Lösung A1

$f(x) = 3x^3 - 3x$
$f'(x) = 9x^2 - 3$
$f''(x) = 18x$
Bestimmung der Wendestelle über $f''(x) = 0$:
$18x = 0$
$x = 0$
y-Koordinate des Wendepunktes über $f(0)$:
$f(0) = 0$
$WP(0|0)$
Bestimmung der Steigung des Wendepunktes über $f'(0)$:
$f'(0) = 9 \cdot 0 - 3 = -3$
Aufstellung der Normalengleichung über die Punkt-Steigungs-Formel:
$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad$ $n(x) = -\frac{1}{-3}(x + 3) + 0$
$n(x) = \frac{1}{3}x + 1$

Lösung A2

$f(x) = x^2 - 6x + 5$
$f'(x) = 2x - 6$

a) Parallelität bedeutet, dass die Steigungen von gegebener Gerade und gesuchter Normalen den gleichen Wert haben müssen.
Die gegebene Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ hat die Steigung $m_g = \frac{1}{2}$. Somit muss die Steigung der Normalen $m_n = \frac{1}{2}$ sein. Da eine Normale orthogonal auf der Tangente stehen muss, muss $m_t = -2$ sein wegen $m_t \cdot m_n = -1$. Somit ist auch $f'(x) = -2$.
$2x - 6 = -2$ $\qquad$ | $+6$
$2x = 4 \;\; => \;\; x = 2$
$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$
Kurvenpunkt $P(2|-3)$
Gleichung der Normalen über die Punktsteigungsformel:
$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad$ $n(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) - 3$
$n(x) = \frac{1}{2}x - 4$

b) Wegen der Angabe einer Normalen, die orthogonal auf einer Geraden stehen soll, muss diese Gerade parallel zu einer Tangente der Kurve sein.
Die gegebene Gerade $y = -4x + 4$ hat die Steigung $m_g = -4$, also muss auch $f'(x) = -4$ sein.
$2x - 6 = -4$ $\qquad$ | $+6$
$2x = 2 \;\; => \;\; x = 1$
$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$
Kurvenpunkt $P(1|0)$
Da eine Normale orthogonal auf der Tangente stehen muss, muss $m_n = \frac{1}{4}$ sein wegen $m_t \cdot m_n = -1$.
Gleichung der Normalen über die Punktsteigungsformel:
$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ $\qquad$ $n(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 1) + 0$
$n(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

Lösung A3

$f(x) = x^2 - 4x + 1$
$f'(x) = 2x - 4$
Tangente mit $m_t = 2 = f'(x)$:
$2x - 4 = 2 \qquad | \quad +4$
$2x = 6; \;\; => \;\; x = 3$
$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$
Kurvenpunkt $P(3|-2)$
Gleichung der Tangente über die Punktsteigungsformel:
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u) \qquad t(x) = 2 \cdot (x - 3) - 2$
$t(x) = 2x - 8$

Eine Tangente parallel zu $y = -4x + 10$ muss die Steigung $m_t = m_g = f'(x) = -4$ haben:
$2x - 4 = -4 \qquad | \quad +4$
$2x = 0; \;\; => \;\; x = 0$
$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$
Kurvenpunkt $P(0|1)$
Gleichung der Tangente über die Punktsteigungsformel:
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u) \qquad t(x) = -4 \cdot (x - 0) + 1$
$t(x) = -4x + 1$

Lösung A4

$f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$

a) Tangente und Normale in $x_0 = 1$:
$m_t = f'(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$
$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{4}{3}$
$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^2(1 - 3) = -\frac{1}{2}$
Kurvenpunkt $P\left(1\middle|-\frac{1}{2}\right)$
$t(x) = -\frac{3}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$
$n(x) = \frac{4}{3}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}x - \frac{11}{6}$

b) Tangenten parallel zu $y = 2{,}25x - 1$:
Die Tangenten müssen die Steigung $m_t = f'(x) = 2{,}25$ haben:
$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 2{,}25 \qquad | \quad -2{,}25$
$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2{,}25 = 0 \qquad | \quad \cdot 4$
$3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad | \quad :3$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1 + 3} \qquad | \quad$ *p/q-Formel*
$x_{1,2} = +1 \pm 2$
$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$
$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^2(3 - 3) = 0 \qquad f(-1) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^2(-1 - 3) = -1$
Kurvenpunkte $P_1(3|0)$ und $P_2(-1|-1)$.
$t_1(x) = 2{,}25(x - 3) = 2{,}25x - 6{,}75$
$t_2(x) = 2{,}25(x + 1) - 1 = 2{,}25x + 1{,}25$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) Die Tangente senkrecht auf $y = 2{,}25x - 1$ muss die Steigung $m_t = f'(x) = -\frac{1}{1{,}5} = -\frac{2}{3}$ haben.

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{2}{3}$ | $+\frac{2}{3}$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} = 0$ | $\cdot 12$

$9x^2 - 18x + 8 = 0$ | $:9$

$x^2 - 2x + \frac{8}{9} = 0$

$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}}$ | *p/q-Formel*

$x_{1,2} = +1 \pm \frac{1}{3}$

$x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{4}{3} - 3\right) = -\frac{20}{27}$ $\qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 3\right) = -\frac{7}{27}$

Kurvenpunkte $P_1\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{20}{27}\right)$ und $P_2\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{7}{27}\right)$.

$t_1(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{20}{27} = \frac{3}{2}x - \frac{74}{27}$

$t_2(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{7}{27} = \frac{3}{2}x - \frac{37}{27}$

d) Waagrechte Tangenten haben die Steigung $m_t = f'(x) = 0$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

$x \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$

$f(0) = \frac{1}{4} \cdot (0)^2(0 - 3) = 0$ $\qquad f(2) = \frac{1}{4} \cdot (2)^2(2 - 3) = -1$

Kurvenpunkte mit waagrechter Tangente $P_1(0|0)$ und $P_2(2|-1)$.

e) Die parallele Normale muss ebenfalls die Steigung $m_n = 2{,}4$ haben. Somit muss $m_t = -\frac{1}{m_n} = -\frac{1}{2{,}4} = -\frac{5}{12} = f'(x)$ sein.

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{5}{12}$ | $+\frac{5}{12}$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{12} = 0$ | $\cdot 12$

$9x^2 - 18x + 5 = 0$ | $:9$

$x^2 - 2x + \frac{5}{9} = 0$

$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1 - \frac{5}{9}}$ | *p/q-Formel*

$x_{1,2} = +1 \pm \frac{2}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{5}{3} - 3\right) = -\frac{25}{27}$ $\qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{27}$

In den Kurvenpunkten $P_1\left(\frac{5}{3}\middle|-\frac{25}{27}\right)$ bzw. $P_2\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{2}{27}\right)$ verläuft die Normale von K parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = 2{,}4$.

Lösung A5

$f(x) = -(x-1)^2(2+x) = -x^3 + 3x - 2$
$f'(x) = -3x^2 + 3$

a) Tangente parallel zur Geraden durch A und B.

$A(-2|0);\ B(0|-2)$ | abgelesen aus Graphik

$m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-0}{0-(-2)} = -1$

Tangentensteigung $m_t = f'(x) = -1$

$-3x^2 + 3 = -1$ | -3

$-3x^2 = -4$

$3x^2 = 4$ | $:3$

$x^2 = \frac{4}{3}$ | $\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15;\quad x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1{,}15$

$f(1{,}15) = -(1{,}15-1)^2(2+1{,}15) = -0{,}07$

$f(-1{,}15) = -(-1{,}15-1)^2(2-1{,}15) = -3{,}93$

Die Berührpunkte haben die Koordinaten $P_1(1{,}15|-0{,}07)$ bzw. $P_2(-1{,}15|-3{,}93)$.

b) Winkel in der Nullstelle $A(-2|0)$:

Schnittwinkel mit der x-Achse über $m = tan(\alpha) = f'(-2)$.

$f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 3 = -9$

$tan(\alpha) = -9$

$\alpha = arctan(-9) = -83{,}66°$

Als Schnittwinkel mit der x-Achse zählt jedoch der Winkel, den die x-Achse ***linksdrehend*** mit der Geraden einschließt. Wegen des negativen Tangens muss hier die Ergänzung zu $180°$ gebildet werden:

$\alpha^* = 180° - 83{,}66° = 96{,}34°$

K schneidet die x –Achse in A unter $96{,}34°$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

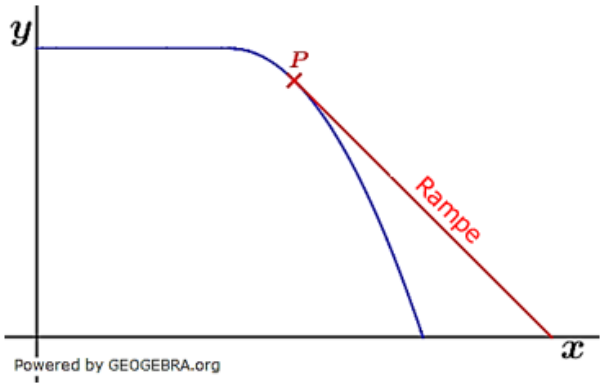
K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 3);\ x \in \mathbb{R}$.
Es gibt zwei Tangenten an K, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden verlaufen. Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte exakt.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2;\ x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K.
t ist die Tangenten an K in $x = 2$, n ist die Normale an K in $P(-1|f(-1))$.
Bestimme die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von t und n.

Aufgabe A3

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Erdhügels.
Für $3 \le x \le 6$ wird die Berandung beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$.
Im Punkt $P(4|f(4))$ wurde tangential eine Rampe angelegt.
Der Herstelle eines Geländewagens gibt den maximalen Steigungswinkel von $42°$ an.
Kommt der Geländewagen die Rampe hoch?



Aufgabe A4

Zeige, dass sich die Graphen von f und g berühren und bestimme die Koordinaten des Berührpunktes P sowie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente.

a) $f(x) = x^2 - 3;\ g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6;\ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{5}{6}x$

c) $f(x) = \frac{5}{x} + 2;\ g(x) = x^3 + 4x^2 - 6$

d) $f(x) = sin(x) - 2;\ g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x - 2$

e) $f(x) = cos(x);\ g(x) = \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - 1$

f) $f(x) = e^x - 4;\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

Aufgabe A5

Bestimme die Parameter a und b im Term der Funktion f so, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle x_0 berühren.

a) $f(x) = ax^2 + b;\ g(x) = -x^2 + 3x + \frac{3}{2};\ x_0 = 1$

b) $f(x) = a \cdot e^x + b;\ g(x) = x^3 + 2x - 1;\ x_0 = 0$

c) $f(x) = a\sqrt{x} + bx;\ g(x) = \frac{1}{972}x^3 - \frac{1}{12}x;\ x_0 = 9$

d) $f(x) = acos(x) + b;\ g(x) = \frac{1}{\pi}x^2 - 4x - 1 + \frac{7\pi}{4};\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 3) = \frac{1}{3}x^3 - x$

$f'(x) = x^2 - 1$

Gleichung der ersten Winkelhalbierenden: $y = x$ mit $m = 1$.

$f'(x) = 1$:

$x^2 - 1 = 1$

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

Die Koordinaten der Berührpunkte sind $B_1\left(\sqrt{2}\middle|-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$ und $B_2\left(-\sqrt{2}\middle|\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$.

