Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2;\quad f'(x) = \frac{1}{6}x^2 + x;\quad f''(x) = \frac{1}{3}x + 1$

Bestimmung des Wendepunktes über $f''(x) = 0$:

$\frac{1}{3}x + 1 = 0;\ \Rightarrow\ x = -3$

Tangentensteigung im Wendepunkt über $f'(-3)$:

$f'(-3) = \frac{1}{6}(-3)^2 - 3 = -\frac{3}{2}$

y-Koordinate des Wendepunktes über $f(-3) = \frac{1}{18}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $WP(-3|3)$.

Bestimmung der Tangentengleichung:

$t(x) = f'(-3) \cdot (x+3) + f(-3)$ | Punkt-Steigungsform

$t(x) = -\frac{3}{2} \cdot (x+3) + 3 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Lösung A2

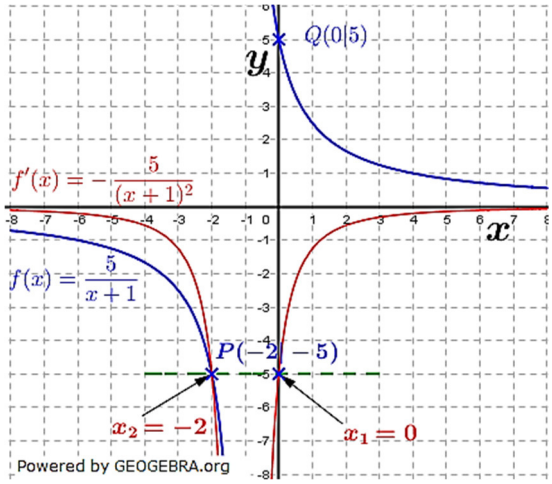
$f(x) = \frac{5}{x+1};\quad f'(x) = -\frac{5}{(x+1)^2}$

Für die beiden Tangenten muss gelten, dass $f'(x_1) = f'(x_2)$. Die nebenstehende Graphik erläutert die Situation für $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$. f ist eine punktsymmetrische Funktion zum Punkt $S(-1|0)$. Ihre Ableitung f' ist damit eine achsensymmetrische Funktion zur Achse $x = -1$.

Dies bedeutet, dass f stets zwei Stellen mit gleicher Steigung besitzt, da in jeder Situation gilt $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Die Stellen x_1 und x_2 müssen somit ebenfalls achsensymmetrisch zur Achse $x = -1$ sein, sodass gilt:

$x_2 = -x_1 - 2;\ x_1 > -1$



Rechnerischer Nachweis:

$-\frac{5}{(x_1+1)^2} = -\frac{5}{(x_2+1)^2}$

$(x_1+1)^2 = (x_2+1)^2$ | $\sqrt{\ }$

$x_1 + 1 = |x_2 + 1|$

$x_1 + 1 = x_2 + 1;\ \Rightarrow\ x_1 = x_2$ (trivial)

$x_1 + 1 = -x_2 - 1$

$x_1 + 2 = -x_2$

$x_2 = -x_1 - 2$

Für $x_2 = -x_1 - 2;\ x_1 > -1$ verlaufen die beiden Tangenten durch $P_1(x_1|f(x_1))$und $P_2(x_2|f(x_2))$ parallel.

Lösung A3

$f(x) = \frac{4}{x^2} + 1;\quad f'(x) = -\frac{8}{x^3}$

Es muss gelten: $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$

$-\frac{8}{x_1^3} \cdot -\frac{8}{x_2^3} = -1$

$\frac{64}{x_1^3 \cdot x_2^3} = -1$

$x_1^3 \cdot x_2^3 = -64$

$x_2^3 = -\frac{64}{x_1^3} \qquad | \quad \sqrt[3]{}$

$x_2 = -\frac{4}{x_1}$

Für $x_2 = -\frac{4}{x_1}$ schneiden sich die beiden Tangenten durch $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_1(x_2|f(x_2))$ senkrecht.

Lösung A4

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2;\quad f'(x) = x^3 - 3x;\quad f''(x) = 3x^2 - 3$

a) Bestimmung der Nullstellen über $f(x) = 0$:

$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2 = 0 \qquad | \quad \cdot 4$

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

$x_{1,2}^2 = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm \sqrt{1}$

$x_1^2 = 4;\ x_2^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Wegen Aufgabenstellung „äußere Nullstellen" sind die Stellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$ gemeint.

