Lösung A1

$f(x) = x^3 - 6$
$f'(x) = 3x^2$

a) $f(1{,}2) = 1{,}2^3 - 6 = -4{,}272$
$f'(1{,}2) = 3 \cdot 1{,}2^2 = 4{,}32$
$t(x) = f'(1{,}2) \cdot (x - 1{,}2) + f(1{,}2)$
$t(x) = 4{,}32 \cdot (x - 1{,}2) - 4{,}272 = 4{,}32x - 9{,}456$

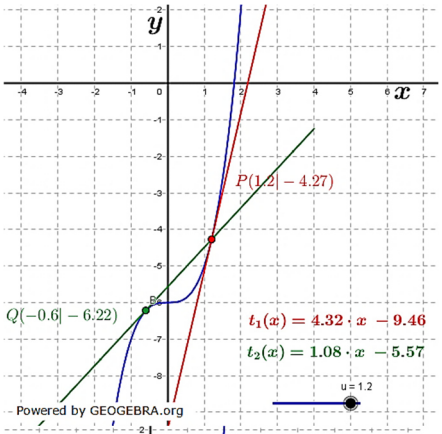
b) Alle Tangenten zu t parallel müssen die Steigung $m = f'(x) = 4{,}32$ haben.
$4{,}32 = 3x^2 \quad | \quad :3$
$x^2 = 1{,}44 \quad | \quad \sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm 1{,}2$
Für $x_1 = 1{,}2$ siehe Aufgabenteil a).
$f(-1{,}2) = (-1{,}2)^3 - 6 = -7{,}728$
$f'(-1{,}2) = 3 \cdot (-1{,}2)^2 = 4{,}32$
$t_{-1,2}(x) = 4{,}32 \cdot (x + 1{,}2) - 7{,}728$
$t_{-1,2}(x) = 4{,}32x - 2{,}544$
Alle zu t orthogonalen Tangenten müssen die Steigung $4{,}32 \cdot m_2 = -1$ haben.
$m_2 = -\frac{1}{4{,}32} = -0{,}2315 = f'(x)$
$-0{,}2315 = 3x^2 \quad | \quad :3$
$x^2 = -0{,}077 \quad | \quad \sqrt{}$
$\mathbb{L} = \{\}$
Es gibt keine zu t orthogonale Tangenten an f.

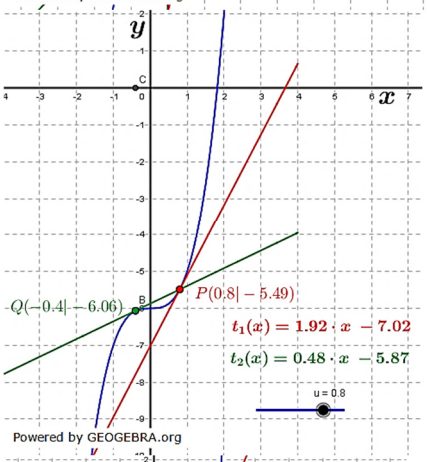
c) Dies sind Tangenten ***vom*** Punkt $P(1{,}2|f(1{,}2))$ aus an den Graphen von f.
Der Berührpunkt von f sei nun $B(u|f(u))$.
$f(u) = u^3 - 6$
$f'(u) = 3u^2$
$t_u(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
$-4{,}272 = 3u^2 \cdot (1{,}2 - u) + u^3 - 6 \quad | \quad$ Punktprobe mit $P(1{,}2|f(1{,}2))$
$-2u^3 + 3{,}6u^2 - 6 = -4{,}272 \quad | \quad +4{,}272$
$-2u^3 + 3{,}6u^2 - 1{,}728 = 0$
$u_1 \overset{\text{WTR}}{=} -0{,}60; \quad u_2 \overset{\text{WTR}}{=} 1{,}2$
$f(-0{,}6) = (-0{,}6)^3 - 6 = -6{,}216$
$f'(-0{,}6) = 3 \cdot (-0{,}6)^2 = 1{,}08$
$t_{u1}(x) = f'(-{,}6) \cdot (x + 0{,}6) + f(-0{,}6)$
$t_{u1}(x) = 1{,}08 \cdot (x + 0{,}6) - 6{,}216 = 1{,}08x - 5{,}568$
Für $u_2 = 1{,}2$ siehe Aufgabenteil a)

