Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2;\ x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild sei K.
Vom Punkt $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$ aus sollen Tangenten an K gelegt werden.
Bestimme die Gleichungen der Tangenten und die dazugehörigen Berührpunkte.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{9 - \mathrm{x}^2};\ x \in [-3; 3]$. Eine Tangente an den Graphen soll durch den Punkt $\mathrm{P}(5|0)$ gehen.

a) Bestimme die Gleichung der Tangente t und den dazugehörigen Berührpunkt B.

b) Weise nach, dass die Gerade g, die durch den Ursprung und den Berührpunkt B verläuft, orthogonal zur Tangente t ist.

Aufgabe A3

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16};\ x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.
K stellt für $-6 \leq x \leq 6$ den Querschnitt eines $500\,m$ langen Kanals dar (x in Meter, $f(x)$ in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y = 0$. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal $2{,}25\,m$.
An Land steht eine Person. In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe $1{,}50\,m$)?
TIPP: Fertige zunächste eine Skizze der Situation.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2004 A1.1 Baden-Württemberg.

Aufgabe A4

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt. Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125$ im Bereich $-2{,}5 \leq x < 05$,

dabei weist die positive x-Achse nach Osten ($1\,LE$ entspricht $100\,m$).
In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Yiganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.

a) Bestimme die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

b) Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

TIPP: Fertige zunächste eine Skizze der Situation.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2008 A1.1 Baden-Württemberg.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

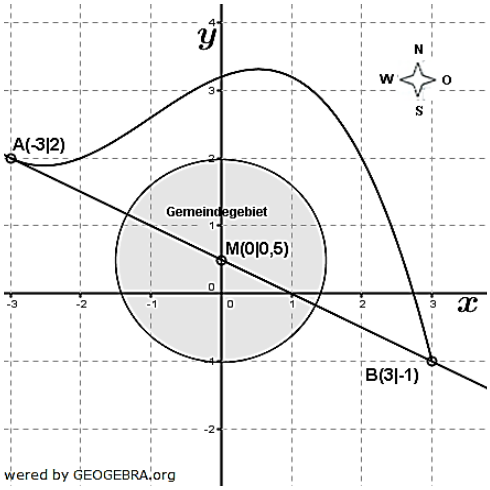
Level 3 – Expert – Blatt 4

Aufgabe A5

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt $\overline{AB}$ einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $1{,}5\ km$.
Die Umgehungsstraße verläuft durch den Punkt A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$$

Eine LE entspricht $1\ km$.



Im Punkt $P(1{,}5|3)$ befindet sich eine Windkraftanlage.
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf die Umgehungsstraße.
Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich?
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2012 A1.1 Baden-Württemberg.

Aufgabe A6

Der Laderaum eines Lastkahns ist $50\ m$ lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4;\ -5 \le x \le 5 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

Zur Wartung steht der Lastkahn auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4|f(-4))$ und $P_2(4|f(4))$, beschrieben werden.
In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform.
TIPP: Fertige zunächste eine Skizze der Situation.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2015 A1.1 Baden-Württemberg.

Aufgabe A7

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x - \frac{1}{x^3};\ x \neq 0$.
Die Tangente an den Graphen von g im Punkt B verläuft durch $P(0|-0{,}5)$. Bestimmen Sie die Koordinaten von B.
Quelle: Teilaufgabe Abitur 2017 A1.2 Baden-Württemberg.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2; \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x; \quad P\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$

$t(x) = f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsform

$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - \frac{4}{3}u\right)\cdot(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - \frac{2}{3}u^2$

$\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}u^2 - \frac{4}{3}u\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-u\right) + \frac{1}{9}u^3 - \frac{2}{3}u^2$ | Punktprobe mit $P\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{3}u^2 - \frac{4}{3}u\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}-u\right) + \frac{1}{9}u^3 - \frac{2}{3}u^2 - \frac{3}{2} = 0$

$u_1 \overset{WTR}{=} -3; \quad u_2 \overset{WTR}{=} 0{,}75; \quad u_3 \overset{WTR}{=} 3$

$f(-3) \overset{WTR}{=} -9; \quad f(0{,}75) \overset{WTR}{=} -\frac{1}{3}; \quad f(3) \overset{WTR}{=} -3$

$f'(-3) \overset{WTR}{=} 7; \quad f'(0{,}75) \overset{WTR}{=} -0{,}83; \quad f'(3) \overset{WTR}{=} -1$

