

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion $3x^3 - 3x$. Bestimme die Normale im Wendepunkt.



Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Bestimme die Gleichung der Normalen,

- welche parallel zur Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist.
- welche orthogonal zu der Geraden $y = -4x + 4$ ist.

Aufgabe A3

Bestimme die Gleichung der Tangenten an f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$, die die Steigung $m = 2$ besitzt. Bestimme auch diejenige Tangente, die parallel zur Geraden $y = -4x + 10$ verläuft.

Aufgabe A4

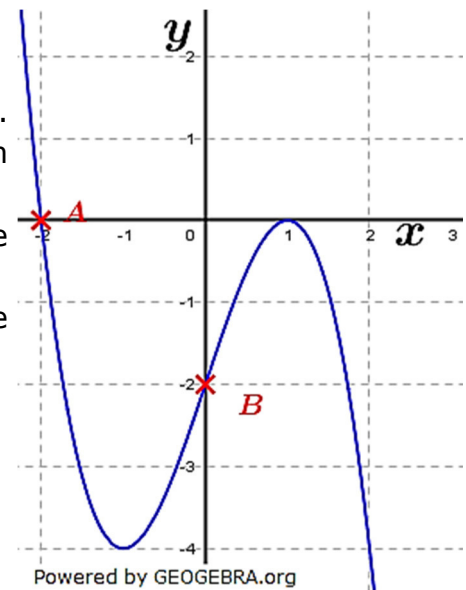
K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 3)$; $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale an K in $x_0 = 1$.
- Welche Tangenten an K verlaufen parallel zur Geraden g mit $y = 2,25x - 1$?
- Welche Tangenten an K stehen senkrecht auf der Geraden h mit $y = 1,5x + 4$?
- In welchen Kurvenpunkten besitzt K eine waagrechte Tangente?
- In welchen Kurvenpunkten verläuft die Normale von K parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = 2,4$?

Aufgabe A5

K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -(x - 1)^2(2 + x)$; $x \in \mathbb{R}$.

- K schneidet die Koordinatenachsen in A und B . Eine Tangente an K ist parallel zur Geraden durch A und B . Bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte auf zwei Dezimalstellen gerundet.
- Unter welchem Winkel schneidet K die x -Achse in A ?



Lösung A1

$$f(x) = 3x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 9x^2 - 3$$

$$f''(x) = 18x$$

Bestimmung der Wendestelle über $f''(x) = 0$:

$$18x = 0$$

$$x = 0$$

y-Koordinate des Wendepunktes über $f(0)$:

$$f(0) = 0$$

$$WP(0|0)$$

Bestimmung der Steigung des Wendepunktes über $f'(0)$:

$$f'(0) = 9 \cdot 0 - 3 = -3$$

Aufstellung der Normalengleichung über die Punkt-Steigungs-Formel:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) \qquad n(x) = -\frac{1}{-3} (x + 3) + 0$$

$$n(x) = \frac{1}{3}x + 1$$

Lösung A2

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

- a) Parallelität bedeutet, dass die Steigungen von gegebener Gerade und gesuchter Normalen den gleichen Wert haben müssen.

Die gegebene Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ hat die Steigung $m_g = \frac{1}{2}$. Somit muss die

Steigung der Normalen $m_n = \frac{1}{2}$ sein. Da eine Normale orthogonal auf der

Tangente stehen muss, muss $m_t = -2$ sein wegen $m_t \cdot m_n = -1$. Somit ist auch $f'(x) = -2$.

$$2x - 6 = -2 \qquad | \quad +6$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3$$

Kurvenpunkt $P(2|-3)$

Gleichung der Normalen über die Punktsteigungsformel:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) \qquad n(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) - 3$$

$$n(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

- b) Wegen der Angabe einer Normalen, die orthogonal auf einer Geraden stehen soll, muss diese Gerade parallel zu einer Tangente der Kurve sein. Die gegebene Gerade $y = -4x + 4$ hat die Steigung $m_g = -4$, also muss auch

$f'(x) = -4$ sein.

$$2x - 6 = -4 \qquad | \quad +6$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 0$$

Kurvenpunkt $P(1|0)$

Da eine Normale orthogonal auf der Tangente stehen muss, muss $m_n = \frac{1}{4}$ sein wegen $m_t \cdot m_n = -1$.

Gleichung der Normalen über die Punktsteigungsformel:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u) \qquad n(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 1) + 0$$

$$n(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Lösung A3

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

Tangente mit $m_t = 2 = f'(x)$:

$$2x - 4 = 2 \quad | \quad +4$$

$$2x = 6; \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$$

Kurvenpunkt $P(3 | -2)$

Gleichung der Tangente über die Punktsteigungsformel:

$$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u) \quad t(x) = 2 \cdot (x - 3) - 2$$

$$t(x) = 2x - 8$$

Eine Tangente parallel zu $y = -4x + 10$ muss die Steigung $m_t = m_g = f'(x) = -4$ haben:

$$2x - 4 = -4 \quad | \quad +4$$

$$2x = 0; \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$$

Kurvenpunkt $P(0 | 1)$

Gleichung der Tangente über die Punktsteigungsformel:

$$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u) \quad t(x) = -4 \cdot (x - 0) + 1$$

$$t(x) = -4x + 1$$

Lösung A4

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 3) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

a) Tangente und Normale in $x_0 = 1$:

$$m_t = f'(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{4}{3}$$

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^2(1 - 3) = -\frac{1}{2}$$

Kurvenpunkt $P\left(1 \mid -\frac{1}{2}\right)$

$$t(x) = -\frac{3}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$n(x) = \frac{4}{3}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}x - \frac{11}{6}$$

b) Tangenten parallel zu $y = 2,25x - 1$:

Die Tangenten müssen die Steigung $m_t = f'(x) = 2,25$ haben:

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 2,25 \quad | \quad -2,25$$

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2,25 = 0 \quad | \quad \cdot 4$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad | \quad :3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1+3} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_{1,2} = +1 \pm 2$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -1$$

$$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^2(3 - 3) = 0 \quad f(-1) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^2(-1 - 3) = -1$$

Kurvenpunkte $P_1(3 | 0)$ und $P_2(-1 | -1)$.

$$t_1(x) = 2,25(x - 3) = 2,25x - 6,75$$

$$t_2(x) = 2,25(x + 1) - 1 = 2,25x + 1,25$$

- c) Die Tangente senkrecht auf $y = 2,25x - 1$ muss die Steigung $m_t = f'(x) = -\frac{1}{1,5} = -\frac{2}{3}$ haben.

$$\begin{array}{l|l} \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{2}{3} & | \quad +\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} = 0 & | \quad \cdot 12 \\ 9x^2 - 18x + 8 = 0 & | \quad :9 \\ x^2 - 2x + \frac{8}{9} = 0 & \end{array}$$

$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_{1,2} = +1 \pm \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{4}{3} - 3\right) = -\frac{20}{27} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 3\right) = -\frac{7}{27}$$

Kurvenpunkte $P_1\left(\frac{4}{3} \mid -\frac{20}{27}\right)$ und $P_2\left(\frac{2}{3} \mid -\frac{7}{27}\right)$.

$$t_1(x) = \frac{3}{2} \left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{20}{27} = \frac{3}{2}x - \frac{74}{27}$$

$$t_2(x) = \frac{3}{2} \left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{7}{27} = \frac{3}{2}x - \frac{37}{27}$$

- d) Waagrechte Tangenten haben die Steigung $m_t = f'(x) = 0$

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0$$

$$x \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \cdot (0)^2 (0 - 3) = 0 \quad f(2) = \frac{1}{4} \cdot (2)^2 (2 - 3) = -1$$

Kurvenpunkte mit waagrechter Tangente $P_1(0|0)$ und $P_2(2|-1)$.

- e) Die parallele Normale muss ebenfalls die Steigung $m_n = 2,4$ haben. Somit muss $m_t = -\frac{1}{m_n} = -\frac{1}{2,4} = -\frac{5}{12} = f'(x)$ sein.

$$\begin{array}{l|l} \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{5}{12} & | \quad +\frac{5}{12} \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{12} = 0 & | \quad \cdot 12 \\ 9x^2 - 18x + 5 = 0 & | \quad :9 \\ x^2 - 2x + \frac{5}{9} = 0 & \end{array}$$

$$x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1 - \frac{5}{9}} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_{1,2} = +1 \pm \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{5}{3} - 3\right) = -\frac{25}{27} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{27}$$

In den Kurvenpunkten $P_1\left(\frac{5}{3} \mid -\frac{25}{27}\right)$ bzw. $P_2\left(\frac{1}{3} \mid -\frac{2}{27}\right)$ verläuft die Normale von K parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $m = 2,4$.

Lösung A5

$$f(x) = -(x-1)^2(2+x) = -x^3 + 3x - 2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

a) Tangente parallel zur Geraden durch A und B.

$$A(-2|0); B(0|-2)$$

| abgelesen aus Graphik

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - (-2)} = -1$$

$$\text{Tangentensteigung } m_t = f'(x) = -1$$

$$-3x^2 + 3 = -1$$

$$|-3$$

$$-3x^2 = -4$$

$$3x^2 = 4$$

$$| :3$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$|\sqrt{}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1,15$$

$$f(1,15) = -(1,15-1)^2(2+1,15) = -0,07$$

$$f(-1,15) = -(-1,15-1)^2(2-1,15) = -3,93$$

Die Berührungspunkte haben die Koordinaten $P_1(1,15|-0,07)$ bzw. $P_2(-1,15|-3,93)$.

b) Winkel in der Nullstelle $A(-2|0)$:

Schnittwinkel mit der x -Achse über $m = \tan(\alpha) = f'(-2)$.

$$f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 3 = -9$$

$$\tan(\alpha) = -9$$

$$\alpha = \arctan(-9) = -83,66^\circ$$

Als Schnittwinkel mit der x -Achse zählt jedoch der Winkel, den die x -Achse **linksdrehend** mit der Geraden einschließt. Wegen des negativen Tangens muss hier die Ergänzung zu 180° gebildet werden:

$$\alpha^* = 180^\circ - 83,66^\circ = 96,34^\circ$$

K schneidet die x -Achse in A unter $96,34^\circ$.