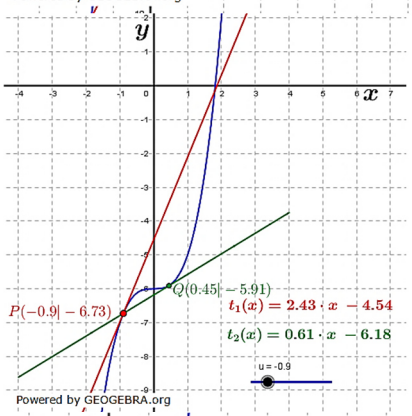
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

d) Die seitlichen Grafiken zeigen vier verschiedene Situationen.

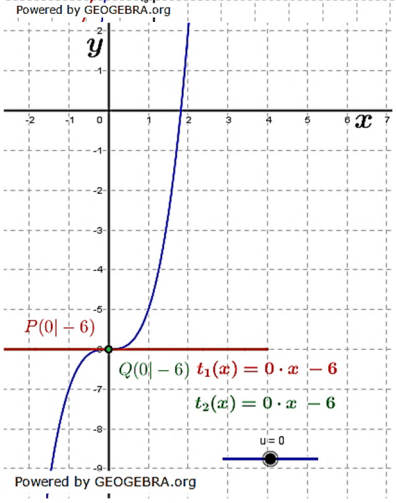
Wie wir in den ersten drei Grafiken erkennen, gibt es neben der Tangente im Punkt P der Kurve eine zweite Tangente an die Kurve, die durch den Punkt P verläuft. Der zugehörige Berührpunkt ist der Punkt Q.







Fallen die Punkte P und Q aber zusammen, so fallen auch die beiden Tangenten zu einer Tangente zusammen.
Diese Situation tritt im Wendepunkt der des Graphen der Funktion auf.
Miriana hat also Recht mit Ausnahme der Wendestelle des Graphen von f.



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

e) $g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x \qquad g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2} \qquad g''(x) = 6x$

Der (bekannte) Tangentenpunkt sei $P(u|g(u))$

1. Situation: Tangente in $P(u|g(u))$

$g(u) = u^3 + \frac{1}{2}u; \quad g'(u) = 3u^2 + \frac{1}{2}$

$t_1(x) = g'(u) \cdot (x - u) + g(u))$

$t_1(x) = \left(3u^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - u) + u^3 + \frac{1}{2}u$

$t_1(x) = 3u^2x - 3u^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}u + u^3 + \frac{1}{2}u$

$t_1(x) = 3u^2x + \frac{1}{2}x - 2u^3$

$t_1(x) = \left(3u^2 + \frac{1}{2}\right)x - 2u^3$

2. Situation: Tangente von P aus an die Kurve, der (unbekannte) Tangentenpunkt sei $Q(v|f(v))$.

$g(v) = v^3 + \frac{1}{2}v; \quad g'(v) = 3v^2 + \frac{1}{2}$

$t_2(x) = g'(v) \cdot (x - v) + f(v))$

$t_2(x) = \left(3v^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot (x - v) + v^3 + \frac{1}{2}v$

$t_2(x) = 3v^2x - 3v^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}v + v^3 + \frac{1}{2}v$

$t_2(x) = 3v^2x + \frac{1}{2}x - 2v^3$

3. Bestimmung der Wendestelle mit $g''(x) = 0$

$6x = 0 \quad => \quad x = 0$

Im Wendepunkt fallen u und v zusammen, sind also $u = v = 0$ ist.
Wegen $t_1(0) = t_2(0)$ gibt es im Wendepunkt von g nur eine Tangente.

