Aufgabenblatt Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Level 3 – Expert – Blatt 2

Dokument mit 14 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = (sin(x) - cos(x))^3$

b) $f(x) = x^2 \cdot sin(-x + 2)$

c) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot tan(2x - 4)$

d) $f(x) = 2x \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

e) $f(x) = x \cdot sin(-2x + 3)$

f) $f(x) = x \cdot sin(x)$

g) $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$

h) $f(x) = x \cdot \sin^2(x)$

i) $f(x) = x \cdot sin(x^2)$

j) $f(x) = x^2 \cdot sin(x^2)$

k) $f(x) = \cos(x) \cdot 5x$

l) $f_a(t) = \frac{a}{t} \cdot \cos(2at)$

m) $f_k(t) = k^2 t \cdot sin\left(\frac{1}{k} t\right)$

Aufgabe A2

Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = cos(x)$ die Funktion f' mit $f'(x) = -sin(x)$ ist.

Lösung A1

a) $f(x) = (sin(x) - cos(x))^3$

$f'(x) = 3 \cdot (sin(x) - cos(x))^2 \cdot (sin(x) + cos(x))$

$u = 3 \cdot (sin(x) - cos(x))^2 \qquad u' = 6 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (sin(x) + cos(x))$

$v = (sin(x) + cos(x)) \qquad v' = -(sin(x) - cos(x))$

$f''(x) = 6 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (sin(x) + cos(x))^2 -$
$3 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (sin(x) - cos(x))^2$
$= 3 \cdot (sin(x) - cos(x))(sin^2(x) + 6\, sin(x)\, cos(x) + cos^2(x))$

$f''(x) = 3 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (1 + 6\, sin(x)\, cos(x))$

b) $f(x) = x^2 \cdot sin(-x + 2) \qquad u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v = -sin(x - 2) \qquad v' = -cos(x - 2)$

$f'(x) = -2x \cdot sin(x - 2) - x^2 \cdot cos(x - 2)$

$u = -2x \qquad u' = -2$

$v = sin(x - 2) \qquad v' = cos(x - 2)$

$w = -x^2 \qquad w' = -2x$

$t = cos(x - 2) \qquad t' = -sin(x - 2)$

$f''(x) = -2 \cdot sin(x - 2) - 2x \cdot cos(x - 2) - 2x \cdot cos(x - 2) + x^2 \cdot sin(x - 2)$

$f''(x) = sin(x - 2)(x^2 - 2) - 4x \cdot cos(x - 2)$

c) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot tan(2x - 4) \quad u = 2x^3 + x^2 \qquad u' = 6x^2 + 2x$

$v = tan(2x - 4) \qquad v' = 2(1 + tan^2(2x - 4))$

$f'(x) = (6x^2 + 2x) \cdot tan(2x - 4) + 2 \cdot (2x^3 + x^2)(1 + tan^2(2x - 4))$

$u = 6x^2 + 2x \qquad u' = 12x + 2$

$v = tan(2x - 4) \qquad v' = 2(1 + tan^2(2x - 4))$

$w = 4x^3 + 2x^2 \qquad w' = 12x^2 + 4x$

$t = 1 + tan^2(2x - 4) = sec^2(x)$

$t' = 4tan(2x - 4) \cdot sec^2(x)$

$f''(x) = (12x + 2) \cdot tan(2x - 4) + (12x^2 + 4x) \cdot sec^2(x) + (12x^2 + 4x) \cdot sec^2(x) +$
$(16x^3 + 8x^2) \cdot tan(2x - 4) \cdot sec^2(x)$

$f''(x) = tan(2x - 4) \cdot (12x + 2) + (16x^3 + 8x^2) \cdot sec^2(x)) + (24x^2 + 8x) \cdot sec^2(x)$

d) $f(x) = 2x \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad u = 2x \qquad u' = 2$

$v = sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad v' = x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$f'(x) = 2 \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) + 2x^2 \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$u = 2 \qquad u' = 0$

$v = sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad v' = x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$w = 2x^2 \qquad w' = 4x$