Lösung A2

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2$

$f'(x) = 2x^3 - 3x^2$

$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 2^3 - 2 = -2$

$f'(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 4$

$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 2 = \frac{1}{2} + 1 - 2 = -0{,}5$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -2 - 3 = -5$

Tangente:

$t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

$t(x) = 4(x - 2) - 2 = 4x - 10$

Normale:

$n(x) = -\frac{1}{f'(-1)} \cdot (x + 1) + f(-1)$

$n(x) = \frac{1}{5}(x + 1) - 0{,}5 = 0{,}2x - 0{,}3$

$t(x) \cap n(x)$

$4x - 10 = 0{,}2x - 0{,}3$

$3{,}8x = 9{,}7$

$x = \frac{9{,}7}{3{,}8} = \frac{97}{38}$

$t\left(\frac{97}{38}\right) = 4 \cdot \frac{97}{38} - 10 = \frac{4}{19}$

Der Schnittpunkt von t und n hat die Koordinaten $S\left(\frac{97}{38}\middle|\frac{4}{19}\right)$.

Lösung A3

$f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = 3 - x$

$f(4) = 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 4$

$f'(4) = 3 - 4 = -1$

$t(\alpha) = m = -1 \quad => \quad \alpha = 45°$

Der Geländewagen kommt ***nicht*** die Rampe hoch.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A4

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = x^2 - 3;\ \ g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$

Berührpunkt mit gemeinsamer Tangente bedeutet, dass die Steigungen der Graphen der beiden Funktionen gleich groß sind, also $f'(x) = g'(x)$.

$f'(x) = 2x;\ \ g'(x) = -x + 6$
$f'(x) \cap g'(x)$
$2x = -x + 6$
$3x = 6$
$x = 2$

An der Stelle $x_0 = 2$ haben die Graphen der beiden Funktionen dieselbe Steigung.
Es ist noch zu prüfen, ob diese Stelle auch Stelle eines gemeinsamen Punktes ist:

$f(2) = 4 - 3 = 1;\ \ g(2) = -2 + 12 - 9 = 1$

Die beiden Graphen berühren sich im Punkt $B(2|1)$.
Tangente:

$f'(2) = 4$
$t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$
$t(x) = 4(x - 2) + 1 = 4x - 7$

Alternative Lösung:
Wir bilden $f(x) \cap g(x)$, erhalten wir dabei nur eine Lösung, muss der Schnittpunkt ein Berührpunkt sein.

$f(x) \cap g(x)$
$x^2 - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$
$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0 \qquad | \cdot \frac{2}{3}$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2$

Es gibt nur einen einzAigen Schnittpunkt, der somit ein Berührpunkt sein muss. Weiter wie oben.

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6;\ \ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{5}{6}x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \ g'(x) = \frac{1}{9}x - \frac{5}{6}$
$f'(x) \cap g'(x)$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{9}x - \frac{5}{6} \qquad |\ ^2$
$\frac{1}{4x} = \frac{1}{81}x^2 - \frac{10}{54}x + \frac{25}{36} \qquad | \cdot 324x$
$81 = 4x^3 - 6x^2 + 225x$
$4x^3 - 6x^2 + 225x - 81 = 0$
WTR
$x = 9$
$f(9) = 3 - 6 = -3;\ \ g(9) = 4{,}5 - 7{,}5 = -3$
Berührpunkt $B(9|-3)$
$f'(9) = \frac{1}{6}$
$t(x) = f'(9) \cdot (x - 9) + f(9)$
$t(x) = \frac{1}{6}(x - 9) - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{9}{2}$

c) $f(x) = \frac{5}{x} + 2;\ \ g(x) = x^3 + 4x^2 - 6$

$f'(x) = -\frac{5}{x^2};\ \ g'(x) = 3x^2 + 8x$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-\frac{5}{x^2} = 3x^2 + 8x \qquad | \quad \cdot x^2$

$-5 = 3x^4 + 8x^3$

$3x^4 + 8x^3 + 5 = 0$

$x_1 \overset{WTR}{=} -1;\quad x_2 \overset{WTR}{\approx} -2{,}57$

$f(-1) = -3;\ \ g(-1) = -3 \qquad f(-2{,}57) \overset{WTR}{\approx} 0{,}054;\quad g(-2{,}57) = 3{,}445$

Berührpunkt $B(-1|-3)$

$f'(-1) = -5$

$t(x) = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$

$t(x) = -5(x+1) - 3 = -5x - 8$

d) $f(x) = sin(x) - 2;\ \ g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x - 2$

$f'(x) = cos(x);\ \ g'(x) = -x^2 + 1$

$f'(x) \cap g'(x)$

$cos(x) = -x^2 + 1 \qquad | \quad +x^2 - 1$

$cos(x) + x^2 - 1 = 0$

$x \overset{WTR}{=} 0$

$f(0) = -2;\ \ g(0) = -2$

Berührpunkt $B(0|-2)$

$f'(0) = 1$

$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$t(x) = x - 2$

e) $f(x) = cos(x);\ \ g(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - 1$

$f'(x) = -sin(x);\ \ g'(x) = x - \pi$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-sin(x) = x - \pi \qquad | \quad -x + \pi$

$-sin(x) - x + \pi = 0$

$x = \pi$

$f(\pi) = -1;\ \ g(\pi) = -1$

Berührpunkt $B(\pi|-1)$

$f'(\pi) = 0$

$t(x) = f'(\pi) \cdot (x - \pi) + f(\pi)$

$t(x) = -1$

f) $f(x) = e^x - 4;\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

$f'(x) = e^x;\ \ g'(x) = x + 1$

$f'(x) \cap g'(x)$

$e^x = x + 1 \qquad | \quad -x - 1$

$e^x - x - 1 = 0$

$x = 0$

$f(0) = -3;\ \ g(0) = -3$

Berührpunkt $B(0|-3)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$f'(0) = 1$
$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$
$t(x) = x - 3$

Lösung A5

a) $f(x) = ax^2 + b;\ \ g(x) = -x^2 + 3x + \frac{3}{2};\ \ x_0 = 1$
$f'(x) = 2ax;\ \ \ g'(x) = -2x + 3$
$f'(x) \cap g'(x)$
$2ax = -2x + 3 \qquad | \quad +2x$
$2ax - 2x = 3$
Für $x_0 = 1$ gilt demnach:
$2a - 2 = 3 \qquad | \quad +2$
$2a = 5$
$a = 2{,}5$
$f(x) = 2{,}5x^2 + b$
$g(1) = -(1)^2 + 3 \cdot 1 + \frac{3}{2} = 3{,}5 = f(1)$
$3{,}5 = 2{,}5 \cdot 1^2 + b$
$b = 1$
Für $a = 2{,}5$ und $b = 1$ berühren sich f und g in $x_0 = 1$.

b) $f(x) = a \cdot e^x + b;\ \ g(x) = x^3 + 2x - 1;\ \ x_0 = 0$
$f'(x) = a \cdot e^x;\ \ \ g'(x) = 3x^2 + 2$
$f'(x) \cap g'(x)$
$a \cdot e^x = 3x^2 + 2$
Für $x_0 = 0$ gilt demnach:
$2a \cdot e^0 = 3 \cdot 0^2 + 2$
$2a = 2$
$a = 1$
$f(x) = e^x + b$
$g(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 = f(0)$
$-1 = e^0 + b$
$b = -2$
Für $a = 1$ und $b = -2$ berühren sich f und g in $x_0 = 0$.

c) $f(x) = a\sqrt{x} + bx;\ \ g(x) = \frac{1}{972}x^3 - \frac{1}{12}x;\ \ x_0 = 9$
$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + b;\ \ \ g'(x) = \frac{1}{324}x^2 - \frac{1}{12}$
$f'(x) \cap g'(x)$
$\frac{a}{2\sqrt{x}} + b = \frac{1}{324}x^2 - \frac{1}{12}$
Für $x_0 = 9$ gilt demnach:
$\frac{a}{6} + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \qquad | \quad \cdot 6$
$a + 6b = 1$
$g(9) = \frac{3}{4} - \frac{9}{12} = 0 = f(9)$
$0 = 3a + 9b$

(I) $a + 6b = 1$ | $\cdot 3$
(II) $3a + 9b = 0$
(I) $3a + 18b = 3$
(II) $3a + 9b = 0$
(I)-(II) $0a + 9b = 3$ | $:9$
$b = \frac{1}{3}$
$b \rightarrow (II)$ $3a + 9 \cdot \frac{1}{3} = 0$
$3a = -3$
$a = -1$

Für $a = -1$ und $b = \frac{1}{3}$ berühren sich f und g in $x_0 = 9$.

d) $f(x) = acos(x) + b;\ \ g(x) = \frac{1}{\pi}x^2 - 4x - 1 + \frac{7\pi}{4};\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = -asin(x);\ \ g'(x) = \frac{2}{\pi}x - 4$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-asin(x) = \frac{2}{\pi}x - 4$

Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$ gilt demnach:

$-asin(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - 4$

$-a = -3;\ \ a = 3$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi - 1 + \frac{7}{4}\pi = -1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$-1 = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b$

$-1 = 0 + b$

$b = -1$

Für $a = 3$ und $b = -1$ berühren sich f und g in $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6$.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P\big(1{,}2\big|f(1{,}2)\big)$.

b) Bestimme alle Tangenten an den Graphen, die zu t parallel oder orthogonal verlaufen.

c) Gibt es andere Geraden durch $P\big(1{,}2\big|f(1{,}2)\big)$, die Tangenten an den Graphen von f sind?

d) Miriana behauptet: „Durch jeden Punkt des Graphen von f gibt es zwei Geraden, die Tangenten dieses Graphen sind."
Prüfe diese Behauptung ohne Rechnung ausführlich, indem du Skizzen anfertigst und präzisiere gegebenenfalls Mirianas Behauptung, begründe deine Antwort und belege deine Ergebnisse in Spezialfällen rechnerisch.

e) Prüfe deine Erkenntnisse aus Teilaufgabe d) an den Funktionen g mit $g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$ und h mit $h(x) = (x+2) \cdot x \cdot (4-x)$.

Aufgabe A2

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f mit $f(x) = x^3$, die durch den Punkt $P(-2|-8)$ verläuft. Gib auch den Berührpunkt an.

b) Bestimme die Gleichung der Normalen n zum Graphen von g mit $g(x) = x^2$, die durch den Punkt $Q(2|-3)$ verläuft. Gib auch den Schnittpunkt von n mit g an.

c) Bestimme die Gleichung der Normalen n zum Graphen wie unter Teilaufgaben b), die jedoch durch den Punkt $Q(0|-2)$ verläuft. (Mache zunächst eine Skizze).

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 4$.
Bestimme die Punkte des Graphen von f, dessen Tangenten durch den Punkt $P(1|-2)$ verlaufen.

Aufgabe A4

Die Gerade t mit der Gleichung $y = -3x + 13$ ist Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$.

a) Weise diese Behauptung rechnerisch nach.

b) Die Tangente t und die Normale n an den Graphen von f im Berührpunkt von t und die x-Achse bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Zeige, dass der Berührpunkt B der Tangente mit dem Graphen von f auch Wendepunkt des Graphen der Funktion ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A5

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ sowie $g(x) = \sqrt{x}$. Die senkrechte Gerade g mit der Gleichung $x = u$ schneidet das Schaubild von f im Punkt P und das Schaubild von g im Punkt Q.
Bestimme u so, dass die Tangenten in P und Q parallel sind.