$h(x) = (x + 2) \cdot x \cdot (4 - x) = (x^2 + 2x) \cdot (4 - x) = 4x^2 - x^3 + 8x - 2x^2$

$h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x \qquad h'(x) = -3x^2 + 4x + 8$

$h''(x) = -6x + 4$

Der (bekannte) Tangentenpunkt sei $P(u|g(u))$

1. Situation: Tangente in $P(u|g(u))$

$h(u) = -u^3 + 2u^2 + 8u; \quad h'(u) = -3u^2 + 4u + 8; t_1(x) = h'(u) \cdot (x - u) + h(u))$

$t_1(x) = (-3u^2 + 4u + 8) \cdot (x - u) - u^3 + 2u^2 + 8u$

$t_1(x) = -3u^2x + 3u^3 + 4ux - 4u^2 + 8x - 8u - u^3 + 2u^2 + 8u$

$t_1(x) = -3u^2x + 4ux + 8x + 2u^3 - 2u^2$

$t_1(x) = (-3u^2 + 4u + 8)x + 2u^3 - 2u^2$

2. Situation: Tangente von P aus an die Kurve, der (unbekannte) Tangentenpunkt sei $Q(v|f(v))$.

$h(v) = -v^3 + 2v^2 + 8v; \quad h'(v) = -3v^2 + 4v + 8; t_2(x) = h'(v) \cdot (x - v) + h(v))$

$t_2(x) = (-3v^2 + 4v + 8) \cdot (x - v) - v^3 + 2v^2 + 8v$

$t_2(x) = -3v^2x + 3v^3 + 4vx - 4v^2 + 8x - 8v - v^3 + 2v^2 + 8v$

$t_2(x) = -3v^2x + 4vx + 8x + 2v^3 - 2v^2$

$t_2(x) = (-3v^2 + 4v + 8)x + 2v^3 - 2v^2$

3. Bestimmung der Wendestelle mit $h''(x) = 0$

$-6x + 4 = 0$

$6x = 4 \quad => \quad x = \frac{2}{3}$

Im Wendepunkt fallen u und v zusammen, sind also $u = v = \frac{2}{3}$ ist.
Wegen $t_1\left(\frac{2}{3}\right) = t_2\left(\frac{2}{3}\right)$ gibt es im Wendepunkt von h nur eine Tangente.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A2

a) $f(x) = x^3;\ f'(x) = 3x^2;\ P(-2|-8)$

Aufgabe für Tangente von einem Punkt aus an den Graphen einer Funktion.

Der Berührpunkt habe die Koordinaten $B(u|f(u))$.

Dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$t(x) = 3u^2 \cdot (x-u) + u^3$

$-8 = 3u^2 \cdot (-2-u) + u^3$ | Punktprobe mit P

$-6u^2 - 3u^3 + u^3 + 8 = 0$

$-2u^3 - 6u^2 + 8 = 0$ | $:-2$

$u^3 + 3u^2 - 4 = 0$

$u_1 \overset{\text{WTR}}{=} -2;\ u_2 \overset{\text{WTR}}{=} 1$

$f(u_1) = (-2)^3 = -8$ $\quad f(u_2) = (1)^3 = 1$

Die Berührpunkte haben die Koordinaten $B_1(-2|-8)$ und $B_2(1|1)$.

