Aufgabe A1

Gib die Gleichung der Tangente an K_f im Berührpunkt P an.

a) $f(x) = 2x^3 + x^2;\ \ P\left(2\middle|f(2)\right)$

b) $f(x) = (x^2+2)^2;\ \ P(1|f(1))$

c) $f(x) = 4(x^2+x)^2;\ \ P\left(1\middle|f(1)\right)$

d) $f(x) = 2x^2 - 2;\ \ P\left(1{,}5\middle|f(1{,}5)\right)$

e) $f(x) = x^2 + 1;\ \ P\left(0{,}5\middle|f(0{,}5)\right)$

f) $f(x) = x^2;\ \ P\left(-1\middle|f(-1)\right)$

g) $f(x) = x^2 - x;\ \ P\left(-\frac{1}{3}\middle|f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

Aufgabe A2

Gib die Gleichung der Tangente an K_f im Berührpunkt P an.

a) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5};\ \ P\left(2\middle|f(2)\right)$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+0{,}75};\ \ P\left(-0{,}5\middle|f(-0{,}5)\right)$

c) $f(x) = \sqrt{x} + x;\ \ P\left(4\middle|f(4)\right)$

Aufgabe A3

Bestimme die Funktionsgleichung der Normalen zu f durch Q.

a) $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + x - 4;\ \ Q\left(1\middle|f(1)\right)$

b) $f(x) = (x-4)(x+4);\ \ Q(4|f(4))$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6;\ \ Q\left(-2\middle|f(-2)\right)$

d) $f(x) = x^3 - 2x + 2;\ \ Q\left(-3\middle|f(-3)\right)$

e) $f(x) = (x-4)(x+3);\ \ Q\left(-4\middle|f(-4)\right)$

f) $f(x) = 2x^2 - 1;\ \ Q\left(0\middle|f(0)\right)$

g) $f(x) = -x^2 + 3x + 3;\ \ Q\left(-1\middle|f(-1)\right)$

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

Bestimmung von $f'(x)$ — $f'(x) = 6x^2 + 2x$

Bestimmung von $f(2)$ — $f(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 = 20$

Bestimmung von $f'(2)$ — $f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 28$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$ — $t(x) = 28 \cdot (x-2) + 28$

$t(x) = 28x + 28$

b) $f(x) = (x^2+2)^2;\ \ P\big(1\big|f(1)\big)$ — $f'(x) = 2(x^2+2) \cdot 2x$

$f'(1) = 2(1+2) \cdot 1 = 6$ — $f(1) = (1+2)^2 = 9$

$t(x) = 6(x-1) + 9$

$t(x) = 6x + 3$

c) $f(x) = 4x^2(x^2+x)^2;\ \ P\big(1\big|f(1)\big)$ — $f(x) = 4x^2(x^4 + 2x^3 + x^2)$

$f(x) = 4x^6 + 8x^5 + 4x^2$ — $f'(x) = 24x^5 + 40x^4 + 8x$

$f'(1) = 24 + 40 + 8 = 72$ — $f(1) = 16$

$t(x) = 72(x-1) + 16$

$t(x) = 72x - 56$

d) $f(x) = 2x^2 - 2;\ \ P\big(1{,}5\big|f(1{,}5)\big)$ — $f'(x) = 4x$

$f'(1{,}5) = 6$ — $f(1{,}5) = 2{,}5$

$t(x) = 6(x - 1{,}5) + 2{,}5$

$t(x) = 6x - 6{,}5$

e) $f(x) = x^2 + 1;\ \ P\big(0{,}5\big|f(0{,}5)\big)$ — $f'(x) = 2x$

$f'(0{,}5) = 1$ — $f(0{,}5) = 1{,}25$

$t(x) = (x - 0{,}5) + 1{,}25$

$t(x) = x + 0{,}75$

f) $f(x) = x^2;\ \ P\big(-1\big|f(-1)\big)$ — $f'(x) = 2x$

$f'(-1) = -2$ — $f(-1) = 1$

$t(x) = -2(x+1) + 1$

$t(x) = -2x - 1$

g) $f(x) = x^2 - x;\ \ P\left(-\frac{1}{3}\middle|f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ — $f'(x) = 2x - 1$