Aufgabe A6

Zeige, dass sich die Schaubilder von $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und $g_a(x) = ax^2 + \frac{x}{2} + 1$ im Punkt $S(0|1)$ für jeden Wert von a sich rechtwinklig schneiden.

Aufgabe A7

An den Parabelbogen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}4(x-2)^2 - 1{,}5$ soll vom Punkt $P(0|5)$ ausgehend eine Tangente so gelegt werden, dass ihr Steigung einen negativen Wert annimmt. Bestimme die Gleichung der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes B.

Aufgabe A8

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot (x^3 - 4x + 2);\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

a) Prüfe, ob eine Tangente an den Graphen von f_1 existiert, die durch den Punkt $P(1|1)$ verläuft.

b) Für welche a existieren Tangenten an den Graphen von f_a, die durch den Punkt $P(1|1)$ verlaufen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f(x) = x^3 - 6$
$f'(x) = 3x^2$

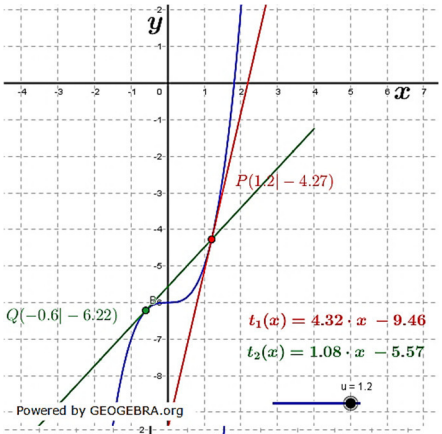
a) $f(1{,}2) = 1{,}2^3 - 6 = -4{,}272$
$f'(1{,}2) = 3 \cdot 1{,}2^2 = 4{,}32$
$t(x) = f'(1{,}2) \cdot (x - 1{,}2) + f(1{,}2)$
$t(x) = 4{,}32 \cdot (x - 1{,}2) - 4{,}272 = 4{,}32x - 9{,}456$

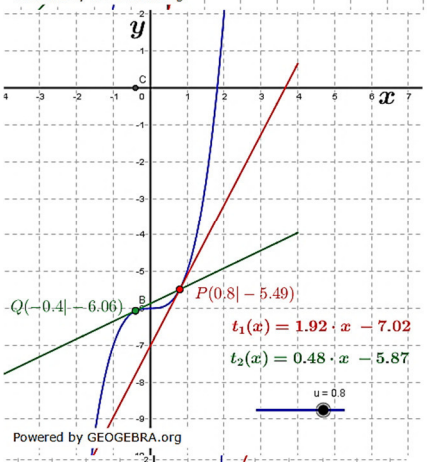
b) Alle Tangenten zu t parallel müssen die Steigung $m = f'(x) = 4{,}32$ haben.
$4{,}32 = 3x^2 \quad | \quad :3$
$x^2 = 1{,}44 \quad | \quad \sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm 1{,}2$
Für $x_1 = 1{,}2$ siehe Aufgabenteil a).
$f(-1{,}2) = (-1{,}2)^3 - 6 = -7{,}728$
$f'(-1{,}2) = 3 \cdot (-1{,}2)^2 = 4{,}32$
$t_{-1,2}(x) = 4{,}32 \cdot (x + 1{,}2) - 7{,}728$
$t_{-1,2}(x) = 4{,}32x - 2{,}544$
Alle zu t orthogonalen Tangenten müssen die Steigung $4{,}32 \cdot m_2 = -1$ haben.
$m_2 = -\frac{1}{4{,}32} = -0{,}2315 = f'(x)$
$-0{,}2315 = 3x^2 \quad | \quad :3$
$x^2 = -0{,}077 \quad | \quad \sqrt{}$
$\mathbb{L} = \{\}$
Es gibt keine zu t orthogonale Tangenten an f.

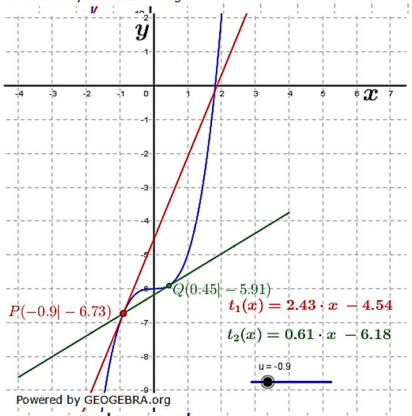
c) Dies sind Tangenten ***vom*** Punkt $P(1{,}2|f(1{,}2))$ aus an den Graphen von f.
Der Berührpunkt von f sei nun $B(u|f(u))$.
$f(u) = u^3 - 6$
$f'(u) = 3u^2$
$t_u(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
$-4{,}272 = 3u^2 \cdot (1{,}2 - u) + u^3 - 6 \quad | \quad$ Punktprobe mit $P(1{,}2|f(1{,}2))$
$-2u^3 + 3{,}6u^2 - 6 = -4{,}272 \quad | \quad +4{,}272$
$-2u^3 + 3{,}6u^2 - 1{,}728 = 0$
$u_1 \overset{\text{WTR}}{=} -0{,}60; \quad u_2 \overset{\text{WTR}}{=} 1{,}2$
$f(-0{,}6) = (-0{,}6)^3 - 6 = -6{,}216$
$f'(-0{,}6) = 3 \cdot (-0{,}6)^2 = 1{,}08$
$t_{u1}(x) = f'(-{,}6) \cdot (x + 0{,}6) + f(-0{,}6)$
$t_{u1}(x) = 1{,}08 \cdot (x + 0{,}6) - 6{,}216 = 1{,}08x - 5{,}568$
Für $u_2 = 1{,}2$ siehe Aufgabenteil a)

d) Die seitlichen Grafiken zeigen vier verschiedene Situationen.

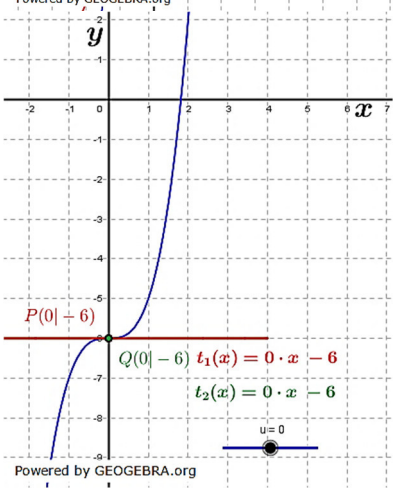
Wie wir in den ersten drei Grafiken erkennen, gibt es neben der Tangente im Punkt P der Kurve eine zweite Tangente an die Kurve, die durch den Punkt P verläuft. Der zugehörige Berührpunkt ist der Punkt Q.







Fallen die Punkte P und Q aber zusammen, so fallen auch die beiden Tangenten zu einer Tangente zusammen.
Diese Situation tritt im Wendepunkt der des Graphen der Funktion auf.
Miriana hat also Recht mit Ausnahme der Wendestelle des Graphen von f.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

e) $g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x \qquad g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2} \qquad g''(x) = 6x$

Der (bekannte) Tangentenpunkt sei $P(u|g(u))$

1. Situation: Tangente in $P(u|g(u))$

$g(u) = u^3 + \frac{1}{2}u; \quad g'(u) = 3u^2 + \frac{1}{2}$

$t_1(x) = g'(u) \cdot (x - u) + g(u))$

$t_1(x) = \left(3u^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - u) + u^3 + \frac{1}{2}u$

$t_1(x) = 3u^2x - 3u^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}u + u^3 + \frac{1}{2}u$

$t_1(x) = 3u^2x + \frac{1}{2}x - 2u^3$

$t_1(x) = \left(3u^2 + \frac{1}{2}\right)x - 2u^3$

2. Situation: Tangente von P aus an die Kurve, der (unbekannte) Tangentenpunkt sei $Q(v|f(v))$.

$g(v) = v^3 + \frac{1}{2}v; \quad g'(v) = 3v^2 + \frac{1}{2}$

$t_2(x) = g'(v) \cdot (x - v) + f(v))$

$t_2(x) = \left(3v^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - v) + v^3 + \frac{1}{2}v$

$t_2(x) = 3v^2x - 3v^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v + v^3 + \frac{1}{2}v$

$t_2(x) = 3v^2x + \frac{1}{2}x - 2v^3$

3. Bestimmung der Wendestelle mit $g''(x) = 0$

$6x = 0 \quad => \quad x = 0$

Im Wendepunkt fallen u und v zusammen, sind also $u = v = 0$ ist.
Wegen $t_1(0) = t_2(0)$ gibt es im Wendepunkt von g nur eine Tangente.

$h(x) = (x + 2) \cdot x \cdot (4 - x) = (x^2 + 2x) \cdot (4 - x) = 4x^2 - x^3 + 8x - 2x^2$

$h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x \qquad h'(x) = -3x^2 + 4x + 8$

$h''(x) = -6x + 4$

Der (bekannte) Tangentenpunkt sei $P(u|g(u))$

1. Situation: Tangente in $P(u|g(u))$

$h(u) = -u^3 + 2u^2 + 8u; \quad h'(u) = -3u^2 + 4u \qquad t_1(x) = h'(u) \cdot (x - u) + h(u))$

$t_1(x) = (-3u^2 + 4u) \cdot (x - u) - u^3 + 2u^2 + 8u$

$t_1(x) = -3u^2x + 3u^3 + 4ux - 4u^2 - u^3 + 2u^2 + 8u$

$t_1(x) = -3u^2x + 4ux + 2u^3 - 2u^2 + 8u$

$t_1(x) = (3u^2 + 4)x + 2u^3 - 2u^2 + 8u$

2. Situation: Tangente von P aus an die Kurve, der (unbekannte) Tangentenpunkt sei $Q(v|f(v))$.

$h(v) = -v^3 + 2v^2 + 8v; \quad h'(v) = -3v^2 + 4v \qquad t_1(x) = h'(v) \cdot (x - v) + h(v))$

$t_2(x) = (-3v^2 + 4v) \cdot (x - v) - v^3 + 2v^2 + 8v$

$t_2(x) = -3v^2x + 3v^3 + 4vx - 4v^2 - v^3 + 2v^2 + 8v$

$t_2(x) = -3v^2x + 4vx + 2v^3 - 2v^2 + 8v$

$t_2(x) = (3v^2 + 4)x + 2v^3 - 2v^2 + 8v$

3. Bestimmung der Wendestelle mit $h''(x) = 0$

$-6x + 4 = 0$

$6x = 4 \quad => \quad x = \frac{2}{3}$

Im Wendepunkt fallen u und v zusammen, sind also $u = v = \frac{2}{3}$ ist.
Wegen $t_1\left(\frac{2}{3}\right) = t_2\left(\frac{2}{3}\right)$ gibt es im Wendepunkt von h nur eine Tangente.

Lösung A2

a) $f(x) = x^3;\ f'(x) = 3x^2;\ P(-2|-8)$

Aufgabe für Tangente von einem Punkt aus an den Graphen einer Funktion.