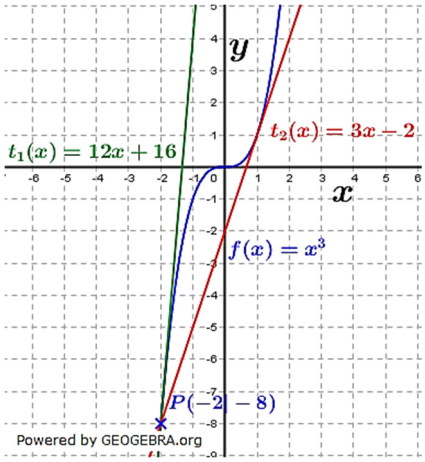
$f'(u_1) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$ $\quad f'(u_2) = 3 \cdot 1^2 = 3$

$t_1(x) = f'(u_1) \cdot (x-u_1) + f(u_1) = 12 \cdot (x-(-2)) + (-8)$

$t_1(x) = 12x + 16$

$t_2(x) = f'(u_2) \cdot (x-u_2) + f(u_2) = 3 \cdot (x-1) + 1$

$t_2(x) = 3x - 2$



b) $g(x) = x^2;\ g'(x) = 2x;\ Q(2|-3)$

Aufgaben für Normale von einem Punkt aus zum Graphen einer Funktion.

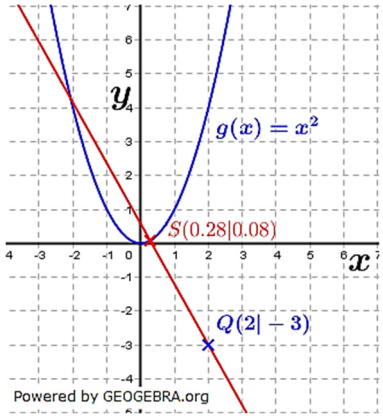
Der Schnittpunkt habe die Koordinaten $S(u|g(u))$.

Die Normale von einem Punkt zum Graphen schneidet diesen senkrecht. Die Strecke vom Punkt Q zum Schnittpunkt S ist somit die kürzeste Entfernung. Die Länge der Strecke zwischen zwei Punkten errechnet sich über den Satz des Pythagoras. Es gilt:

$d(u) = \sqrt{(g(u) - y_Q)^2 + (u - x_Q)^2} = \sqrt{(g(u)+3)^2 + (u-2)^2}$

$d(u) = \sqrt{(u^2+3)^2 + (u-2)^2} = \sqrt{u^4 + 6u^2 + 9 + u^2 - 4u + 4}$

$d(u) = \sqrt{u^4 + 7u^2 - 4u + 13}$



Die kürzeste Entfernung über $d'(x) = 0$:

$d'(u) = \frac{4u^3 + 14u - 4}{2 \cdot \sqrt{u^4 + 6u^2 - 4u + 13}}$

$4u^3 + 14u - 4 = 0$ | $:2$

$2u^3 + 7u - 2 = 0$

$u \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}28$

$g(u) \approx 0{,}08$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(0{,}28|0{,}08)$.

$g'(u) = 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}56$

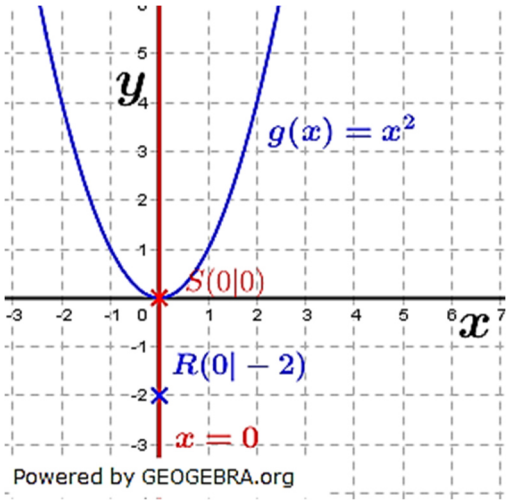
$n(x) = -\frac{1}{g'(u)} \cdot (x-u) + g(u) = -\frac{1}{0{,}56} \cdot (x - 0{,}28) + 0{,}08$

$n(x) = -1{,}79x + 0{,}58$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) $g(x) = x^2;\ g'(x) = 2x;\ R(0|-2)$

Über die Graphik stellen wir fest, dass der Punkt $R(0|-2)$ senkrecht unter dem Scheitelpunkt $S(0|0)$ der Parabel liegt.
Somit wird die y-Achse selbst zur Normalen zum Graphen der Funktion.
Die Gleichung der Normalen lautet in diesem Fall $x = 0$.



