Aufgabenblatt Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = -sin(3x) \cdot cos(3x)$

b) $f(x) = 4x \cdot cos(2x+4)$

c) $f(x) = x^2 \cdot sin^3(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot sin(x^3)$

e) $f(x) = cos^4(\sqrt{x}) \cdot (x-2)^2$

f) $f(x) = 3\,sin(3x-4) \cdot 5x$

g) $f(x) = sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x}$

h) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot tan(2x-4)$

Aufgabe A2

Weise nach, dass die 1. und die 2. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \tan(x)$ lautet:

$$f'(x) = 1 + tan^2(x)$$
$$f''(x) = 2 \cdot tan(x) \cdot (1 + tan^2(x))$$

Aufgabe A3

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot sin(4x)$

b) $f(x) = (3x + \cos(x))^2$

c) $f(x) = 4(x^3 + sin(x))^2$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot sin(3x+3)$

e) $f(x) = (2x - cos(x))^2$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Für diese Aufgaben ist die Produktregel erforderlich.

a) $f(x) = -\sin(3x) \cdot \cos(3x)$ $\quad u = -\sin(3x)$ $\quad u' = -3\cos(3x)$

$v = \cos(3x)$ $\quad v' = -3\sin(3x)$

$f'(x) = -3\cos^2(3x) + 3\sin^2(3x) = 3(\sin^2(x) - \cos^2(x))$

b) $f(x) = 4x \cdot \cos(2x+4)$ $\quad u = 4x$ $\quad u' = 4$

$v = \cos(2x+4)$ $\quad v' = -2\sin(2x+4)$

$f'(x) = 4\cos(2x+4) - 8x \cdot \sin(2x+4)$

c) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3(x)$ $\quad u = x^2$ $\quad u' = 2x$

$v = \sin^3(x)$ $\quad v' = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = 2x \cdot \sin^3(x) + 3x^2 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = x \cdot \sin^2(x)\big(2\sin(x) + 3x\cos(x)\big)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x^3)$ $\quad u = \frac{1}{x}$ $\quad u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = \sin(x^3)$ $\quad v' = 3x^2\cos(x^3)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x^3) + 3x \cdot \cos(x^3)$

e) $f(x) = \cos^4(\sqrt{x}) \cdot (x-2)^2$ $\quad u = \cos^4(\sqrt{x})$ $\quad u' = -\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \cos^3(\sqrt{x}) \cdot \sin(\sqrt{x})$

$v = (x-2)^2$ $\quad v' = 2(x-2)$

$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \cos^3(\sqrt{x}) \cdot \sin(\sqrt{x}) \cdot (x-2)^2 + 2(x-2) \cdot \cos^4(\sqrt{x})$

f) $f(x) = 3\sin(3x-4) \cdot 5x$ $\quad u = 5x$ $\quad u' = 5$

$v = 3\sin(3x-4)$ $\quad v' = 9\cos(3x-4)$

$f'(x) = 15\sin(3x-4) + 45x \cdot \cos(3x-4)$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\quad u = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\quad u' = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

$v = \sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$ $\quad v' = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$

$f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+x^2\right)}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$

$f'(x) = \frac{x \cdot \sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right) + (4x^3-2) \cdot \cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{4x\sqrt{x}}$

h) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot \tan(2x-4)$ $\quad u = 2x^3 + x^2$ $\quad u' = 6x^2 + 2x$

$v = \tan(2x-4)$ $\quad v' = \frac{2}{\cos^2(2x-4)}$

$f'(x) = (6x^2 + 2x) \cdot \tan(2x-4) + \frac{2 \cdot (2x^3+x^2)}{\cos^2(2x-4)}$

$= 2x((3x+1) \cdot \tan(2x-4) + \sec^2(2x-4) \cdot (2x^2 + x))$

Lösung A2

Über die Definition des Tangens $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und der Quotientenregel erhalten wir:

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad u = \sin(x)$ $\quad u' = \cos(x)$ $\quad v = \cos(x)$ $\quad v' = -\sin(x)$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) - (-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $\quad$ ***q.e.d.***

$f''(x) = 2 \cdot \tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$ $\quad$ ***q.e.d.***