Der Berührpunkt habe die Koordinaten $B(u|f(u))$.

Dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$t(x) = 3u^2 \cdot (x-u) + u^3$

$-8 = 3u^2 \cdot (-2-u) + u^3$ | Punktprobe mit P

$-6u^2 - 3u^3 + u^3 + 8 = 0$

$-2u^3 - 6u^2 + 8 = 0$ | $:-2$

$u^3 + 3u^2 - 4 = 0$

$u_1 \overset{WTR}{=} -2;\ u_2 \overset{WTR}{=} 1$

$f(u_1) = (-2)^3 = -8$ $\quad f(u_2) = (1)^3 = 1$

Die Berührpunkte haben die Koordinaten $B_1(-2|-8)$ und $B_2(1|1)$.

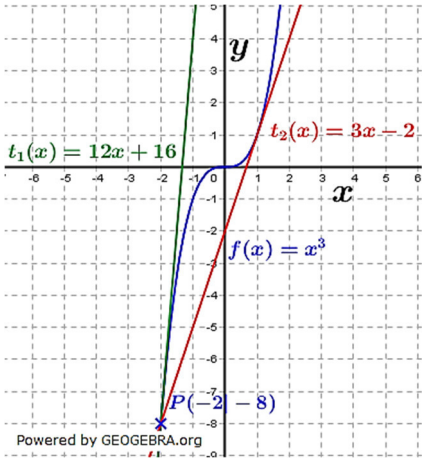
$f'(u_1) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$ $\quad f'(u_2) = 3 \cdot 1^2 = 3$

$t_1(x) = f'(u_1) \cdot (x-u_1) + f(u_1) = 12 \cdot (x-(-2)) + (-8)$

$t_1(x) = 12x + 16$

$t_2(x) = f'(u_2) \cdot (x-u_2) + f(u_2) = 3 \cdot (x-1) + 1$

$t_2(x) = 3x - 2$



b) $g(x) = x^2;\ g'(x) = 2x;\ Q(2|-3)$

Aufgaben für Normale von einem Punkt aus zum Graphen einer Funktion.

Der Schnittpunkt habe die Koordinaten $S(u|g(u))$.

Die Normale von einem Punkt zum Graphen schneidet diesen senkrecht. Die Strecke vom Punkt Q zum Schnittpunkt S ist somit die kürzeste Entfernung. Die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten errechnet sich über den Satz des Pythagoras. Es gilt:

$d(u) = \sqrt{(g(u) - y_Q)^2 + (u - x_Q)^2} = \sqrt{(g(u)+3)^2 + (u-2)^2}$

$d(u) = \sqrt{(u^2+3)^2 + (u-2)^2} = \sqrt{u^4 + 6u^2 + 9 + u^2 - 4u + 4}$

$d(u) = \sqrt{u^4 + 7u^2 - 4u + 13}$

Die kürzeste Entfernung über $d'(x) = 0$:

$d'(u) = \frac{4u^3 + 14u - 4}{2 \cdot \sqrt{u^4 + 6u^2 - 4u + 13}}$

$4u^3 + 14u - 4 = 0$ | $:2$

$2u^3 + 7u - 2 = 0$

$u \overset{WTR}{\approx} 0{,}28$

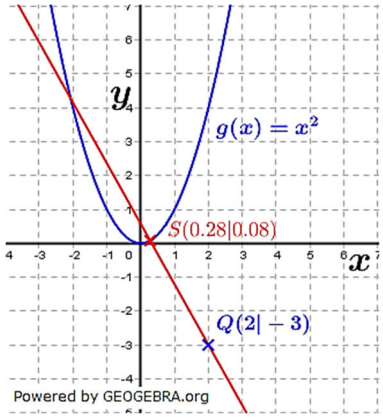
$g(u) \approx 0{,}08$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(0{,}28|0{,}08)$.

$g'(u) = 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}56$

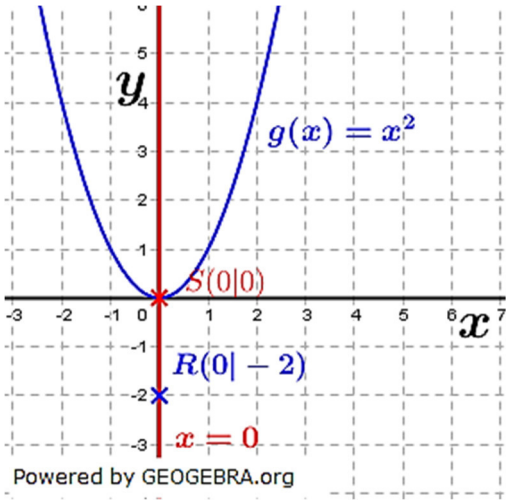
$n(x) = -\frac{1}{g'(u)} \cdot (x-u) + g(u) = -\frac{1}{0{,}56} \cdot (x - 0{,}28) + 0{,}08$

$n(x) = -1{,}79x + 0{,}58$



c) $g(x) = x^2;\ g'(x) = 2x;\ R(0|-2)$

Über die Graphik stellen wir fest, dass der Punkt $R(0|-2)$ senkrecht unter dem Scheitelpunkt $S(0|0)$ der Parabel liegt.
Somit wird die y-Achse selbst zur Normalen zum Graphen der Funktion.
Die Gleichung der Normalen lautet in diesem Fall $x = 0$.



Lösung A3

$f(x) = 2x^2 + 4;\ f'(x) = 4x;\ P(1|-2)$

Aufgabe für Tangente von einem Punkt aus an den Graphen einer Funktion.
Der Punkt des Graphen, durch den die Tangente verläuft habe die Koordinaten $P(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel
$f'(u) = 4u;\ \ f(u) = 2u^2 + 4$
$t(x) = 4u \cdot (x - u) + 2u^2 + 4$
$-2 = 4u \cdot (1 - u) + 2u^2 + 4$ | Punktprobe mit $P(1|-2)$
$-2 = 4u - 4u^2 + 2u^2 + 4$ | $+2$
$-2u^2 + 4u + 6 = 0$ | $:(-2)$
$u^2 - 2u - 3 = 0$
$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$ | p/q-Formel
$u_1 = 3;\ u_2 = -1$
$f(u_1) = 2 \cdot 3^2 + 4 = 22;\ f'(u_1) = 4 \cdot 3 = 12$
$f(u_2) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 = 6;\ f'(u_2) = 4 \cdot (-1) = -4$
$t_1(x) = f'(u_1) \cdot (x - u_1) + f(u_1) = 12 \cdot (x - 3) + 22 = 12x - 14$
$t_2(x) = f'(u_2) \cdot (x - u_2) + f(u_2) = -4 \cdot (x + 1) + 6 = -4x + 2$

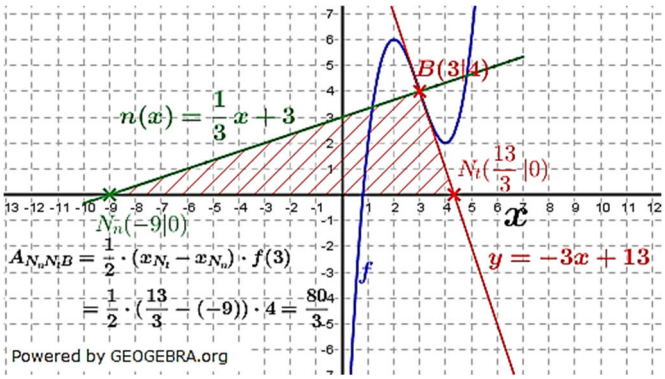
Lösung A4

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14;\ f'(x) = 3x^2 - 18x + 24;\ y = -3x + 13$

a) Rechnerischer Nachweis, dass t mit $y = -3x + 13$ f berührt:

$m_t = f'(x) = -3$
$3x^2 - 18x + 24 = -3$ | $+3;\ :3$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$
Es existiert nur eine Stelle $x_0 = 3$, in der f die Steigung $m = -3$ hat.
$f(-3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 14 = 4$
$y = -3 \cdot 3 + 13 = 4$
Somit ist $B(3|4) \in f; t$ und damit Berührpunkt von f und t.
$y = -3x + 13$ ist Tangente an f in $B(3|4)$. **q.e.d.**

b) Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.
Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_nN_tB, mit N_n als Nullstelle der Normalen N_t als Nullstelle von t und B als Berührpunkt von f und t.

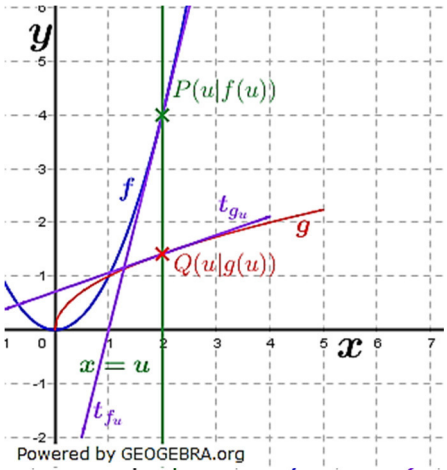


Bestimmung der Normalengleichung in $B(3|4)$:
$n(x) = -\frac{1}{f'(3)} \cdot (x-3) + f(3)$
$n(x) = -\frac{1}{-3} \cdot (x-3) + 4 = \frac{1}{3}x + 3$
Bestimmung der Nullstelle N_n:
$\frac{1}{3}x + 3 = 0 \;=>\; x = -9 \;=>\; N_n(-9|0)$
Bestimmung der Nullstelle N_t:
$-3x + 13 = 0 \;=>\; x = \frac{13}{3} \;=>\; N_t\left(\frac{13}{3}\middle|0\right)$
$A_{N_nN_tB} = \frac{1}{2} \cdot (x_{N_t} - x_{N_n}) \cdot f(3)$ | Flächenformel eines Dreiecks.
$A_{N_nN_tB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{3} - (-9)\right) \cdot 4 = \frac{80}{3}$
Der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks N_nN_tB beträgt $\frac{80}{3}\ FE$.

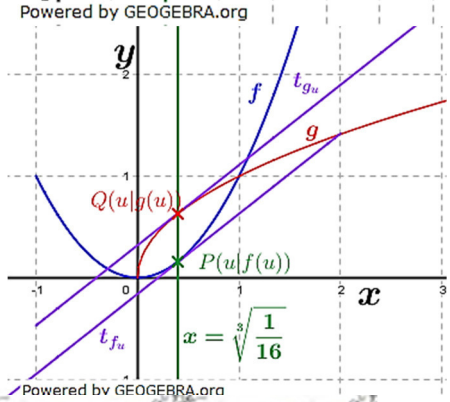
c) B ist Wendepunkt, wenn $f''(3) = 0$ ist und $f'''(3) \neq 0$:
$f''(x) = 6x - 18; \quad f'''(x) = 6$
$f''(3) = 6 \cdot 3 - 18 = 0$
$f'''(3) = 6 \neq 0$
B ist Wendepunkt der Funktion f.

Lösung A5

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.
Gesucht ist die Stelle $x = u$, sodass die beiden Tangenten t_{f_u} und t_{g_u} parallel verlaufen. Parallele Geraden müssen dieselbe Steigung haben, somit muss gelten $f'(u) = g'(u)$.