$t_1(x) = 7(x+3) - 9 = 7x + 12$ $\quad B_1(-3|-9)$

$t_2(x) = -0{,}83(x-0{,}75) - \frac{1}{3} = -0{,}83x + 0{,}29$ $\quad B_2\left(0{,}75\middle|-\frac{1}{3}\right)$

$t_3(x) = -(x-3) - 3 = -x$ $\quad B_3(3|-3)$

LösuAng A2

$f(x) = \sqrt{9-x^2} \;\; x \in [-3;3]; \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}; \quad P(5|0)$

a) Tangente von einem Punkt aus an eine Kurve:

$t(x) = f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$t(x) = -\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\cdot(x-u) + \sqrt{9-u^2}$

$0 = -\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\cdot(5-u) + \sqrt{9-u^2}$ | $\cdot\sqrt{9-u^2}$

$0 = -u\cdot(5-u) + 9 - u^2$

$0 = -5u + u^2 + 9 - u^2$

$5u = 9$

$u = \frac{9}{5}$

$f\left(\frac{9}{5}\right) = \sqrt{9 - \left(\frac{81}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}; \qquad f'\left(\frac{9}{5}\right) = -\frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{9-\frac{81}{25}}} = -\frac{\frac{9}{5}}{\frac{12}{5}} = -\frac{3}{4}$

$t(x) = -\frac{3}{4}\cdot(x-5) + \frac{12}{5} = -\frac{3}{4}x + \frac{123}{20}$

Berührpunkt $B\left(\frac{9}{5}\middle|\frac{12}{5}\right)$.

b) Gerade g durch Ursprung und Berührpunkt B:

$g(x) = m\cdot x + c$ | Allgemeine Form Geradengleichung

$m_g = \frac{y_B - 0}{x_B - 0} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{4}{3}$

$g(x) = \frac{4}{3}\cdot x$ | $c = 0$ wegen Ursprungsgerade

$m_t = -\frac{3}{4}$ | aus $f'\left(\frac{9}{5}\right)$

$m_t \cdot m_g = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$

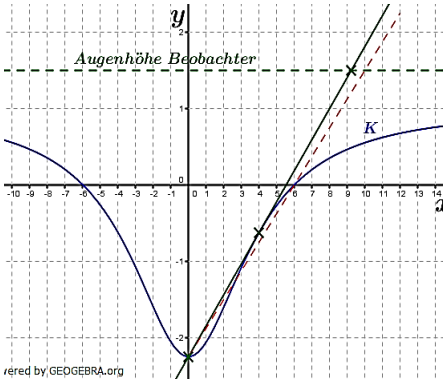
Die Ursprungsgerade durch den Berührpunkt B (aus Teilaufgabe a)) verläuft orthogonal zur Tangente t (aus Teilaufgabe a)).

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

Lösungslogik

Die nebenstehende Graphik beschreibt die Situation.



Wie ersichtlich, ist die Sichtlinie des Beobachters eine Tangente an f durch die Kanalsohle. Steht er weiter weg vom Kanal als die x–Koordinate des eingezeichneten Beobachtungspunktes, kann er den Grund des Kanals nicht mehr sehen.
Die x–Koordinate seines Beobachtungspunktes ergibt sich über den Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden $y = 1.5$ (Augenhöhe des Beobachters). Der Berührpunkt ist $P(u|f(u))$, damit können wir die Punkt-Steigungsformel der Tangente aufstellen mit:
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
Die Talsohle mit $T(0| - 2{,}25)$ ist Punkt dieser Tangentengleichung. Wir machen eine Punktprobe mit T und erhalten:
$-2{,}25 = f'(u) \cdot (0 - u) + f(u)$
$-u \cdot f'(u) + f(u) + 2{,}25 = 0$
Wir bestimmen die Nullstelle dieser Funktion und erhalten $x_1 = 4$ und $x_0 = 0$.
(Letzteres, $x_0 = 0$. ist keine Lösung, der Beobachter kann ja nicht in der Mitte des Kanals an Land stehen).
Hiermit haben wir den Wert von u gefunden, für den die Tangente $t(x)$ durch die Talsohle geht und den Graphen der Funktion $t(x)$ in $B(4|f(4))$ berührt.
Die Augenhöhe der Person ist $1{,}5$, dies bedeutet, dass $t(x) = 1{,}5$ sein muss, also:
$t(x) = 1{,}5 = f'(4) \cdot (x - 4) + f(4)$
$f'(4) \cdot (x - 4) + f(4) - 1{,}5 = 0$
Wiederum bestimmen wir die Nullstelle dieser Funktion mit dem WTR, der den Wert $x_0 = 9{,}23$ liefert.
Die Person muss also höchstens bei $x_0 = 9{,}23$ stehen, um bei einer Augenhöhe von $1{,}5\,m$ bei leerem Kanal noch die tiefste Stelle sehen zu können. Gefragt ist aber nach dem Abstand der Person zum Kanalrand. Dieser liegt bei $C(6|0)$. Wir müssen deshalb vom x_0-Wert noch 6 abziehen.