Bestimmung der Tangenten durch N_1 du N_2:

$f'(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -2 \qquad f'(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$

$t_{N_1}(x) = -2 \cdot (x+2) = -2x - 4 \qquad t_{N_2}(x) = 2 \cdot (x-2) = 2x - 4$

Bestimmung des Schnittpunktes von t_{N_1} und t_{N_2}:

$t_{N_1} \cap t_{N_2}$

$-2x - 4 = 2x - 4$

$4x = 0;\ => \ x = 0$

$S_y = f(0) = 2$

Berechnung Fläche des Dreiecks $N_1 S_y N_2$:

$A = \frac{1}{2} \cdot (x_{N_2} - x_{N_1}) \cdot f(0) = \frac{1}{2} \cdot (2 - (-2) \cdot 2 = 4$

Die Fläche des Dreiecks $N_1 S_y N_2$ beträgt $4\ FE$.

b) Bestimmung der Wendepunkte über $f''(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 = 1;\ => x_1 = -1;\ x_2 = 1$

$f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4} \qquad f(1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}$

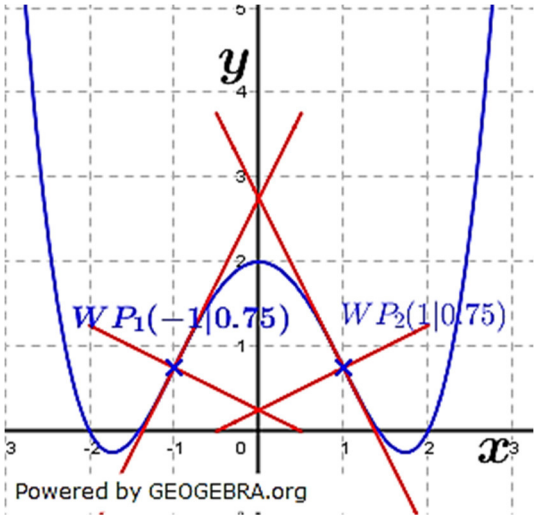
$f'(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2 \qquad f'(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

$WP_1\left(-1\middle|\frac{3}{4}\right);\quad WP_2\left(1\middle|\frac{3}{4}\right)$

$t_{WP_1}(x) = 2 \cdot (x+1) + \frac{3}{4} = 2x + \frac{11}{4} \qquad t_{WP_2}(x) = -2 \cdot (x-1) + \frac{3}{4} = -2x + \frac{11}{4}$

$n_{WP_1}(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+1) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\ n_{WP_2}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Das entstandene Viereck ist eine Raute. Flächeninhalt einer Raute über $A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ mit e und f als den beiden Diagonalen.
e ist der horizontale Abstand zwischen den Beiden Wendepunkten, $e = 2$.
f ist der vertikale Abstand zwischen den y-Achsenabschnitten der Tangenten und der Normalen, $f = \frac{11}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.
$A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 2{,}5$
Das Viereck hat einen Flächeninhalt von $2{,}5\ LE$.