$f(x) = x^2; \quad f'(x) = 2x$
$g(x) = \sqrt{x}; \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(u) = g'(u)$:
$2u = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ | $\cdot 2\sqrt{u}$
$4u\sqrt{u} = 1$ | ^{2}
$16u^3 = 1$ | $:16$
$u^3 = \frac{1}{16}$ | $\sqrt[3]{\ }$
$u = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$
Die Tangenten an f in $P(u|f(u))$ und g in $Q(u|f(u))$ sind für $u = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ parallel.



Lösung A6

$f(x) = x^2 - 2x + 1; \quad f'(x) = 2x - 2$

$g_a(x) = ax^2 - \frac{x}{2} + 1; \quad g_a'(x) = 2ax + \frac{1}{2}$

Bedingung für rechtwinkliges Schneiden:

$f'(0) \cdot g_a'(0) \stackrel{?}{=} -1$

$f'(0) = -2; \; g_a'(0) = \frac{1}{2}$

$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

Die Steigungen von $f'(0)$ und $g_a{}'(0)$ sind unabhängig von A, $f'(0) \cdot g_a'(0) = -1$, somit schneiden sich für $a \in \mathbb{R}$ die Tangenten in $S(0|1)$ rechtwinklig.

Lösung A7

$f(x) = -0{,}4(x-2)^2 - 1{,}5; \quad f'(x) = -0{,}8(x-2); \quad P(0|5)$

Der Berührpunkt habe die Koordinaten $B(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$f'(u) = -0{,}8u + 1{,}6; \quad f(u) = -0{,}4(u-2)^2 - 1{,}5$

$t(x) = (-0{,}8u + 1{,}6) \cdot (x-u) - 0{,}4(u-2)^2 - 1{,}5$

$5 = (-0{,}8u + 1{,}6) \cdot (-u) - 0{,}4(u^2 - 4u + 4) - 1{,}5$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$5 = 0{,}8u^2 - 1{,}6u - 0{,}4u^2 + 1{,}6u - 1{,}6 - 1{,}5$

$5 = 0{,}4u^2 - 3{,}1$ | $+3{,}1; : 0{,}4$

$u^2 = \frac{8{,}1}{0{,}4} = 20{,}25$ | $\sqrt{}$

$u_{1,2} = \pm 4{,}5$

Gefragt ist nach Tangente mit negativer Steigung:

$f'(4{,}5) = -0{,}8 \cdot 2{,}5 = -2; \quad f'(-4{,}5) = -0{,}8 \cdot (-6{,}5) = 5{,}2$

Gesucht war also $u = 4{,}5$.

$f(4{,}5) = -0{,}4 \cdot 2{,}5^2 - 1{,}5 = -4$

$t(x) = -2(x - 4{,}5) - 4 = -2x + 5$

Der Berührpunkt hat die Koordinaten $B(4{,}5|-4)$.

Lösung A8

$f_a(x) = a \cdot (x^3 - 4x + 2); \quad f_a'(x) = a \cdot (3x^2 - 4)$

a) $f_1(x) = x^3 - 4x + 2; \quad f_1'(x) = 3x^2 - 4$

Tangente an f_1 von $P(1|1)$ aus vorhanden?

Der Berührpunkt habe die Koordinaten $B(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$f_1'(u) = 3u^2 - 4; \quad f_1(u) = u^3 - 4u + 2$

$t(x) = (3u^2 - 4) \cdot (x-u) + u^3 - 4u + 2$

$1 = (3u^2 - 4) \cdot (1-u) + u^3 - 4u + 2$ | Punktprobe mit $P(1|1)$

$1 = 3u^2 - 3u^3 - 4 + 4u + u^3 - 4u + 2$

$1 = -2u^3 + 3u^2 - 2$ | -1

$3u^2 - 2u^3 - 3 = 0$

$u \stackrel{\text{WTR}}{\approx} -0{,}68$

An $f_1{}'$ existiert eine Tangente durch den Punkt $P(1|1)$. Der Berührpunkt hat die Koordinaten $B(-0{,}68|4{,}41)$

b) $f_a(x) = a \cdot (x^3 - 4x + 2)$; $f_a'(x) = a \cdot (3x^2 - 4)$

$t_a(x) = f_a'(u) \cdot (x - u) + f_a(u)$

$f_a(u) = a \cdot (u^3 - 4u + 2)$; $f_a'(u) = a \cdot (3u^2 - 4)$

$t_a(x) = (3au^2 - 4a) \cdot (x - u) + au^3 - 4au + 2a$

$1 = (3au^2 - 4a) \cdot (1 - u) + au^3 - 4au + 2a$

$1 = 3au^2 - 3au^3 - 4a + 4au + au^3 - 4au + 2a$

$-2au^3 + 3au^2 - 2a - 1 = 0$

Die hiermit ermittelte Gleichung ist eine Gleichung dritten Grades. Gleichungen dritten Grades besitzen mindestens eine, maximal drei Nullstellen. Lediglich für $a = 0$ macht diese Gleichung keinen Sinn. Daraus folgt:

Für alle $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ existieren Tangenten an den Grafen von f_a, die durch den Punkt $P(1|1)$ verlaufen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.
Bestimme die Gleichung der Wendetangente.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = \frac{5}{x+1}$. Die Tangente an das Schaubild in den Punkten $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ sind parallel.
Untersuche, welche Bedingung dann für x_1 und x_2 gelten muss.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion mit $f(x) = \frac{4}{x^2} + 1$.
Untersuche, welche Bedingung für x_1 und x_2 gelten muss, wenn sich die Tangenten an das Schaubild in den Punkten $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ senkrecht schneiden.

Aufgabe A4

Die Funktion mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2;\ x \in \mathbb{R}$ habe das Schaubild K.

a) Bestimme die Fläche, die von K und den Tangenten an K in den beiden äußeren Nullstellen eingeschlossen wird.

b) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks, das von den Tangenten und Normalen in den beiden Wendepunkten von K umschlossen wird.

Aufgabe A5

Gegeben ist für $t > 0$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = 6(2x^2 + x^3) \cdot e^{x-0,25t}$. Ihr Schaubild sei K.
Die Tangente an K_t im Punkt $P(-2|f(-2))$ schneidet die y-Achse in P. Die Normale schneidet die y-Achse in S.
Bestimme t so, dass die Strecke RS die Länge $5\,LE$ besitzt.

Aufgabe A6

Das Schaubild *K* einer ganzrationalen Funktion *f* dritten Grades geht durch den Punkt *A(0|2)* und hat im Wendepunkt *W(2|0)* eine Wendetangente mit der Steigung *-3*.

a) Bestimme eine Funktionsgleichung von *f*.

b) Von einem Punkt *P(0|p)* auf der *y*-Achse aus sollen Tangenten an *K* gelegt werden.
Bestimme in Abhängigkeit von *p* die Anzahl der Tangenten, die man vom Punkt *P* aus an *K* legen kann.

Aufgabe A7

Bestimme alle Punkte des Graphen von f mit $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$, deren Tangenten durch den Punkt $P(2|1)$ gehen.

Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2;\quad f'(x) = \frac{1}{6}x^2 + x;\quad f''(x) = \frac{1}{3}x + 1$

Bestimmung des Wendepunktes über $f''(x) = 0$:

$\frac{1}{3}x + 1 = 0;\ \Rightarrow\ x = -3$

Tangentensteigung im Wendepunkt über $f'(-3)$:

$f'(-3) = \frac{1}{6}(-3)^2 - 3 = -\frac{3}{2}$

y-Koordinate des Wendepunktes über $f(-3) = \frac{1}{18}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $WP(-3|3)$.

Bestimmung der Tangentengleichung:

$t(x) = f'(-3) \cdot (x+3) + f(-3)$ | Punkt-Steigungsform

$t(x) = -\frac{3}{2} \cdot (x+3) + 3 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Lösung A2

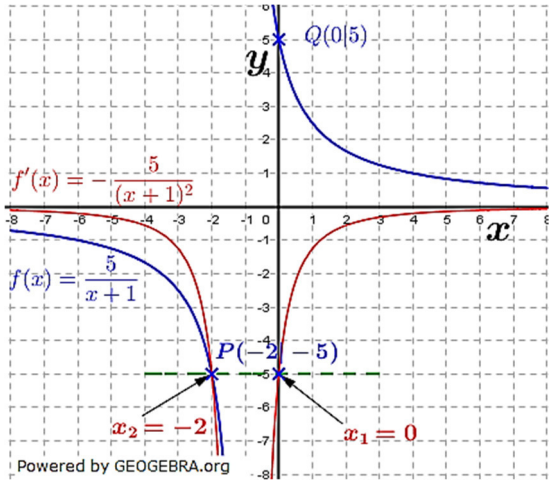
$f(x) = \frac{5}{x+1};\quad f'(x) = -\frac{5}{(x+1)^2}$

Für die beiden Tangenten muss gelten, dass $f'(x_1) = f'(x_2)$. Die nebenstehende Graphik erläutert die Situation für $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$. f ist eine punktsymmetrische Funktion zum Punkt $S(-1|0)$. Ihre Ableitung f' ist damit eine achsensymmetrische Funktion zur Achse $x = -1$.

Dies bedeutet, dass f stets zwei Stellen mit gleicher Steigung besitzt, da in jeder Situation gilt $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Die Stellen x_1 und x_2 müssen somit ebenfalls achsensymmetrisch zur Achse $x = -1$ sein, sodass gilt:

$x_2 = -x_1 - 2;\ x_1 > -1$



Rechnerischer Nachweis:

$-\frac{5}{(x_1+1)^2} = -\frac{5}{(x_2+1)^2}$

$(x_1+1)^2 = (x_2+1)^2$ | $\sqrt{\ }$

$x_1 + 1 = |x_2 + 1|$

$x_1 + 1 = x_2 + 1;\ \Rightarrow\ x_1 = x_2$ (trivial)

$x_1 + 1 = -x_2 - 1$

$x_1 + 2 = -x_2$

$x_2 = -x_1 - 2$

Für $x_2 = -x_1 - 2;\ x_1 > -1$ verlaufen die beiden Tangenten durch $P_1(x_1|f(x_1))$und $P_2(x_2|f(x_2))$ parallel.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

$f(x) = \frac{4}{x^2} + 1;\quad f'(x) = -\frac{8}{x^3}$

Es muss gelten: $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$

$-\frac{8}{x_1^3} \cdot -\frac{8}{x_2^3} = -1$

$\frac{64}{x_1^3 \cdot x_2^3} = -1$

$x_1^3 \cdot x_2^3 = -64$

$x_2^3 = -\frac{64}{x_1^3} \qquad | \quad \sqrt[3]{}$

$x_2 = -\frac{4}{x_1}$

Für $x_2 = -\frac{4}{x_1}$ schneiden sich die beiden Tangenten durch $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_1(x_2|f(x_2))$ senkrecht.

Lösung A4

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2;\quad f'(x) = x^3 - 3x;\quad f''(x) = 3x^2 - 3$

a) Bestimmung der Nullstellen über $f(x) = 0$:

$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2 = 0 \qquad | \quad \cdot 4$

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

$x_{1,2}^2 = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm \sqrt{1}$

$x_1^2 = 4;\ x_2^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Wegen Aufgabenstellung „äußere Nullstellen" sind die Stellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ gemeint.