Klausuraufschrieb

$f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16}$; $f'(x) = \frac{2x(x^2+16)-2x(x^2-36)}{(x^2+16)^2} = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$; $T(0| - 2{,}25)$
Tangente durch $T(0| - 2{,}25)$ und Berührpunkt $B(u|f(u)$ mit K.
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel
Punktprobe mit T:
$-2{,}25 = \frac{112u}{(u^2+16)^2} \cdot (-u) + \frac{u^2-36}{u^2+16}$
$-u \cdot \frac{112u}{(u^2+16)^2} + \frac{u^2-36}{u^2+16} + 2{,}25 = 0$
WTR WTR WTR
$u_1 = -4$; $u_2 = 0$ $u_3 = 4$

Betrachtung für $u = 4$ entspricht rechten Kanalrand:

$t(x) = 1{,}5 = f'(4) \cdot (x-4) + f(4)$

$f(4) = \frac{4^2-36}{4^2+16} = -\frac{20}{32}; \quad f'(4) = \frac{104 \cdot 4}{32^2} = \frac{416}{1024} = \frac{13}{32}$

$\frac{13}{32} \cdot (x-4) - \frac{20}{32} - 1{,}5 = 0$

$\frac{13}{32}x - \frac{15}{4} = 0$

$x_0 \overset{WTR}{\approx} 9{,}23$

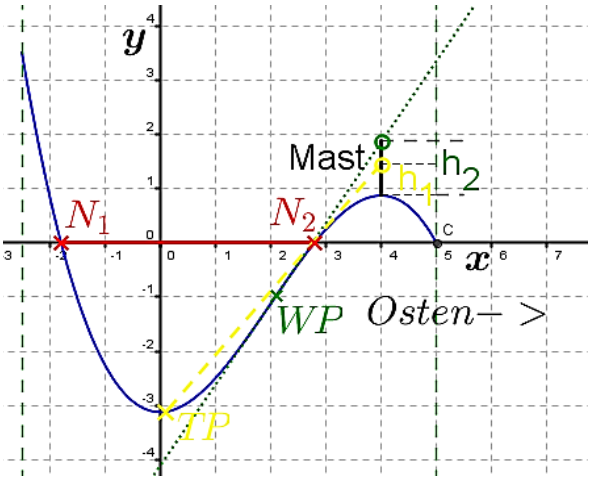
$\Delta x = 9{,}23 - 6{,}0 = 3{,}23$

Die Person darf höchstens $3{,}23\ m$ vom Kanalrand entfernt stehen, um bei einer Augenhöhe von $1{,}5\ m$ bei leerem Kanal noch die tiefste Stelle sehen zu können.

Lösung A4

Lösungslogik

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.



a) *Mindesthöhe des Gerüsts für Beleuchtung bis zur Talsohle (h_1).*
Der Fußpunkt des Mastes liegt im Hochpunkt von f. Zu bestimmen ist die Tangente (gelbe Linie) vom Tiefpunkt aus an das Schaubild von f (Tangente an einen unbekannten Punkt durch einen bekannten anderen Punkt). Diese schneidet die Parallele zur y–Achse durch den Hochpunkt im Punkt S_1, der die Spitze des Gerüstes darstellt. Der Berührpunkt der Tangente an f sei $B(u|f(u))$.
Wir stellen die Punktsteigungsformel für die Tangente auf und schneiden Sie mit der Parallelen zur y–Achse durch den Hochpunkt. Die Differenz aus der y–Koordinate dieses Schnittpunktes und der y–Koordinate des Hochpunkts ergibt die Mindesthöhe des Mastes.

b) *Mindesthöhe des Gerüstes für Beleuchtung des gesamten Tals (h_2).*
Vorgehen wie vor, jedoch dieses Mal mit der Tangente im Wendepunkt WP als bekannter Punkt der Tangente (Tangente an Punkt einer Kurve).