$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$ — $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

$t(x) = -\frac{5}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9}$

$t(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{9}$

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a) $f(x) = 2\sqrt{x^2+5};\ \ P\big(2\big|f(2)\big)$

Für die Ableitung: $f(x) = 2 \cdot (x^2+5)^{\frac{1}{2}}$

Bestimmung von $f'(x)$ — $f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

Bestimmung von $f(2)$ — $f(2) = 2 \cdot \sqrt{2^2+5} = 6$

Bestimmung von $f'(2)$ — $f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$

Aufstellung der Tangentengleichung

$t(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$ — $t(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-2) + 6$

$t(x) = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+0{,}75}=(x^2+0{,}75)^{\frac{1}{2}};\quad P\big(-0{,}5\big|f(-0{,}5)\big)$

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+0{,}75)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+0{,}75}}$

$f'(-0{,}5)=-\frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}25+0{,}75}}=-0{,}5$ $\quad f(-0{,}5)=\sqrt{0{,}25+0{,}75}=1$

$t(x)=-0{,}5(x+0{,}5)+1$

$t(x)=-0{,}5x+0{,}75$

c) $f(x)=\sqrt{x}+x=x^{\frac{1}{2}}+x;\quad P\big(4\big|f(4)\big)$

$f'^{(x)}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$

$f'(4)=\frac{0{,}5}{2\sqrt{4}}+1=1{,}125$ $\quad f(4)=\sqrt{4}+4=6$

$t(x)=1{,}125(x-4)+6$

$t(x)=-1{,}125x+1{,}5$

Lösung A3

Detaillierte Lösung für a)

Bestimmung von $f'(x)$ $\quad f'(x)=5x+1$

Bestimmung von $f(1)$ $\quad f(1)=\frac{5}{2}\cdot 1^2+1-4=-0{,}5$

Bestimmung von $f'(2)$ $\quad f'(1)=5\cdot 1+1=6$

Aufstellung der Normalengleichung

$t(x)=-\frac{1}{f'(1)}\cdot(x-1)+f(1)$ $\quad n(x)=-\frac{1}{6}\cdot(x-1)-0{,}5$

$n(x)=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$

b) $f(x)=(x-4)(x+4)$

$=x^2-16;\quad Q\big(4\big|f(4)\big)$ $\quad f'(x)=2x$

$f'(4)=2\cdot 4=8$ $\quad f(4)=(4-4)(4+4)=0$

$n(x)=-\frac{1}{8}(x-4)+0$

$n(x)=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$

c) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-4x+6;\quad P\big(-2\big|f(-2)\big)$ $\quad f'(x)=-x-4$

$f'(-2)=4-4=0$ $\quad f(-2)=-2+8+6=12$

Wegen $f'(-2)=0$ (waagrechte Tangente) ist die Gleichung der Normalen

$x=12$

d) $f(x)=x^3-2x+2;\quad Q\big(-3\big|f(-3)\big)$ $\quad f'(x)=3x^2-2$

$f'(-3)=3\cdot(-3)^2-2=25$ $\quad f(-3)=-27+6+2=-19$

$n(x)=-\frac{1}{25}(x+3)-19$

$n(x)=-\frac{1}{25}x-19{,}12$

e) $f(x)=(x-4)(x+3)$

$=x^2-x-12;\quad Q\big(-4\big|f(-4)\big)$ $\quad f'(x)=2x-1$

$f'(-4)=-9$ $\quad f(-4)=0$

$n(x)=\frac{1}{9}(x+4)$

$n(x)=\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$

f) $f(x)=2x^2-1;\quad P\big(0\big|f(0)\big)$ $\quad f'(x)=4x$

$f'(0)=0$ $\quad f(0)=-1$

Wegen $f'(0)=0$ (waagrechte Tangente) ist die Gleichung der Normalen

$x=0$

g) $f(x) = -x^2 + 3x + 3;\quad Q\big(-1\big|f(-1)\big)$ $\qquad f'(x) = -2x + 3$

$f'(-1) = 5$ $\qquad f(-1) = -1$

$n(x) = -\frac{1}{5}(x+1) - 1$

$n(x) = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$