Lösung A3

$f(x) = 2x^2 + 4;\ f'(x) = 4x;\ P(1|-2)$

Aufgabe für Tangente von einem Punkt aus an den Graphen einer Funktion.
Der Punkt des Graphen, durch den die Tangente verläuft habe die Koordinaten $P(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel
$f'(u) = 4u;\ \ f(u) = 2u^2 + 4$
$t(x) = 4u \cdot (x - u) + 2u^2 + 4$
$-2 = 4u \cdot (1 - u) + 2u^2 + 4$ | Punktprobe mit $P(1|-2)$
$-2 = 4u - 4u^2 + 2u^2 + 4$ | $+2$
$-2u^2 + 4u + 6 = 0$ | $:(-2)$
$u^2 - 2u - 3 = 0$
$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3}$ | p/q-Formel
$u_1 = 3;\ u_2 = -1$
$f(u_1) = 2 \cdot 3^2 + 4 = 22;\ f'(u_1) = 4 \cdot 3 = 12$
$f(u_2) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 = 6;\ f'(u_2) = 4 \cdot (-1) = -4$
$t_1(x) = f'(u_1) \cdot (x - u_1) + f(u_1) = 12 \cdot (x - 3) + 22 = 12x - 14$
$t_2(x) = f'(u_2) \cdot (x - u_2) + f(u_2) = -4 \cdot (x + 1) + 6 = -4x + 2$

Lösung A4

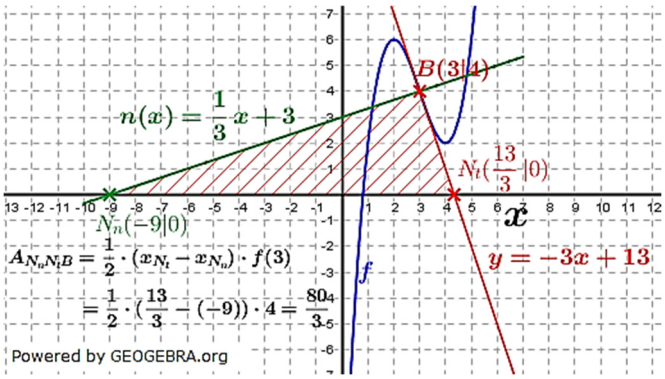
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14;\ f'(x) = 3x^2 - 18x + 24;\ y = -3x + 13$

a) Rechnerischer Nachweis, dass t mit $y = -3x + 13$ f berührt:

$m_t = f'(x) = -3$
$3x^2 - 18x + 24 = -3$ | $+3;\ :3$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$
Es existiert nur eine Stelle $x_0 = 3$, in der f die Steigung $m = -3$ hat.
$f(-3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 14 = 4$
$y = -3 \cdot 3 + 13 = 4$
Somit ist $B(3|4) \in f; t$ und damit Berührpunkt von f und t.
$y = -3x + 13$ ist Tangente an f in $B(3|4)$. **q.e.d.**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.
Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks N_nN_tB, mit N_n als Nullstelle der Normalen N_t als Nullstelle von t und B als Berührpunkt von f und t.