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot sin(4x)$ $\quad u = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2$ $\quad u' = 2\left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right) \cdot \frac{3}{5}x^2$

$u' = \frac{6x^5+120x^2}{25}$

$v = sin(4x)$ $\quad v' = 4cos(4x)$

$f'(x) = \frac{6x^5+120x^2}{25} \cdot sin(4x) + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot cos(4x)$

$u = \frac{6x^5+120x^2}{25}$ $\quad u' = \frac{6x^4+48x}{5}$

$v = \sin(4x)$ $\quad v' = 4cos(4x)$

$w = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2$ $\quad w' = \frac{6x^5+120x^2}{25}$

$t = 4\cos(4x)$ $\quad t' = -4sin(4x)$

$f''(x) = \left(\frac{6x^4+48x}{5}\right) \cdot sin(4x) + 4\left(\frac{6x^5+120x^2}{25}\right) \cdot cos(4x) +$

$4\left(\frac{6x^5+120x^2}{25}\right) \cdot co\,s(4x) - 4\left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot sin(4x)$

$f''(x) = 4cos(4x) \cdot \left(\frac{12x^5+240x^2}{25}\right) + sin(4x) \cdot \left(-\frac{4}{25}x^6 + \frac{6}{5}x^4 - \frac{32}{5}x^3 + \frac{48}{5}x - 64\right)$

b) $f(x) = (3x + cos(x))^2$

$f'(x) = 2(3x + cos(x)) \cdot (3 - sin(x))$

$u = 6x + 2cos(x)$ $\quad u' = 6 - 2sin(x)$

$v = 3 - sin(x)$ $\quad v' = -cos(x)$

$f''(x) = 2 \cdot (3 - sin(x)) \cdot (3 - sin(x)) \; - cos(x) \cdot (6x + 2\,cos(x))$

$f''(x) = 2 \cdot (3 - \sin(x))^2 - \cos(x) \cdot (\cos(x) + 3x))$

c) $f(x) = 4(x^3 + sin(x))^2$

$f'(x) = 8(x^3 + sin(x)) \cdot (3x^2 + cos(x))$

$u = 8(x^3 + si\,n(x))$ $\quad u' = 8(3x^2 + co\,s(x))$

$v = 3x^2 + cos(x)$ $\quad v' = 6x - sin(x)$

$f''(x) = 8 \cdot (3x^2 + cos(x)) \cdot (3x^2 - co\,s(x)) + (6x - si\,n(x)) \cdot 8 \cdot (x^3 + sin(x))$

$f''(x) = 8 \cdot (9x^4 - cos^2(x)) + 6x^4 + 6x \cdot sin(x) - x^3 \cdot sin(x) - sin^2(x))$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot sin(3x + 3)$

$u = x^2 - 4$ $\quad u' = 2x$

$v = sin(3x + 3)$ $\quad v' = 3cos(3x + 3)$

$f'(x) = 2x \cdot sin(3x + 3) + 3 \cdot (x^2 - 4) \cdot cos(3x + 3)$

$u = 2x$ $\quad u' = 2$

$v = sin(3x + 3)$ $\quad v' = 3cos(3x + 3)$

$w = 3(x^2 - 4)$ $\quad w' = 6x$

$t = cos(3x + 3)$ $\quad t' = -3sin(3x + 3)$

$f''(x) = 2 \cdot sin(3x + 3) + 6x \cdot cos(3x + 3) + 6x \cdot cos(3x + 3) - 9(x^2 - 4) \cdot sin(3x + 3)$

$f''(x) = 12x \cdot cos(3x + 3) - (9x^2 - 38) \cdot sin(3x + 3)$

e) $f(x) = (2x - cos(x))^2$

$f'(x) = 2(2x - co\,s(x)) \cdot (2 + sin(x))$

$u = 2(2x - co\,s(x))$ $\quad u' = 2(2 + sin(x))$

$v = 2 + sin(x)$ $\quad v' = cos(x)$

$f''(x) = 2(2 + sin(x)) \cdot (2 + si\,n(x)) + 2(2x - co\,s(x)) \cdot cos(x)$

$f''(x) = 2((2 + sin(x))^2 + cos\,(x) \cdot (2x - cos(x)))$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de