Aufgabe A1

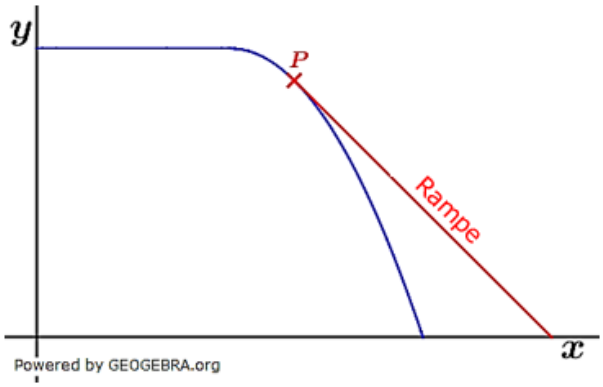
K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 3);\ x \in \mathbb{R}$.
Es gibt zwei Tangenten an K, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden verlaufen. Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte exakt.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2;\ x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K.
t ist die Tangenten an K in $x = 2$, n ist die Normale an K in $P(-1|f(-1))$.
Bestimme die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von t und n.

Aufgabe A3

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Erdhügels.
Für $3 \le x \le 6$ wird die Berandung beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$.
Im Punkt $P(4|f(4))$ wurde tangential eine Rampe angelegt.
Der Herstelle eines Geländewagens gibt den maximalen Steigungswinkel von $42°$ an.
Kommt der Geländewagen die Rampe hoch?



Aufgabe A4

Zeige, dass sich die Graphen von f und g berühren und bestimme die Koordinaten des Berührpunktes P sowie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente.

a) $f(x) = x^2 - 3;\ g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6;\ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{5}{6}x$

c) $f(x) = \frac{5}{x} + 2;\ g(x) = x^3 + 4x^2 - 6$

d) $f(x) = sin(x) - 2;\ g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x - 2$

e) $f(x) = cos(x);\ g(x) = \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - 1$

f) $f(x) = e^x - 4;\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

Aufgabe A5

Bestimme die Parameter a und b im Term der Funktion f so, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle x_0 berühren.

a) $f(x) = ax^2 + b;\ g(x) = -x^2 + 3x + \frac{3}{2};\ x_0 = 1$

b) $f(x) = a \cdot e^x + b;\ g(x) = x^3 + 2x - 1;\ x_0 = 0$

c) $f(x) = a\sqrt{x} + bx;\ g(x) = \frac{1}{972}x^3 - \frac{1}{12}x;\ x_0 = 9$

d) $f(x) = acos(x) + b;\ g(x) = \frac{1}{\pi}x^2 - 4x - 1 + \frac{7\pi}{4};\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 3) = \frac{1}{3}x^3 - x$

$f'(x) = x^2 - 1$

Gleichung der ersten Winkelhalbierenden: $y = x$ mit $m = 1$.

$f'(x) = 1$:

$x^2 - 1 = 1$

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\sqrt{2}$

Die Koordinaten der Berührpunkte sind $B_1\left(\sqrt{2}\middle|-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$ und $B_2\left(-\sqrt{2}\middle|\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$.

Lösung A2

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2$

$f'(x) = 2x^3 - 3x^2$

$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 2^3 - 2 = -2$

$f'(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 4$

$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 2 = \frac{1}{2} + 1 - 2 = -0{,}5$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -2 - 3 = -5$

Tangente:

$t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

$t(x) = 4(x - 2) - 2 = 4x - 10$

Normale:

$n(x) = -\frac{1}{f'(-1)} \cdot (x + 1) + f(-1)$

$n(x) = \frac{1}{5}(x + 1) - 0{,}5 = 0{,}2x - 0{,}3$

$t(x) \cap n(x)$

$4x - 10 = 0{,}2x - 0{,}3$

$3{,}8x = 9{,}7$

$x = \frac{9{,}7}{3{,}8} = \frac{97}{38}$

$t\left(\frac{97}{38}\right) = 4 \cdot \frac{97}{38} - 10 = \frac{4}{19}$

Der Schnittpunkt von t und n hat die Koordinaten $S\left(\frac{97}{38}\middle|\frac{4}{19}\right)$.