Bestimmung der Tangenten durch N_1 du N_2:

$f'(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -2 \qquad f'(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$

$t_{N_1}(x) = -2 \cdot (x+2) = -2x - 4 \qquad t_{N_2}(x) = 2 \cdot (x-2) = 2x - 4$

Bestimmung des Schnittpunktes von t_{N_1} und t_{N_2}:

$t_{N_1} \cap t_{N_2}$

$-2x - 4 = 2x - 4$

$4x = 0;\ => \ x = 0$

$S_y = f(0) = 2$

Berechnung Fläche des Dreiecks $N_1 S_y N_2$:

$A = \frac{1}{2} \cdot (x_{N_2} - x_{N_1}) \cdot f(0) = \frac{1}{2} \cdot (2 - (-2) \cdot 2 = 4$

Die Fläche des Dreiecks $N_1 S_y N_2$ beträgt $4\ FE$.

b) Bestimmung der Wendepunkte über $f''(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 = 1;\ => x_1 = -1;\ x_2 = 1$

$f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} \qquad f(1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$

$f'(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2 \qquad f'(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

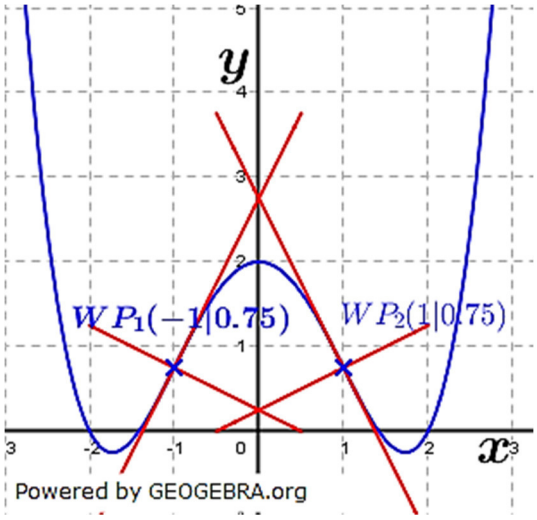
$WP_1\left(-1\middle|\frac{3}{4}\right);\quad WP_2\left(1\middle|\frac{3}{4}\right)$

$t_{WP_1}(x) = 2 \cdot (x+1) + \frac{3}{4} = 2x + \frac{11}{4} \qquad t_{WP_2}(x) = -2 \cdot (x-1) + \frac{3}{4} = -2x + \frac{11}{4}$

$n_{WP_1}(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+1) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ n_{WP_2}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Das entstandene Viereck ist eine Raute. Flächeninhalt einer Raute über $A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ mit e und f als den beiden Diagonalen.
e ist der horizontale Abstand zwischen den Beiden Wendepunkten, $e = 2$.
f ist der vertikale Abstand zwischen den y-Achsenabschnitten der Tangenten und der Normalen, $f = \frac{11}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.
$A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 2{,}5$
Das Viereck hat einen Flächeninhalt von $2{,}5\ LE$.



Lösung A5

$f_t(x) = 6(2x^2 + x^3) \cdot e^{x-0{,}25t}$
$u = 6(2x^2 + x^3)$ $\qquad u' = 6(4x + 3x^2)$
$v = e^{x-0{,}25t}$ $\qquad v' = e^{x-0{,}25t}$
$f_t{}'(x) = u'v + v'u$ | Produktregel
$f_t{}'(x) = 6(4x + 3x^2) \cdot e^{x-0{,}25t} + 6(2x^2 + x^3) \cdot e^{x-0{,}25t}$
$f_t{}'(x) = 6e^{x-0{,}25t} \cdot (4x + 3x^2 + 2x^2 + x^3)$
$f_t{}'(x) = 6x \cdot e^{x-0{,}25t} \cdot (4 + 5x + x^2)$
$f_t{}'(x) = 6x \cdot e^{x-0{,}25t} \cdot (x^2 + 5x + 4)$
$f_t{}'(-2) = 6 \cdot (-2) \cdot e^{-2-0{,}25t} \cdot ((-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 4) = -12 \cdot e^{-2-0{,}25t} \cdot (-2) = 24 \cdot e^{-2-0{,}25t}$
$f_t(-2) = 6(2 \cdot (-2)^2 + (-2)^3) \cdot e^{-2-0{,}25t} = 6 \cdot 0 \cdot e^{-2-0{,}25t} = 0$
$t_t(x) = f'(-2) \cdot (x + 2) + f_t(-2) = 24 \cdot e^{-2-0{,}25t} \cdot (x + 2) = \frac{24}{e^{2+0{,}25t}} x + \frac{48}{e^{2+0{,}25t}}$
$n_t(x) = -\frac{1}{f'(-2)} \cdot (x + 2) + f_t(-2) = -\frac{1}{24 \cdot e^{-2-0{,}25t}} \cdot (x + 2) = -\frac{e^{2+0{,}25t}}{24} x - \frac{e^{2+0{,}25t}}{12}$
Die beiden -Achsenabschnitte lauten $c_{t_t} = \frac{48}{e^{2+0{,}25t}}$ und $c_{n_t} = -\frac{e^{2+0{,}25t}}{12}$.
Laut Aufgabenstellung soll $c_{t_t} - c_{n_t} = 5$ sein.
$\frac{48}{e^{2+0{,}25t}} + \frac{e^{2+0{,}25t}}{12} = 5$ | $\cdot 12 \cdot e^{2+0{,}25t}$
$48 \cdot 12 + (e^{2+0{,}25t})^2 = 60e^{2+0{,}25t}$
$(e^{2+0{,}25t})^2 - 60e^{2+0{,}25t} + 576 = 0$
Substitution:
$e^{2+0{,}25t} = v$
$v^2 + 60v - 576 = 0$
$v_{1,2} = 30 \pm \sqrt{900 - 576} = 30 \pm \sqrt{324} = 30 \pm 18$
$v_1 = 48; \quad v_2 = 12$
Resubstitution:
$e^{2+0{,}25t_1} = 48$
$2 + 0{,}25t_1 = ln(48)$
$0{,}25t_1 = ln(48) - 2$
$t_1 = 4 \cdot (ln(48) - 2) \approx 7{,}485$ $\qquad t_2 = 4 \cdot (ln(12) - 2) \approx 1{,}94$
Für $t \approx 7{,}485$ bzw. $t \approx 1{,}94$ haben die Schnittpunkte der Tangente und Normalen in $P(-2|f(-2))$ mit der y-Achse den Abstand $5\ LE$.

Lösung A6

a) Ganzrationale Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Wegen der vier Unbekannten a, b, c und d benötigen wir vier Bedingungen, die wir aus dem Aufgabentext heraus feststellen müssen.
Nach Aufgabenstellung gilt:

$f(0) = 2$ | Punktprobe mit $A(0|2)$
$f(2) = 0$ | Punktprobe mit $W(2|0)$
$f'(2) = -3$ | Steigung der Wendetangente in $W(2|0)$
$f''(2) = 0$ | $x_0 = 2$ soll Wendestelle sein.

$f(0) = 2 \;\; => \;\; d = 2$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b$

(1) $2^3a + 2^2b + 2c + 2 = 0$
(2) $3 \cdot 2^2a + 2 \cdot 3b + c = -3$
(3) $3 \cdot 2a + 2b = 0$

(1) $8a + 4b + 2c + 2 = 0$ | $-2; : 2$
(2) $12a + 6b + c = -3$ | $: 3$
(3) $6a + 2b = 0$

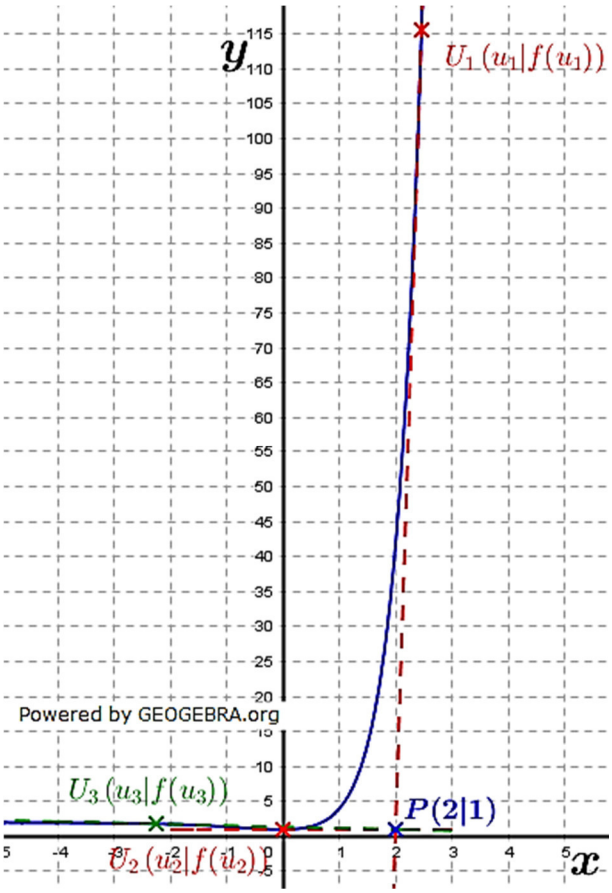
(1) $4a + 2b + c = -1$
(2) $4a + 2b + \frac{1}{3}c = -1$
(3) $6a + 2b = 0$

$u = 6(2x^2 + x^3)$ $\qquad$ $u' = 6(4x + 3x^2)$
$v = e^{x-0,25t}$ $\qquad$ $v' = e^{x-0,25t}$
$f_t{}'(x) = u'v + v'u$ | Produktregel

Lösung A7

$f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2; \quad f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$

Wie aus der Graphik ersichtlich, gibt es drei Stellen auf f, an die von $P(2|1)$ aus eine Tangente gelegt werden kann.



Tangentengleichung:

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$t(x) = (2e^{2u} - 2e^u) \cdot (x - u) + e^{2u} - 2e^u + 2$

Punktprobe mit $P(2|1)$

$1 = (2e^{2u} - 2e^u) \cdot (2 - u) + e^{2u} - 2e^u + 2$

Beginn der Auflösung nach u:

$4e^{2u} - 2ue^{2u} - 4e^u + 2ue^u + e^{2u} - 2e^u + 2 = 1$

$e^{2u}(5 - 2u) - e^u(6 - 2u) + 1 = 0$

Substitution:

$v = e^u$

$(5 - 2u) \cdot v^2 - (6 - 2u) \cdot v + 1 = 0$

$v^2 - \frac{6-2u}{5-2u} \cdot v + \frac{1}{5-2u} = 0$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\left(\frac{3-u}{5-2u}\right)^2 - \frac{1}{5-2u}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\frac{u^2-6u+9-(5-2u)}{(5-2u)^2}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\frac{u^2-4u+4}{(5-2u)^2}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\frac{(u-2)^2}{(5-2u)^2}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \frac{u-2}{5-2u}$

$v_1 = \frac{3-u+u-2}{5-2u} = \frac{1}{5-2u}$

$v_2 = \frac{3-u-u+2}{5-2u} = \frac{5-2u}{5-2u} = 1$

Resubstitution:

$e^{u_2} = v_2 = 1 \quad => \quad u_2 = 0$

$v_1 = e^{u_1} = \frac{1}{5-2u}$

$e^{u_1} = \frac{1}{5-2u} \qquad | \quad ln$

$u_1 = ln\left(\frac{1}{5-2u_1}\right) = ln(1) - ln(5 - 2u_1) = -ln(5 - 2u_1)$

$u_1 + ln(5 - 2u_1) = 0$

Die Lösung dieser Gleichung ist nur mittels GTR/WTR möglich. Wegen $ln(5 - 2u_1)$ ist der Definitionsbereich der Gleichung $D =]-\infty; 2{,}5[$.

