

Aufgabenblatt Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Differenzialrechnung
Lösungen
Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Lösung A1

- a) Für $f(x) = \sin(x)$ gilt $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ ist falsch, denn die 4. Ableitung von $\sin(x)$ ist $\sin(x)$.
- b) Für $f(x) = \sin(x)$ gilt $f^{(9)}(x) = \sin(x)$ ist falsch, denn die 9. Ableitung von $\sin(x)$ ist $\cos(x)$.
- c) Für $f(x) = \cos(x)$ gilt $f^{(10)}(x) = -\sin(x)$ ist falsch, denn die 10. Ableitung von $\cos(x)$ ist $-\cos(x)$.
- d) Für $f(x) = \cos(x)$ gilt $f^{(10)}(x) = -\cos(x)$ ist richtig, siehe c)
- e) Für $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ gilt $f^{(16)}(x) = \sin(x) - \cos(x)$ ist richtig.

Lösung A2

- a) $f(x) = -\frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot x; x_0 = \frac{\pi}{4}$ $f'(x) = -\frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2}$
 $f'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{8}\sqrt{2} = -\frac{1}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2} = 0$
- b) $f(x) = \frac{1}{4}x + \cos(x); x_0 = \frac{2\pi}{3}$ $f'(x) = \frac{1}{4} - \sin(x)$
 $f'(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4} - \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
- c) $f(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{4}{3}; x_0 = \frac{\pi}{3}$ $f'(x) = \frac{1}{3}\cos(x)$
 $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
- d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sin(x); x_0 = 0$ $f'(x) = \frac{1}{2}x + \cos(x)$
 $f'(0) = \cos(0) = 1$
- e) $f(x) = -2\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x); x_0 = \frac{5\pi}{6}$ $f'(x) = -2\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$
 $f'(\frac{5\pi}{6}) = -2\cos(\frac{5\pi}{6}) - \sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{6}) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$
- f) $f(x) = -\sin(x) + x; x_0 = 0$ $f'(x) = -\cos(x) + 1$
 $f'(0) = -\cos(0) + 1 = -1 + 1 = 0$
- g) $f(x) = 5\cos(x) + 3x; x_0 = \frac{\pi}{4}$ $f'(x) = -5\sin(x) + 3$
 $f'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) + 3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3$
- h) $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x); x_0 = \frac{\pi}{3}$ $f'(x) = \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$
 $f'(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
- i) $f(x) = -tsin(x) + t^2\cos(x); x_0 = \frac{\pi}{2}$ $f'(x) = -t\cos(x) - t^2\sin(x)$
 $f'(\frac{\pi}{2}) = -tsin(\frac{\pi}{2}) + t^2\cos(\frac{\pi}{2}) = -t + 0 = -t$
- j) $f(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}\sin(x) + t\cos(x); x_0 = \frac{\pi}{3}$ $f'(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}\cos(x) - t\sin(x)$
 $f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{t}{\sqrt{3}}\cos(\frac{\pi}{3}) - t\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{t}{2\sqrt{3}} - t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{t\sqrt{3}}{6} - \frac{t\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{3}t\sqrt{3}$
- k) $f(x) = t^2\cos(x) - t^2; x_0 = \frac{3\pi}{4}$ $f'(x) = -t^2\sin(x)$
 $f'(\frac{3\pi}{4}) = -t^2\sin(\frac{3\pi}{4}) = -t^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}t^2\sqrt{2}$
- l) $f(x) = -\frac{t}{2}\cos(x) + \frac{t}{\pi}x^2; x_0 = \frac{\pi}{2}$ $f'(x) = -\frac{t}{2}\sin(x) + \frac{2t}{\pi}x$
 $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{t}{2}\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{2t}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{t}{2} + t = \frac{t}{2}$

Differenzialrechnung

Aufgabenblatt Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Lösungen
Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Lösung A3

$$f(x) = \sin(x); \quad f'(x) = \cos(x)$$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$$f'(x) = 1 = \cos(x) \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 2\pi$$

f hat in $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 2\pi$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x -Achse selbst hat die Steigung $m = 0$:

$$f'(x) = 0 = \cos(x) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ dieselbe Steigung wie die x -Achse.

Die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} = \cos(x) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{4}$ sowie $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ dieselbe Steigung wie die Gerade mit $y = \frac{1}{2}x$.

Lösung A4

$$f(x) = \sin(x) - 2; \quad f'(x) = \cos(x)$$

a) $\cos(x) = 0; \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi$

b) Es gibt keiner Stellen $f'(x) > 1$, da \mathbb{W} von $\cos(x) = [-1; 1]$

Lösung A5

- | | | |
|---|---|---|
| a) $f(x) = 2\cos(x) - 1$ | $f'(x) = -2\sin(x)$ | $f''(x) = -2\cos(x)$ |
| b) $f(x) = 2\sin(3x)$ | $f'(x) = 6\cos(3x)$ | $f''(x) = -18\sin(3x)$ |
| c) $f(x) = x - \sin(0,3\pi x)$ | $f'(x) = 1 - 0,3\pi\cos(0,3\pi x)$ | $f''(x) = 0,09\pi^2\sin(0,3\pi x)$ |
| d) $f(x) = 4\sin(3 + 2x) + 1$ | $f'(x) = 8\cos(3 + 2x)$ | $f''(x) = -16\sin(3 + 2x)$ |
| e) $f(x) = x - 2\cos(2(x + 1))$ | $f'(x) = 1 - 4\sin(2(x + 1))$ | $f''(x) = -8\cos(2(x + 1))$ |
| f) $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$ | $f'(x) = -\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$ | $f''(x) = -\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$ |
| g) $f(x) = -3\sin(2x^2 - 1)$ | $f'(x) = -12x\cos(2x^2 - 1)$ | $f''(x) = -48x^2\sin(2x^2 - 1)$ |
| h) $f(x) = 4\sin^2(5x - 3)$ | $f'(x) = 40\sin(5x - 3) \cdot \cos(5x - 3)$
$u = 40\sin(5x - 3)$
$v = \cos(5x - 3)$ | $u' = 200\cos(5x - 3)$
$v' = -5\sin(5x - 3)$
$f''(x) = 200\cos^2(5x - 3) - 200\sin^2(5x - 3)$
$= 200(\cos^2(5x - 3) - \sin^2(5x - 3))$ |