Aufgabenblatt Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 30 Aufgaben

Aufgabe A1

Wahr oder falsch?

a) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = cos(x)$

b) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = sin(x)$

c) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -sin(x)$

d) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -cos(x)$

e) Für $f(x) = sin(x) - cos(x)$ gilt $f^{(16)\prime}(x) = sin(x) - cos(x)$

Aufgabe A2

Bestimme den exakten Wert der Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}sin(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + cos(x);\ \ x_0 = \frac{2\pi}{3}$

c) $f(x) = \frac{1}{3}sin(x) + \frac{4}{3};\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + sin(x);\ \ x_0 = 0$

e) $f(x) = -2\,sin(x) + \sqrt{3}cos(x);\ \ x_0 = \frac{5\pi}{6}$

f) $f(x) = -\,sin(x) + x;\ \ x_0 = 0$

g) $f(x) = 5\,cos(x) + 3x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

h) $f(x) = \sqrt{3}\,sin(x) - cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

i) $f_t(x) = -tsin(x) + t^2\,cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

j) $f_t(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}sin(x) + tcos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

k) $f_t(x) = t^2\,cos(x) - t^2;\ \ x_0 = \frac{3\pi}{4}$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2}cos(x) + \frac{t}{\pi}x^2;\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe A3

In welchem Punkt hat der Graph von f mit $f(x) = sin(x)$ im Intervall $[0; 2\pi]$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende, die x-Achse bzw. die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$?

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = sin(x) - 2$ für $x \in [0; 2\pi]$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $f'(x_0) = 0$?

b) Gibt es Stellen mit $f'(x_0) > 1$?

Aufgabe A5

Bestimme jeweils die erste und zweite Ableitung.

a) $f(x) = 2\,cos(x) - 1$

b) $f(x) = 2sin(3x)$

c) $f(x) = x - sin(0{,}3\pi x)$

d) $f(x) = 4\,sin(3 + 2x) + 1$

e) $f(x) = \pi - 2cos(2(x+1))$

f) $f(x) = 4\,cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

g) $f(x) = -3sin(2x^2 - 1)$

h) $f(x) = 4\,sin^2(5x - 3)$

Lösung A1

a) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = cos(x)$ ist falsch, denn die 4. Ableitung von $sin(x)$ ist $sin(x)$.

b) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = sin(x)$ ist falsch, denn die 9. Ableitung von $sin(x)$ ist $cos(x)$.

c) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -sin(x)$ ist falsch, denn die 10. Ableitung von $cos(x)$ ist -$cos(x)$.

d) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -cos(x)$ ist richtig, siehe c)

e) Für $f(x) = sin(x) - cos(x)$ gilt $f^{(16)\prime}(x) = sin(x) - cos(x)$ ist richtig.

Lösung A2

a) $f(x) = -\frac{1}{4}sin(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{4}cos(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}co\,s\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{2} = -\frac{1}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2} = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + cos(x);\ \ x_0 = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{4} - sin(x)$

$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{1}{3}sin(x) + \frac{4}{3};\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3}cos(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + sin(x);\ \ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}x + cos(x)$

$f'(0) = cos(0) = 1$

e) $f(x) = -2\,sin(x) + \sqrt{3}cos(x);\ \ x_0 = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad f'(x) = -2\,cos(x) - \sqrt{3}sin(x)$

$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\,cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sqrt{3}sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

f) $f(x) = -\,sin(x) + x;\ \ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = -\,cos(x) + 1$

$f'(0) = -\cos(0) + 1 = -1 + 1 = 0$

g) $f(x) = 5\,cos(x) + 3x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -\,5sin(x) + 3$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3$

h) $f(x) = \sqrt{3}\,sin(x) - cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \sqrt{3}cos(x) - sin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - si\,n\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

i) $f(x) = -tsin(x) + t^2\,cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\qquad f'(x) = -tcos(x) - t^2 sin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\,tsin\left(\frac{\pi}{2}\right) + t^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -t + 0 = -t$

j) $f(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}sin(x) + tcos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}cos(x) - tsin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{t}{\sqrt{3}}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - tsin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{t}{2\sqrt{3}} - t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{t\sqrt{3}}{6} - \frac{t\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{3}t\sqrt{3}$

k) $f(x) = t^2\,cos(x) - t^2;\ \ x_0 = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -t^2 sin(x)$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -t^2 sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -t^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}t^2\sqrt{2}$

l) $f(x) = -\frac{t}{2}cos(x) + \frac{t}{\pi}x^2;\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\qquad f'(x) = -\frac{t}{2}sin(x) + \frac{2t}{\pi}x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{t}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2t}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{t}{2} + t = \frac{t}{2}$

Lösung A3

$f(x) = sin(x);\quad f'(x) = \cos(x)$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$f'(x) = 1 = cos(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;\quad x_2 = 2\pi$

f hat in $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 2\pi$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x-Achse selbst hat die Steigung $m = 0$:

$f'(x) = 0 = cos(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2};\quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ dieselbe Steigung wie die x-Achse.

Die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$:

$f'(x) = \frac{1}{2} = cos(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4};\quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{4}$ sowie $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ dieselbe Steigung wie die Gerade mit $y = \frac{1}{2}x$.

Lösung A4

$f(x) = sin(x) - 2;\quad f'(x) = cos(x)$

a) $cos(x) = 0; \Rightarrow\ x_1 = \frac{\pi}{2};\ \ x_2 = \frac{3}{2}\pi$

b) Es gibt keiner Stellen $f'(x) > 1$, da $\mathbb{W}$ von $cos(x) = [-1;1]$

Lösung A5

a)	$f(x) = 2cos(x) - 1$	$f'(x) = -2sin(x)$	$f''(x) = -2cos(x)$
b)	$f(x) = 2sin(3x)$	$f'(x) = 6cos(3x)$	$f''(x) = -18sin(3x)$
c)	$f(x) = x - sin(0{,}3\pi x)$	$f'(x) = 1 - 0{,}3\pi cos(0{,}3\pi x)$	$f''(x) = 0{,}09\pi^2 sin(0{,}3\pi x)$
d)	$f(x) = 4sin(3 + 2x) + 1$	$f'(x) = 8cos(3 + 2x)$	$f''(x) = -16sin(3 + 2x)$
e)	$f(x) = x - 2cos(2(x + 1))$	$f'(x) = 1 - 4\,sin\big(2(x + 1)\big)$	$f''(x) = -8cos\big(2(x + 1)\big)$
f)	$f(x) = 4\,cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$f'(x) = -\frac{4}{\pi} sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$f''(x) = -\frac{4}{\pi^2} cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$
g)	$f(x) = -3\,sin(2x^2 - 1)$	$f'(x) = -12x\,cos(2x^2 - 1)$	$f''(x) = -48x^2\,sin(2x^2 - 1)$
h)	$f(x) = 4\,sin^2(5x - 3)$	$f'(x) = 40\,sin(5x - 3) \cdot cos(5x - 3)$	
		$u = 40sin(5x - 3)$	$u' = 200cos(5x - 3)$
		$v = cos(5x - 3)$	$v' = -5sin(5x - 3)$

$$f''(x) = 200\,cos^2(5x - 3) - 200\,sin^2(5x - 3)$$
$$= 200(cos^2(5x - 3) - sin^2(5x - 3)$$