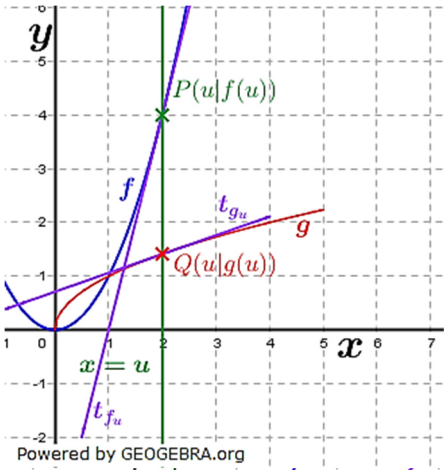


Bestimmung der Normalengleichung in $B(3|4)$:
$n(x) = -\frac{1}{f'(3)} \cdot (x-3) + f(3)$
$n(x) = -\frac{1}{-3} \cdot (x-3) + 4 = \frac{1}{3}x + 3$
Bestimmung der Nullstelle N_n:
$\frac{1}{3}x + 3 = 0 \;=>\; x = -9 \;=>\; N_n(-9|0)$
Bestimmung der Nullstelle N_t:
$-3x + 13 = 0 \;=>\; x = \frac{13}{3} \;=>\; N_t\left(\frac{13}{3}\middle|0\right)$
$A_{N_nN_tB} = \frac{1}{2} \cdot (x_{N_t} - x_{N_n}) \cdot f(3)$ | Flächenformel eines Dreiecks.
$A_{N_nN_tB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{3} - (-9)\right) \cdot 4 = \frac{80}{3}$
Der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks N_nN_tB beträgt $\frac{80}{3}\ FE$.

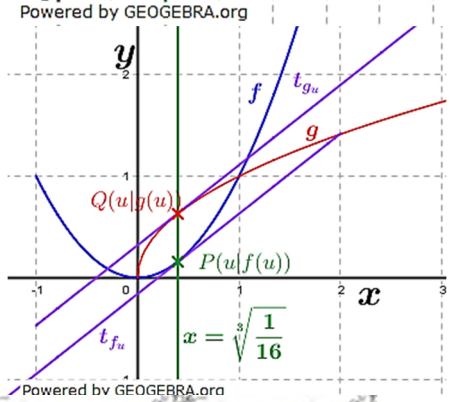
c) B ist Wendepunkt, wenn $f''(3) = 0$ ist und $f'''(3) \neq 0$:
$f''(x) = 6x - 18; \quad f'''(x) = 6$
$f''(3) = 6 \cdot 3 - 18 = 0$
$f'''(3) = 6 \neq 0$
B ist Wendepunkt der Funktion f.

Lösung A5

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.
Gesucht ist die Stelle $x = u$, sodass die beiden Tangenten t_{f_u} und t_{g_u} parallel verlaufen. Parallele Geraden müssen dieselbe Steigung haben, somit muss gelten $f'(u) = g'(u)$.



$f(x) = x^2; \quad f'(x) = 2x$
$g(x) = \sqrt{x}; \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(u) = g'(u)$:
$2u = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ | $\cdot 2\sqrt{u}$
$4u\sqrt{u} = 1$ | ^{2}
$16u^3 = 1$ | $:16$
$u^3 = \frac{1}{16}$ | $\sqrt[3]{\ }$
$u = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$



Die Tangenten an f in $P(u|f(u))$ und g in $Q(u|f(u))$ sind für $u = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ parallel.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A6

$f(x) = x^2 - 2x + 1; \quad f'(x) = 2x - 2$

$g_a(x) = ax^2 - \frac{x}{2} + 1; \quad g_a'(x) = 2ax + \frac{1}{2}$

Bedingung für rechtwinkliges Schneiden:

$f'(0) \cdot g_a'(0) \stackrel{?}{=} -1$

$f'(0) = -2; \; g_a'(0) = \frac{1}{2}$

$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

Die Steigungen von $f'(0)$ und $g_a{}'(0)$ sind unabhängig von A, $f'(0) \cdot g_a'(0) = -1$, somit schneiden sich für $a \in \mathbb{R}$ die Tangenten in $S(0|1)$ rechtwinklig.