Klausuraufschrieb

$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125; \quad f'(x) = -0{,}375x^2 + 1{,}5x; \quad f''(x) = -0{,}75x + 1{,}5$

a) *Mindesthöhe des Gerüsts für Beleuchtung bis zur Talsohle (h_1):*
Der Fußpunkt des Mastes liegt im Hochpunkt von f.

$f(x)_{max} \overset{WTR}{=} 0{,}875$ für $x \overset{WTR}{=} 4 \Longrightarrow HP(4|0{,}875)$

Tangente an f in $B(u|f(u))$ durch $TP(0|-3{,}125)$:

$t_1(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

Punktprobe mit TP:

$-3{,}125 = (-0{,}375u^2 + 1{,}5u) \cdot (0-u) - 0{,}125u^3 + 0{,}75u^2 - 3{,}125$

$0{,}375u^3 - 1{,}5u^2 - 0{,}125u^3 + 0{,}75u^2 = 0$

$0{,}25u^3 - 0{,}75u^2 = 0$

$0{,}25u^2(u-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 3$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Die Lösung $u = 0$ entfällt, wegen $0 < u < 4$.

$f(3) \overset{WTR}{=} 0{,}25;\quad f'(3) \overset{WTR}{=} 1{,}125$

$t_1(x) = 1{,}125 \cdot (x-3) + 0{,}25$

$t_1(4) = 1{,}125 + 0{,}25 = 1{,}375$

Koordinaten der Spitze des Mastes $S_1(4|1{,}375)$

$h_1 = y_{S_1} - y_{HP} = 1{,}375 - 0{,}875 = 0{,}5$

Die Höhe des Gerüstes muss mindesten $50\,m$ betragen.

b) *Mindesthöhe des Gerüsts für Beleuchtung des gesamten Tals (h_2):*

Wendetangente von f, Bestimmung des Wendepunktes mit $f''(x) = 0$.

$-0{,}75x + 1{,}5 = 0 \quad => \quad x_0 = 2$

$f(2) = -0{,}125 \cdot 2^3 + 0{,}75 \cdot 2^2 - 3{,}125$

$f'(2) = -0{,}375 \cdot 2^2 + 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5$

$t_2(x) = 1{,}5 \cdot (x-2) - 1{,}125$

$t_2(4) = 1{,}5 \cdot 2 - 1{,}125 = 1{,}875$

Koordinaten der Spitze des Mastes $S_2(4|1{,}875)$

$h_2 = y_{S_2} - y_{HP} = 1{,}875 - 0{,}875 = 1$

Die Höhe des Gerüst muss mindestens $100\,m$ hoch werden.

Lösung A5

Lösungslogik

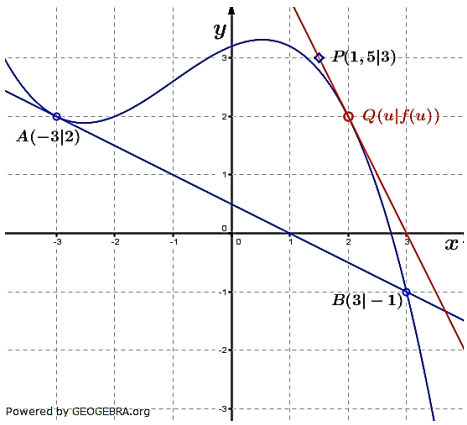
Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.

Windkraftanlage in Fahrtrichtung:

Gesucht ist der Punkt $Q(u|f(u))$ auf f, von dem aus der Fahrer die Windkraftanlage in Fahrtrichtung, das heißt tangential zur Straße, sieht. Wir müssen also die Tangente an f bestimmen, die durch den Punkt $P(1{,}5|3)$ verläuft. Über die Punktsteigungsformel $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ erhalten wir: $3 = f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u)$

$f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u) - 3 = 0$

Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt mit dem WTR.