Lösung A3

$f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = 3 - x$

$f(4) = 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 4$

$f'(4) = 3 - 4 = -1$

$t(\alpha) = m = -1 \quad => \quad \alpha = 45°$

Der Geländewagen kommt ***nicht*** die Rampe hoch.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A4

Detaillierte Lösung für a)

$f(x) = x^2 - 3;\ \ g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$

Berührpunkt mit gemeinsamer Tangente bedeutet, dass die Steigungen der Graphen der beiden Funktionen gleich groß sind, also $f'(x) = g'(x)$.

$f'(x) = 2x;\ \ g'(x) = -x + 6$

$f'(x) \cap g'(x)$

$2x = -x + 6$

$3x = 6$

$x = 2$

An der Stelle $x_0 = 2$ haben die Graphen der beiden Funktionen dieselbe Steigung.
Es ist noch zu prüfen, ob diese Stelle auch Stelle eines gemeinsamen Punktes ist:

$f(2) = 4 - 3 = 1;\ \ g(2) = -2 + 12 - 9 = 1$

Die beiden Graphen berühren sich im Punkt $B(2|1)$.
Tangente:

$f'(2) = 4$

$t(x) = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

$t(x) = 4(x - 2) + 1 = 4x - 7$

Alternative Lösung:
Wir bilden $f(x) \cap g(x)$, erhalten wir dabei nur eine Lösung, muss der Schnittpunkt ein Berührpunkt sein.

$f(x) \cap g(x)$

$x^2 - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 9$

$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0 \qquad | \quad \cdot\frac{2}{3}$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2$

Es gibt nur einen einzAigen Schnittpunkt, der somit ein Berührpunkt sein muss. Weiter wie oben.

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6;\ \ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{5}{6}x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \ g'(x) = \frac{1}{9}x - \frac{5}{6}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{9}x - \frac{5}{6} \qquad | \quad ^2$

$\frac{1}{4x} = \frac{1}{81}x^2 - \frac{10}{54}x + \frac{25}{36} \qquad | \quad \cdot 324x$

$81 = 4x^3 - 6x^2 + 225x$

$4x^3 - 6x^2 + 225x - 81 = 0$

WTR

$x = 9$

$f(9) = 3 - 6 = -3;\ \ g(9) = 4{,}5 - 7{,}5 = -3$

Berührpunkt $B(9|-3)$

$f'(9) = \frac{1}{6}$

$t(x) = f'(9) \cdot (x - 9) + f(9)$

$t(x) = \frac{1}{6}(x - 9) - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{9}{2}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) $f(x) = \frac{5}{x} + 2;\ \ g(x) = x^3 + 4x^2 - 6$

$f'(x) = -\frac{5}{x^2};\ \ g'(x) = 3x^2 + 8x$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-\frac{5}{x^2} = 3x^2 + 8x \qquad | \quad \cdot x^2$

$-5 = 3x^4 + 8x^3$

$3x^4 + 8x^3 + 5 = 0$

$x_1 \overset{WTR}{=} -1;\quad x_2 \overset{WTR}{\approx} -2{,}57$

$f(-1) = -3;\ \ g(-1) = -3 \qquad f(-2{,}57) \overset{WTR}{\approx} 0{,}054;\quad g(-2{,}57) = 3{,}445$

Berührpunkt $B(-1|-3)$

$f'(-1) = -5$

$t(x) = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$

$t(x) = -5(x+1) - 3 = -5x - 8$

d) $f(x) = sin(x) - 2;\ \ g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x - 2$

$f'(x) = cos(x);\ \ g'(x) = -x^2 + 1$

$f'(x) \cap g'(x)$

$cos(x) = -x^2 + 1 \qquad | \quad +x^2 - 1$

$cos(x) + x^2 - 1 = 0$

$x \overset{WTR}{=} 0$

$f(0) = -2;\ \ g(0) = -2$

Berührpunkt $B(0|-2)$

$f'(0) = 1$

$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$t(x) = x - 2$

e) $f(x) = cos(x);\ \ g(x) = \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - 1$