Lösung A5

$f_t(x) = 6(2x^2 + x^3) \cdot e^{x-0{,}25t}$
$u = 6(2x^2 + x^3)$ $\qquad u' = 6(4x + 3x^2)$
$v = e^{x-0{,}25t}$ $\qquad v' = e^{x-0{,}25t}$
$f_t{}'(x) = u'v + v'u$ | Produktregel
$f_t{}'(x) = 6(4x + 3x^2) \cdot e^{x-0{,}25t} + 6(2x^2 + x^3) \cdot e^{x-0{,}25t}$
$f_t{}'(x) = 6e^{x-0{,}25t} \cdot (4x + 3x^2 + 2x^2 + x^3)$
$f_t{}'(x) = 6x \cdot e^{x-0{,}25t} \cdot (4 + 5x + x^2)$
$f_t{}'(x) = 6x \cdot e^{x-0{,}25t} \cdot (x^2 + 5x + 4)$
$f_t{}'(-2) = 6 \cdot (-2) \cdot e^{-2-0{,}25t} \cdot ((-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 4) = -12 \cdot e^{-2-0{,}25t} \cdot (-2) = 24 \cdot e^{-2-0{,}25t}$
$f_t(-2) = 6(2 \cdot (-2)^2 + (-2)^3) \cdot e^{-2-0{,}25t} = 6 \cdot 0 \cdot e^{-2-0{,}25t} = 0$
$t_t(x) = f'(-2) \cdot (x + 2) + f_t(-2) = 24 \cdot e^{-2-0{,}25t} \cdot (x + 2) = \frac{24}{e^{2+0{,}25t}} x + \frac{48}{e^{2+0{,}25t}}$
$n_t(x) = -\frac{1}{f'(-2)} \cdot (x + 2) + f_t(-2) = -\frac{1}{24 \cdot e^{-2-0{,}25t}} \cdot (x + 2) = -\frac{e^{2+0{,}25t}}{24} x - \frac{e^{2+0{,}25t}}{12}$
Die beiden -Achsenabschnitte lauten $c_{t_t} = \frac{48}{e^{2+0{,}25t}}$ und $c_{n_t} = -\frac{e^{2+0{,}25t}}{12}$.
Laut Aufgabenstellung soll $c_{t_t} - c_{n_t} = 5$ sein.
$\frac{48}{e^{2+0{,}25t}} + \frac{e^{2+0{,}25t}}{12} = 5$ | $\cdot 12 \cdot e^{2+0{,}25t}$
$48 \cdot 12 + (e^{2+0{,}25t})^2 = 60e^{2+0{,}25t}$
$(e^{2+0{,}25t})^2 - 60e^{2+0{,}25t} + 576 = 0$
Substitution:
$e^{2+0{,}25t} = v$
$v^2 + 60v - 576 = 0$
$v_{1,2} = 30 \pm \sqrt{900 - 576} = 30 \pm \sqrt{324} = 30 \pm 18$
$v_1 = 48; \quad v_2 = 12$
Resubstitution:
$e^{2+0{,}25t_1} = 48$
$2 + 0{,}25t_1 = ln(48)$
$0{,}25t_1 = ln(48) - 2$
$t_1 = 4 \cdot (ln(48) - 2) \approx 7{,}485$ $\qquad t_2 = 4 \cdot (ln(12) - 2) \approx 1{,}94$
Für $t \approx 7{,}485$ bzw. $t \approx 1{,}94$ haben die Schnittpunkte der Tangente und Normalen in $P(-2|f(-2))$ mit der y-Achse den Abstand $5\ LE$.

Lösung A6

a) Ganzrationale Funktion dritten Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wegen der vier Unbekannten a, b, c und d benötigen wir vier Bedingungen, die wir aus dem Aufgabentext heraus feststellen müssen.

Nach Aufgabenstellung gilt:

$f(0) = 2$ | Punktprobe mit $A(0|2)$

$f(2) = 0$ | Punktprobe mit $W(2|0)$

$f'(2) = -3$ | Steigung der Wendetangente in $W(2|0)$

$f''(2) = 0$ | $x_0 = 2$ soll Wendestelle sein.