Klausuraufschrieb

$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2;\quad f'(x) = -0{,}3x^2 - 0{,}6x + 0{,}4;$

Windkraftanlage in Fahrtrichtung:

Tangente an f durch $P(1{,}5|3)$:

$t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$3 = f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u)$ | Punktprobe mit $P(1{,}5|3)$

$f'(u) \cdot (1{,}5-u) + f(u) - 3 = 0$

$(-0{,}3u^2 - 0{,}6u + 0{,}4) \cdot (1{,}5-u) + (-0{,}1u^3 - 0{,}3u^2 + 0{,}4u + 3{,}2) - 3 = 0$

$u_1 \overset{WTR}{\approx} -2{,}17;\quad u_2 \overset{WTR}{\approx} 0{,}921;\quad u_3 \overset{WTR}{\approx} 2$

$f(u_1) \overset{WTR}{\approx} 1{,}94;\quad f(u_2) \overset{WTR}{\approx} 3{,}24;\quad f(u_3) \overset{WTR}{\approx} 2;$

Da der Fahrer vom Punkt B aus in Richtung A fährt und der Fahrer den Punkt P vor sich sieht, ist nur die Lösung $Q(u_3|f(u_3))$ relevant.

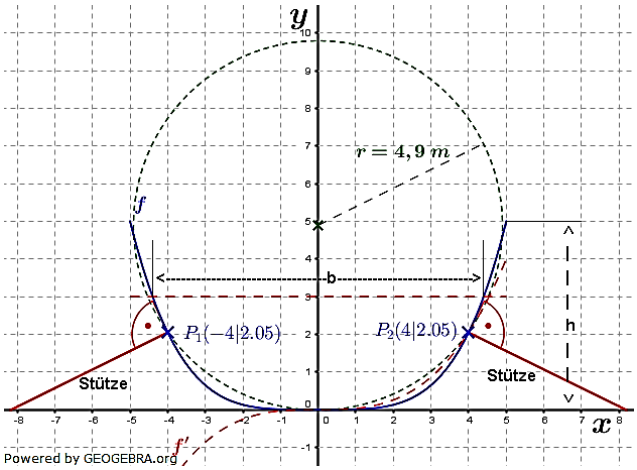
Im Punkt $Q(2|2)$ sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A6

Lösungslogik

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation:



Abstand der Stützenenden auf der Plattform:
Die Stützen sind orthogonal zur Außenwand angebracht, stehen also senkrecht auf der Tangente in den Befestigungspunkten. Wegen der Symmetrie braucht nur eine Hälfte untersucht zu werden. Der Abstand der Stützen auf der Plattform ist also zwei Mal dem Nullstellenwert der Normalen durch den Punkt $P_2\big(4\big|f(4)\big)$.

Klausuraufschrieb

$f(x)=\frac{1}{125}x^4;\quad f'(x)=\frac{4}{125}x^3;\ P_2\big(4\big|f(4)\big)$

Abstand der Stützenden am Boden:
Aus Symmetriegründen nur Betrachtung der rechten Profilseite.

$f(4)=\frac{1}{125}\cdot 4^4=\frac{256}{125}=2{,}048$

$P_2(4|2{,}048)$

Gleichung der Normalen an f durch P_2:

$n(x)=-\frac{1}{f'(4)}\cdot(x-4)+f(4)$

$f'(4)=\frac{4}{125}\cdot 4^3=\frac{256}{125}$

$n(x)=-\frac{1}{\frac{256}{125}}\cdot(x-4)+\frac{256}{125}=-\frac{125}{256}x+4$

Nullstelle von n:

$n(x)=0\ \Longrightarrow\ x\overset{\text{WTR}}{\approx}8{,}2$

Der Abstand der beiden Stützen am Boden beträgt etwa $16{,}4\ m$.

Lösung A7

$g(x)=x-\frac{1}{x^3};\quad g'(x)=1+\frac{3}{x^4};\quad B\big(u\big|f(u)\big)$

$t(x)=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$ | Punkt-Steigungsformel

$t(x)=\left(1-\frac{3}{u^4}\right)\cdot(x-u)+u-\frac{1}{u^3}$

$-0{,}5=\left(1+\frac{3}{u^4}\right)\cdot(0-u)+u-\frac{1}{u^3}$ | Punktprobe mit $P(0|-0{,}5)$

$\left(1+\frac{3}{u^4}\right)\cdot(0-u)+u-\frac{1}{u^3}+0{,}5=0$

$u_1\overset{\text{WTR}}{=}2$

$g(2)=2-\frac{1}{2^3}=\frac{15}{8};\quad g'(2)=1+\frac{3}{2^4}=\frac{19}{16}$

$t(x)=\frac{19}{16}\cdot(x-2)+\frac{15}{8}=\frac{19}{16}x-\frac{1}{2}$

$B\left(2\middle|\frac{15}{8}\right)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de