$u_1 \overset{WTR}{\approx} -2{,}25; \quad u_2 = 0; \quad u_3 \overset{WTR}{\approx} 2{,}455$

Somit erhalten wir an f drei Stellen, an die wir vom Punkt $P(2|1)$ aus Tangenten an f legen können. Die Tangentenpunkte sind:

$T_1(-2{,}25|f(-2{,}25)) => T_1(-2{,}25|1{,}8) \qquad T_2(0|f(0)) => T_2(0|1)$

$T_3(2{,}455|f(2{,}455)) => T_3(2{,}455|114{,}35)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2;\ x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild sei K.
Vom Punkt $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$ aus sollen Tangenten an K gelegt werden.
Bestimme die Gleichungen der Tangenten und die dazugehörigen Berührpunkte.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{9 - \mathrm{x}^2};\ x \in [-3; 3]$. Eine Tangente an den Graphen soll durch den Punkt $\mathrm{P}(5|0)$ gehen.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t und den dazugehörigen Berührpunkt B.

b) Weise nach, dass die Gerade g, die durch den Ursprung und den Berührpunkt B verläuft, orthogonal zur Tangente t ist.

Aufgabe A3

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16};\ x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.
K stellt für $-6 \leq x \leq 6$ den Querschnitt eines $500\,m$ langen Kanals dar (x in Meter, $f(x)$ in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y = 0$. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal $2{,}25\,m$.
An Land steht eine Person. In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe $1{,}50\,m$)?
TIPP: Fertige zunächste eine Skizze der Situation.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2004 A1.1 Baden-Württemberg.

Aufgabe A4

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125$ im Bereich $-2{,}5 \leq x < 05$,

dabei weist die positive x-Achse nach Osten ($1\,LE$ entspricht $100\,m$).
In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Yiganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.

a) Bestimme die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

b) Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

TIPP: Fertige zunächste eine Skizze der Situation.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2008 A1.1 Baden-Württemberg.

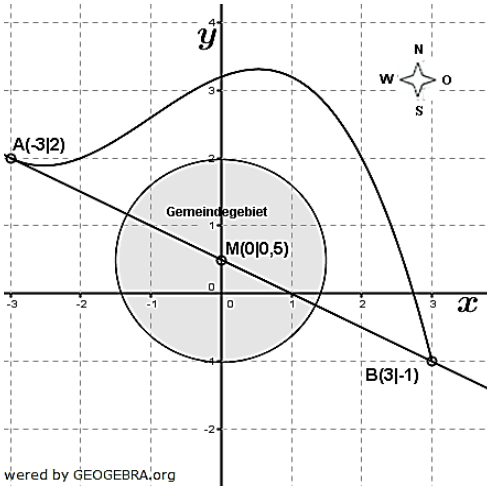
Level 3 – Expert – Blatt 4

Aufgabe A5

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt $\overline{AB}$ einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $1{,}5\ km$.
Die Umgehungsstraße verläuft durch den Punkt A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$$

Eine LE entspricht $1\ km$.



Im Punkt $P(1{,}5|3)$ befindet sich eine Windkraftanlage.
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf die Umgehungsstraße.
Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich?
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2012 A1.1 Baden-Württemberg.

Aufgabe A6

Der Laderaum eines Lastkahns ist $50\ m$ lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4;\ -5 \le x \le 5 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

Zur Wartung steht der Lastkahn auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4|f(-4))$ und $P_2(4|f(4))$, beschrieben werden.
In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform.
TIPP: Fertige zunächste eine Skizze der Situation.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2015 A1.1 Baden-Württemberg.

Aufgabe A7

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x - \frac{1}{x^3};\ x \neq 0$.
Die Tangente an den Graphen von g im Punkt B verläuft durch $P(0|-0{,}5)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von B.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2017 A1.2 Baden-Württemberg.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2; \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x; \quad P\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$

$t(x) = f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsform

$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - \frac{4}{3}u\right)\cdot(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - \frac{2}{3}u^2$

$\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}u^2 - \frac{4}{3}u\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-u\right) + \frac{1}{9}u^3 - \frac{2}{3}u^2$ | Punktprobe mit $P\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{3}u^2 - \frac{4}{3}u\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-u\right) + \frac{1}{9}u^3 - \frac{2}{3}u^2 - \frac{3}{2} = 0$

$u_1 \overset{WTR}{=} -3; \quad u_2 \overset{WTR}{=} 0{,}75; \quad u_3 \overset{WTR}{=} 3$

$f(-3) \overset{WTR}{=} -9; \quad f(0{,}75) \overset{WTR}{=} -\frac{1}{3}; \quad f(3) \overset{WTR}{=} -3$

$f'(-3) \overset{WTR}{=} 7; \quad f'(0{,}75) \overset{WTR}{=} -0{,}83; \quad f'(3) \overset{WTR}{=} -1$

$t_1(x) = 7(x+3) - 9 = 7x + 12$ $\quad B_1(-3|-9)$

$t_2(x) = -0{,}83(x-0{,}75) - \frac{1}{3} = -0{,}83x + 0{,}29$ $\quad B_2\left(0{,}75\middle|-\frac{1}{3}\right)$

$t_3(x) = -(x-3) - 3 = -x$ $\quad B_3(3|-3)$

LösuAng A2

$f(x) = \sqrt{9-x^2} \;\; x \in [-3;3]; \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}; \quad P(5|0)$

a) Tangente von einem Punkt aus an eine Kurve:

$t(x) = f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$t(x) = -\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\cdot(x-u) + \sqrt{9-u^2}$

$0 = -\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\cdot(5-u) + \sqrt{9-u^2}$ | $\cdot\sqrt{9-u^2}$

$0 = -u\cdot(5-u) + 9 - u^2$

$0 = -5u + u^2 + 9 - u^2$

$5u = 9$

$u = \frac{9}{5}$

$f\left(\frac{9}{5}\right) = \sqrt{9 - \left(\frac{81}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}; \qquad f'\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{9-\frac{81}{25}}} = -\frac{\frac{9}{5}}{\frac{12}{5}} = -\frac{3}{4}$

$t(x) = -\frac{3}{4}\cdot(x-5) + \frac{12}{5} = -\frac{3}{4}x + \frac{123}{20}$

Berührpunkt $B\left(\frac{9}{5}\middle|\frac{12}{5}\right)$.

b) Gerade g durch Ursprung und Berührpunkt B:

$g(x) = m\cdot x + c$ | Allgemeine Form Geradengleichung

$m_g = \frac{y_B - 0}{x_B - 0} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}$

$g(x) = \frac{4}{3}\cdot x$ | $c = 0$ wegen Ursprungsgerade

$m_t = -\frac{3}{4}$ | aus $f'\left(\frac{9}{5}\right)$

$m_t \cdot m_g = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$

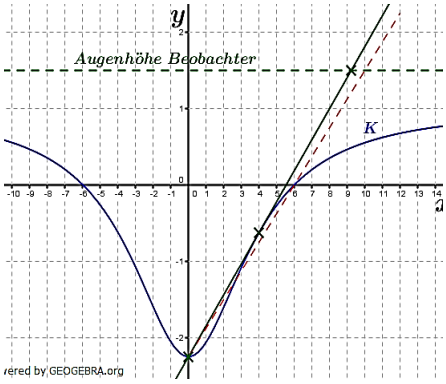
Die Ursprungsgerade durch den Berührpunkt B (aus Teilaufgabe a)) verläuft orthogonal zur Tangente t (aus Teilaufgabe a)).

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

Lösungslogik

Die nebenstehende Graphik beschreibt die Situation.



Wie ersichtlich, ist die Sichtlinie des Beobachters eine Tangente an f durch die Kanalsohle. Steht er weiter weg vom Kanal als die x–Koordinate des eingezeichneten Beobachtungspunktes, kann er den Grund des Kanals nicht mehr sehen.
Die x–Koordinate seines Beobachtungspunktes ergibt sich über den Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden $y = 1.5$ (Augenhöhe des Beobachters). Der Berührpunkt ist $P(u|f(u))$, damit können wir die Punkt-Steigungsformel der Tangente aufstellen mit:
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
Die Talsohle mit $T(0| - 2{,}25)$ ist Punkt dieser Tangentengleichung. Wir machen eine Punktprobe mit T und erhalten:
$-2{,}25 = f'(u) \cdot (0 - u) + f(u)$
$-u \cdot f'(u) + f(u) + 2{,}25 = 0$
Wir bestimmen die Nullstelle dieser Funktion und erhalten $x_1 = 4$ und $x_0 = 0$.
(Letzteres, $x_0 = 0$. ist keine Lösung, der Beobachter kann ja nicht in der Mitte des Kanals an Land stehen).
Hiermit haben wir den Wert von u gefunden, für den die Tangente $t(x)$ durch die Talsohle geht und den Graphen der Funktion $t(x)$ in $B(4|f(4))$ berührt.
Die Augenhöhe der Person ist $1{,}5$, dies bedeutet, dass $t(x) = 1{,}5$ sein muss, also:
$t(x) = 1{,}5 = f'(4) \cdot (x - 4) + f(4)$
$f'(4) \cdot (x - 4) + f(4) - 1{,}5 = 0$
Wiederum bestimmen wir die Nullstelle dieser Funktion mit dem WTR, der den Wert $x_0 = 9{,}23$ liefert.
Die Person muss also höchstens bei $x_0 = 9{,}23$ stehen, um bei einer Augenhöhe von $1{,}5\,m$ bei leerem Kanal noch die tiefste Stelle sehen zu können. Gefragt ist aber nach dem Abstand der Person zum Kanalrand. Dieser liegt bei $C(6|0)$. Wir müssen deshalb vom x_0-Wert noch 6 abziehen.