$f(0) = 2 \;=>\; d = 2$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b$

(1) $2^3a + 2^2b + 2c + 2 = 0$

(2) $3 \cdot 2^2a + 2 \cdot 3b + c = -3$

(3) $3 \cdot 2a + 2b = 0$

(1) $8a + 4b + 2c + 2 = 0$ | $-2; : 2$

(2) $12a + 6b + c = -3$ | $: 3$

(3) $6a + 2b = 0$

(1) $4a + 2b + c = -1$

(2) $4a + 2b + \frac{1}{3}c = -1$

(3) $6a + 2b = 0$

$u = 6(2x^2 + x^3)$ $\qquad$ $u' = 6(4x + 3x^2)$

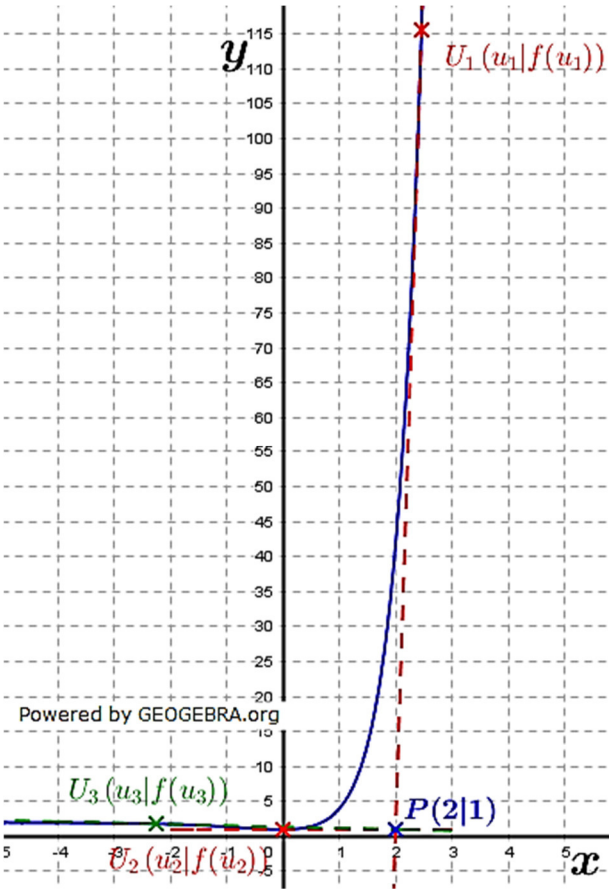
$v = e^{x-0,25t}$ $\qquad$ $v' = e^{x-0,25t}$

$f_t{}'(x) = u'v + v'u$ | Produktregel

Lösung A7

$f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2; \quad f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$

Wie aus der Graphik ersichtlich, gibt es drei Stellen auf f, an die von $P(2|1)$ aus eine Tangente gelegt werden kann.



Tangentengleichung:

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$t(x) = (2e^{2u} - 2e^u) \cdot (x - u) + e^{2u} - 2e^u + 2$

Punktprobe mit $P(2|1)$

$1 = (2e^{2u} - 2e^u) \cdot (2 - u) + e^{2u} - 2e^u + 2$

Beginn der Auflösung nach u:

$4e^{2u} - 2ue^{2u} - 4e^u + 2ue^u + e^{2u} - 2e^u + 2 = 1$

$e^{2u}(5 - 2u) - e^u(6 - 2u) + 1 = 0$

Substitution:

$v = e^u$

$(5 - 2u) \cdot v^2 - (6 - 2u) \cdot v + 1 = 0$

$v^2 - \frac{6-2u}{5-2u} \cdot v + \frac{1}{5-2u} = 0$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\left(\frac{3-u}{5-2u}\right)^2 - \frac{1}{5-2u}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\frac{u^2-6u+9-(5-2u)}{(5-2u)^2}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\frac{u^2-4u+4}{(5-2u)^2}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \sqrt{\frac{(u-2)^2}{(5-2u)^2}}$

$v_{1,2} = \frac{3-u}{5-2u} \pm \frac{u-2}{5-2u}$

$v_1 = \frac{3-u+u-2}{5-2u} = \frac{1}{5-2u}$

$v_2 = \frac{3-u-u+2}{5-2u} = \frac{5-2u}{5-2u} = 1$

Resubstitution:

$e^{u_2} = v_2 = 1 \quad => \quad u_2 = 0$

$v_1 = e^{u_1} = \frac{1}{5-2u}$

$e^{u_1} = \frac{1}{5-2u} \qquad | \quad ln$

$u_1 = ln\left(\frac{1}{5-2u_1}\right) = ln(1) - ln(5 - 2u_1) = -ln(5 - 2u_1)$

$u_1 + ln(5 - 2u_1) = 0$

Die Lösung dieser Gleichung ist nur mittels GTR/WTR möglich. Wegen $ln(5 - 2u_1)$ ist der Definitionsbereich der Gleichung $D =]-\infty; 2{,}5[$.

$u_1 \overset{WTR}{\approx} -2{,}25; \quad u_2 = 0; \quad u_3 \overset{WTR}{\approx} 2{,}455$

Somit erhalten wir an f drei Stellen, an die wir vom Punkt $P(2|1)$ aus Tangenten an f legen können. Die Tangentenpunkte sind:

$T_1(-2{,}25|f(-2{,}25)) => T_1(-2{,}25|1{,}8) \qquad T_2(0|f(0)) => T_2(0|1)$

$T_3(2{,}455|f(2{,}455)) => T_3(2{,}455|114{,}35)$