$f'(x) = -sin(x);\ \ g'(x) = x - \pi$

$f'(x) \cap g'(x)$

$-sin(x) = x - \pi \qquad | \quad -x + \pi$

$-sin(x) - x + \pi = 0$

$x = \pi$

$f(\pi) = -1;\ \ g(\pi) = -1$

Berührpunkt $B(\pi|-1)$

$f'(\pi) = 0$

$t(x) = f'(\pi) \cdot (x - \pi) + f(\pi)$

$t(x) = -1$

f) $f(x) = e^x - 4;\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

$f'(x) = e^x;\ \ g'(x) = x + 1$

$f'(x) \cap g'(x)$

$e^x = x + 1 \qquad | \quad -x - 1$

$e^x - x - 1 = 0$

$x = 0$

$f(0) = -3;\ \ g(0) = -3$

Berührpunkt $B(0|-3)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$f'(0) = 1$
$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$
$t(x) = x - 3$

Lösung A5

a) $f(x) = ax^2 + b;\ \ g(x) = -x^2 + 3x + \frac{3}{2};\ \ x_0 = 1$
$f'(x) = 2ax;\ \ \ g'(x) = -2x + 3$
$f'(x) \cap g'(x)$
$2ax = -2x + 3 \qquad | \quad +2x$
$2ax - 2x = 3$
Für $x_0 = 1$ gilt demnach:
$2a - 2 = 3 \qquad | \quad +2$
$2a = 5$
$a = 2{,}5$
$f(x) = 2{,}5x^2 + b$
$g(1) = -(1)^2 + 3 \cdot 1 + \frac{3}{2} = 3{,}5 = f(1)$
$3{,}5 = 2{,}5 \cdot 1^2 + b$
$b = 1$
Für $a = 2{,}5$ und $b = 1$ berühren sich f und g in $x_0 = 1$.

b) $f(x) = a \cdot e^x + b;\ \ g(x) = x^3 + 2x - 1;\ \ x_0 = 0$
$f'(x) = a \cdot e^x;\ \ \ g'(x) = 3x^2 + 2$
$f'(x) \cap g'(x)$
$a \cdot e^x = 3x^2 + 2$
Für $x_0 = 0$ gilt demnach:
$2a \cdot e^0 = 3 \cdot 0^2 + 2$
$2a = 2$
$a = 1$
$f(x) = e^x + b$
$g(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 = f(0)$
$-1 = e^0 + b$
$b = -2$
Für $a = 1$ und $b = -2$ berühren sich f und g in $x_0 = 0$.

c) $f(x) = a\sqrt{x} + bx;\ \ g(x) = \frac{1}{972}x^3 - \frac{1}{12}x;\ \ x_0 = 9$
$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + b;\ \ \ g'(x) = \frac{1}{324}x^2 - \frac{1}{12}$
$f'(x) \cap g'(x)$
$\frac{a}{2\sqrt{x}} + b = \frac{1}{324}x^2 - \frac{1}{12}$
Für $x_0 = 9$ gilt demnach:
$\frac{a}{6} + b = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \qquad | \quad \cdot 6$
$a + 6b = 1$
$g(9) = \frac{3}{4} - \frac{9}{12} = 0 = f(9)$
$0 = 3a + 9b$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & a+6b=1 & \mid \quad \cdot 3 \\ \text{(II)} & 3a+9b=0 & \\ \text{(I)} & 3a+18b=3 & \\ \underline{\text{(II)}} & \underline{3a+9b=0} & \\ \text{(I)-(II)} & 0a+9b=3 & \mid \quad :9 \\ & b=\frac{1}{3} & \end{array}$$

$$b \rightarrow (II)\ 3a+9\cdot\frac{1}{3}=0$$
$$3a=-3$$
$$a=-1$$

Für $a=-1$ und $b=\frac{1}{3}$ berühren sich f und g in $x_0=9$.

d) $f(x)=acos(x)+b;\ \ g(x)=\frac{1}{\pi}x^2-4x-1+\frac{7\pi}{4};\ \ x_0=\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=-asin(x);\ \ g'(x)=\frac{2}{\pi}x-4$

$f'(x)\cap g'(x)$

$-asin(x)=\frac{2}{\pi}x-4$

Für $x_0=\frac{\pi}{2}$ gilt demnach:

$-asin(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-4$

$-a=-3;\ \ a=3$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-4\cdot\frac{\pi}{2}-1+\frac{7}{4}\pi=\frac{\pi}{4}-2\pi-1+\frac{7}{4}\pi=-1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$-1=3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+b$

$-1=0+b$

$b=-1$

Für $a=3$ und $b=-1$ berühren sich f und g in $x_0=\frac{\pi}{2}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de