Klausuraufschrieb

$f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16}$; $f'(x) = \frac{2x(x^2+16)-2x(x^2-36)}{(x^2+16)^2} = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$; $T(0| - 2{,}25)$
Tangente durch $T(0| - 2{,}25)$ und Berührpunkt $B(u|f(u)$ mit K.
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel
Punktprobe mit T:
$-2{,}25 = \frac{112u}{(u^2+16)^2} \cdot (-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16}$
$-u \cdot \frac{112u}{(u^2+16)^2} + \frac{u^2-36}{u^2+16} + 2{,}25 = 0$
WTR WTR WTR
$u_1 = -4$; $u_2 = 0$ $u_3 = 4$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Betrachtung für $u = 4$ entspricht rechten Kanalrand:

$t(x) = 1{,}5 = f'(4) \cdot (x-4) + f(4)$

$f(4) = \frac{4^2-36}{4^2+16} = -\frac{20}{32}; \quad f'(4) = \frac{104 \cdot 4}{32^2} = \frac{416}{1024} = \frac{13}{32}$

$\frac{13}{32} \cdot (x-4) - \frac{20}{32} - 1{,}5 = 0$

$\frac{13}{32}x - \frac{15}{4} = 0$

$x_0 \overset{WTR}{\approx} 9{,}23$

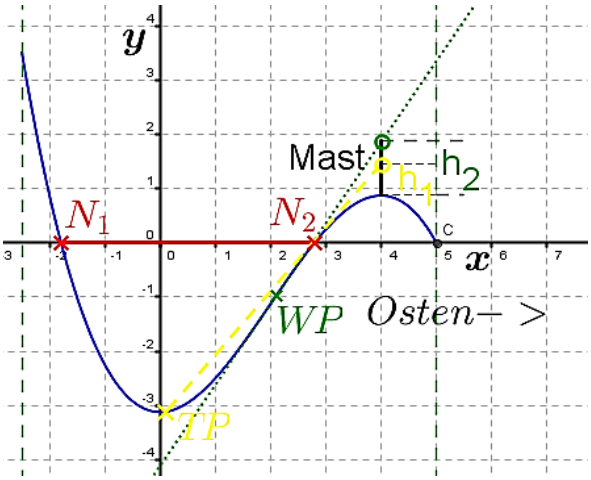
$\Delta x = 9{,}23 - 6{,}0 = 3{,}23$

Die Person darf höchstens $3{,}23\ m$ vom Kanalrand entfernt stehen, um bei einer Augenhöhe von $1{,}5\ m$ bei leerem Kanal noch die tiefste Stelle sehen zu können.

Lösung A4

Lösungslogik

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.



a) *Mindesthöhe des Gerüsts für Beleuchtung bis zur Talsohle (h_1).*
Der Fußpunkt des Mastes liegt im Hochpunkt von f. Zu bestimmen ist die Tangente (gelbe Linie) vom Tiefpunkt aus an das Schaubild von f (Tangente an einen unbekannten Punkt durch einen bekannten anderen Punkt). Diese schneidet die Parallele zur y–Achse durch den Hochpunkt im Punkt S_1, der die Spitze des Gerüstes darstellt. Der Berührpunkt der Tangente an f sei $B(u|f(u))$.
Wir stellen die Punktsteigungsformel für die Tangente auf und schneiden Sie mit der Parallelen zur y–Achse durch den Hochpunkt. Die Differenz aus der y–Koordinate dieses Schnittpunktes und der y–Koordinate des Hochpunkts ergibt die Mindesthöhe des Mastes.

b) *Mindesthöhe des Gerüstes für Beleuchtung des gesamten Tals (h_2).*
Vorgehen wie vor, jedoch dieses Mal mit der Tangente im Wendepunkt WP als bekannter Punkt der Tangente (Tangente an Punkt einer Kurve).

Klausuraufschrieb

$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125; \quad f'(x) = -0{,}375x^2 + 1{,}5x; \quad f''(x) = -0{,}75x + 1{,}5$

a) *Mindesthöhe des Gerüsts für Beleuchtung bis zur Talsohle (h_1):*
Der Fußpunkt des Mastes liegt im Hochpunkt von f.

$f(x)_{max} \overset{WTR}{=} 0{,}875$ für $x \overset{WTR}{=} 4 \Longrightarrow HP(4|0{,}875)$

Tangente an f in $B(u|f(u))$ durch $TP(0|-3{,}125)$:

$t_1(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

Punktprobe mit TP:

$-3{,}125 = (-0{,}375u^2 + 1{,}5u) \cdot (0-u) - 0{,}125u^3 + 0{,}75u^2 - 3{,}125$

$0{,}375u^3 - 1{,}5u^2 - 0{,}125u^3 + 0{,}75u^2 = 0$

$0{,}25u^3 - 0{,}75u^2 = 0$

$0{,}25u^2(u-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 3$

Die Lösung $u = 0$ entfällt, wegen $0 < u < 4$.

$f(3) \overset{WTR}{=} 0{,}25; \quad f'(3) \overset{WTR}{=} 1{,}125$

$t_1(x) = 1{,}125 \cdot (x-3) + 0{,}25$

$t_1(4) = 1{,}125 + 0{,}25 = 1{,}375$

Koordinaten der Spitze des Mastes $S_1(4|1{,}375)$

$h_1 = y_{S_1} - y_{HP} = 1{,}375 - 0{,}875 = 0{,}5$

Die Höhe des Gerüstes muss mindesten $50\,m$ betragen.

b) *Mindesthöhe des Gerüsts für Beleuchtung des gesamten Tals (h_2):*

Wendetangente von f, Bestimmung des Wendepunktes mit $f''(x) = 0$.

$-0{,}75x + 1{,}5 = 0 \quad => \quad x_0 = 2$

$f(2) = -0{,}125 \cdot 2^3 + 0{,}75 \cdot 2^2 - 3{,}125$

$f'(2) = -0{,}375 \cdot 2^2 + 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5$

$t_2(x) = 1{,}5 \cdot (x-2) - 1{,}125$

$t_2(4) = 1{,}5 \cdot 2 - 1{,}125 = 1{,}875$

Koordinaten der Spitze des Mastes $S_2(4|1{,}875)$

$h_2 = y_{S_2} - y_{HP} = 1{,}875 - 0{,}875 = 1$

Die Höhe des Gerüst muss mindestens $100\,m$ hoch werden.

Lösung A5

Lösungslogik

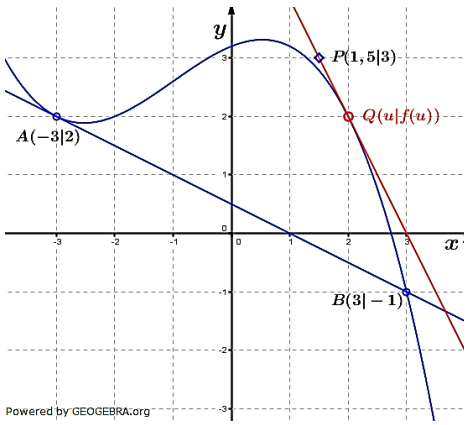
Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.

Windkraftanlage in Fahrtrichtung:

Gesucht ist der Punkt $Q(u|f(u))$ auf f, von dem aus der Fahrer die Windkraftanlage in Fahrtrichtung, das heißt tangential zur Straße, sieht. Wir müssen also die Tangente an f bestimmen, die durch den Punkt $P(1{,}5|3)$ verläuft. Über die Punktsteigungsformel $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ erhalten wir: $3 = f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u)$

$f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u) - 3 = 0$

Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt mit dem WTR.



Klausuraufschrieb

$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2; \quad f'(x) = -0{,}3x^2 - 0{,}6x + 0{,}4;$

Windkraftanlage in Fahrtrichtung:

Tangente an f durch $P(1{,}5|3)$:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$3 = f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u)$ | Punktprobe mit $P(1{,}5|3)$

$f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u) - 3 = 0$

$(-0{,}3u^2 - 0{,}6u + 0{,}4) \cdot (1{,}5-u) + (-0{,}1u^3 - 0{,}3u^2 + 0{,}4u + 3{,}2) - 3 = 0$

$u_1 \overset{WTR}{\approx} -2{,}17; \quad u_2 \overset{WTR}{\approx} 0{,}921; \quad u_3 \overset{WTR}{\approx} 2$

$f(u_1) \overset{WTR}{\approx} 1{,}94; \quad f(u_2) \overset{WTR}{\approx} 3{,}24; \quad f(u_3) \overset{WTR}{\approx} 2;$

Da der Fahrer vom Punkt B aus in Richtung A fährt und der Fahrer den Punkt P vor sich sieht, ist nur die Lösung $Q(u_3|f(u_3))$ relevant.

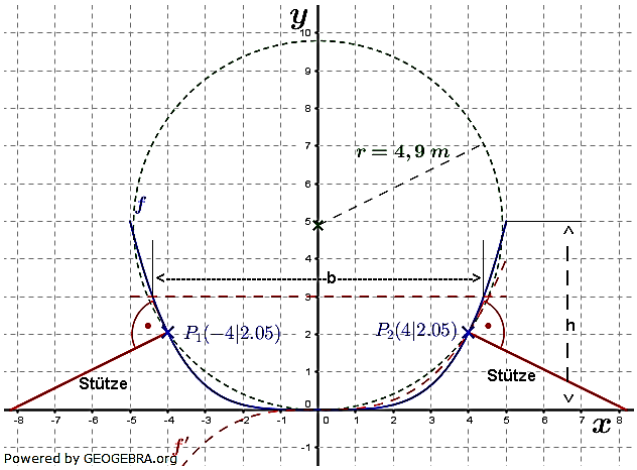
Im Punkt $Q(2|2)$ sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A6

Lösungslogik

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation:



Abstand der Stützenenden auf der Plattform:
Die Stützen sind orthogonal zur Außenwand angebracht, stehen also senkrecht auf der Tangente in den Befestigungspunkten. Wegen der Symmetrie braucht nur eine Hälfte untersucht zu werden. Der Abstand der Stützen auf der Plattform ist also zwei Mal dem Nullstellenwert der Normalen durch den Punkt $P_2(4|f(4))$.

Klausuraufschrieb

$f(x) = \frac{1}{125}x^4; \quad f'(x) = \frac{4}{125}x^3; \ P_2(4|f(4))$

Abstand der Stützenden am Boden:
Aus Symmetriegründen nur Betrachtung der rechten Profilseite.

$f(4) = \frac{1}{125} \cdot 4^4 = \frac{256}{125} = 2{,}048$

$P_2(4|2{,}048)$

Gleichung der Normalen an f durch P_2:

$n(x) = -\frac{1}{f'(4)} \cdot (x-4) + f(4)$

$f'(4) = \frac{4}{125} \cdot 4^3 = \frac{256}{125}$

$n(x) = -\frac{1}{\frac{256}{125}} \cdot (x-4) + \frac{256}{125} = -\frac{125}{256}x + 4$

Nullstelle von n:

$n(x) = 0 \implies x \overset{\text{WTR}}{\approx} 8{,}2$

Der Abstand der beiden Stützen am Boden beträgt etwa $16{,}4\ m$.

Lösung A7

$g(x) = x - \frac{1}{x^3}; \quad g'(x) = 1 + \frac{3}{x^4}; \quad B(u|f(u))$

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$t(x) = \left(1 - \frac{3}{u^4}\right) \cdot (x-u) + u - \frac{1}{u^3}$

$-0{,}5 = \left(1 + \frac{3}{u^4}\right) \cdot (0-u) + u - \frac{1}{u^3}$ | Punktprobe mit $P(0|-0{,}5)$

$\left(1 + \frac{3}{u^4}\right) \cdot (0-u) + u - \frac{1}{u^3} + 0{,}5 = 0$

$u_1 \overset{\text{WTR}}{=} 2$

$g(2) = 2 - \frac{1}{2^3} = \frac{15}{8}; \quad g'(2) = 1 + \frac{3}{2^4} = \frac{19}{16}$

$t(x) = \frac{19}{16} \cdot (x-2) + \frac{15}{8} = \frac{19}{16}x - \frac{1}{2}$

$B\left(2\middle|\frac{15}{8}\right)$