Lösung A7

$f(x) = -0{,}4(x-2)^2 - 1{,}5; \quad f'(x) = -0{,}8(x-2); \quad P(0|5)$

Der Berührpunkt habe die Koordinaten $B(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$f'(u) = -0{,}8u + 1{,}6; \quad f(u) = -0{,}4(u-2)^2 - 1{,}5$

$t(x) = (-0{,}8u + 1{,}6) \cdot (x-u) - 0{,}4(u-2)^2 - 1{,}5$

$5 = (-0{,}8u + 1{,}6) \cdot (-u) - 0{,}4(u^2 - 4u + 4) - 1{,}5$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$5 = 0{,}8u^2 - 1{,}6u - 0{,}4u^2 + 1{,}6u - 1{,}6 - 1{,}5$

$5 = 0{,}4u^2 - 3{,}1$ | $+3{,}1; : 0{,}4$

$u^2 = \frac{8{,}1}{0{,}4} = 20{,}25$ | $\sqrt{}$

$u_{1,2} = \pm 4{,}5$

Gefragt ist nach Tangente mit negativer Steigung:

$f'(4{,}5) = -0{,}8 \cdot 2{,}5 = -2; \quad f'(-4{,}5) = -0{,}8 \cdot (-6{,}5) = 5{,}2$

Gesucht war also $u = 4{,}5$.

$f(4{,}5) = -0{,}4 \cdot 2{,}5^2 - 1{,}5 = -4$

$t(x) = -2(x - 4{,}5) - 4 = -2x + 5$

Der Berührpunkt hat die Koordinaten $B(4{,}5|-4)$.

Lösung A8

$f_a(x) = a \cdot (x^3 - 4x + 2); \quad f_a'(x) = a \cdot (3x^2 - 4)$

a) $f_1(x) = x^3 - 4x + 2; \quad f_1'(x) = 3x^2 - 4$

Tangente an f_1 von $P(1|1)$ aus vorhanden?

Der Berührpunkt habe die Koordinaten $B(u|f(u))$, dann gilt:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$f_1'(u) = 3u^2 - 4; \quad f_1(u) = u^3 - 4u + 2$

$t(x) = (3u^2 - 4) \cdot (x-u) + u^3 - 4u + 2$

$1 = (3u^2 - 4) \cdot (1-u) + u^3 - 4u + 2$ | Punktprobe mit $P(1|1)$

$1 = 3u^2 - 3u^3 - 4 + 4u + u^3 - 4u + 2$

$1 = -2u^3 + 3u^2 - 2$ | -1

$3u^2 - 2u^3 - 3 = 0$

$u \stackrel{\text{WTR}}{\approx} -0{,}68$

An $f_1{}'$ existiert eine Tangente durch den Punkt $P(1|1)$. Der Berührpunkt hat die Koordinaten $B(-0{,}68|4{,}41)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $f_a(x) = a \cdot (x^3 - 4x + 2)$; $f_a'(x) = a \cdot (3x^2 - 4)$

$t_a(x) = f_a'(u) \cdot (x - u) + f_a(u)$

$f_a(u) = a \cdot (u^3 - 4u + 2)$; $f_a'(u) = a \cdot (3u^2 - 4)$

$t_a(x) = (3au^2 - 4a) \cdot (x - u) + au^3 - 4au + 2a$

$1 = (3au^2 - 4a) \cdot (1 - u) + au^3 - 4au + 2a$

$1 = 3au^2 - 3au^3 - 4a + 4au + au^3 - 4au + 2a$

$-2au^3 + 3au^2 - 2a - 1 = 0$

Die hiermit ermittelte Gleichung ist eine Gleichung dritten Grades. Gleichungen dritten Grades besitzen mindestens eine, maximal drei Nullstellen. Lediglich für $a = 0$ macht diese Gleichung keinen Sinn. Daraus folgt:

Für alle $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ existieren Tangenten an den Grafen von f_a, die durch den Punkt $P(1|1)$ verlaufen.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de