$t = cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad t' = -x \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$f''(x) = 2x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) + 4x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) - 2x^3 \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$f''(x) = 6x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) - 2x^3 \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

e) $f(x) = x \cdot sin(-2x+3)$ $\quad u = x \quad u' = 1$

$v = -sin(2x-3) \quad v' = -2cos(2x-3)$

$f'(x) = -sin(2x-3) - 2x \cdot cos(2x-3)$

$u = -2x \quad u' = -2$

$v = cos(2x-3) \quad v' = -2sin(2x-3)$

$f''(x) = -2\,cos(2x-3) - 2\,cos(2x-3) + 4x \cdot sin(2x-3)$

$f''(x) = -4\,cos(2x-3) + 4xsin(2x-3)$

f) $f(x) = x \cdot sin(x) \quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin(x) \quad v' = cos(x)$

$f'(x) = sin(x) + x \cdot cos(x)$

$f''(x) = cos(x) + cos(x) - x \cdot sin(x) = 2cos(x) - x \cdot sin(x)$

g) $f(x) = x^2 \cdot sin(x) \quad u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = sin(x) \quad v' = cos(x)$

$f'(x) = 2x \cdot sin(x) + x^2 \cdot cos(x)$

$f''(x) = 2sin(x) + 2xcos(x) + 2x \cdot cos(x) - x^2 \cdot sin(x)$

$= sin(x) \cdot (2 - x^2) + 4x \cdot cos(x)$

h) $f(x) = x \cdot sin^2(x) \quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin^2(x) \quad v' = 2sin(x) \cdot cos(x)$

$f'(x) = sin^2(x) + 2x \cdot sin(x) \cdot cos(x)$

Für $f''(x)$ leiten wir zunächst $g(x) = 2x \cdot sin(x) \cdot cos(x)$ ab.

$u = 2x \quad u' = 2 \quad v = sin(x) \quad v' = cos(x)\; w = cos(x) \quad w' = -sin(x)$

$g'(x) = u'vw + uv'w + uvw' = 2\,sin(x)\,cos(x) + 2xcos^2(x) - 2xsin^2(x)$

$f''(x) = 2sin(x)cos(x) + 2\,sin(x)\,cos(x) + 2xcos^2(x) - 2xsin^2(x)$

$= 4sin(x)cos(x) + 2x(cos^2(x) - sin^2(x))$

Alternativ:

Nach den Additionstheoremen gilt:

$2\,sin(x)\,cos(x) = sin(2x)$

$f'(x) = sin^2(x) + x \cdot sin(2x)$

$f''(x) = 2\,sin(x)\,cos(x) + sin(2x) + 4x \cdot cos(2x) = sin(2x) + sin(2x) + 2xcos(2x)$

$= 2 \cdot sin(2x) + 2x \cdot cos(2x)$

i) $f(x) = x \cdot sin(x^2) \quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin(x^2) \quad v' = 2x \cdot cos(x^2)$

$f'(x) = sin(x^2) + 2x^2 \cdot cos(x^2)$

$f''(x) = 2x \cdot cos(x^2) + 4x \cdot cos(x^2) - 4x^3 \cdot sin(x^2)$

$= 6x \cdot cos(x^2) - 4x^3 \cdot sin(x^2)$

j) $f(x) = x^2 \cdot sin(x^2) \quad u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = sin(x^2) \quad v' = 2x \cdot cos(x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot sin(x^2) + 2x^3 \cdot cos(x^2)$

$f''(x) = 2 \cdot sin(x^2) + 4x^2 \cdot cos(x^2) + 6x^2 \cdot cos(x^2) - 4x^4 sin(x^2)$

$= 2 \cdot sin(x^2)\,(1 - 2x^4) + 10x^2 \cdot cos(x^2)$

$= 6x \cdot cos(x^2) - 4x^3 \cdot sin(x^2)$

k) $f(x) = cos(x) \cdot 5x \quad u = 5x \quad u' = 2$

$v = cos(x) \quad v' = -sin(x)$

$f'(x) = 2 \cdot cos(x) - 5x \cdot sin(x)$

$f''(x) = -2 \cdot sin(x) + 5 \cdot sin(x) - 5x \cdot cos(x)$

$= 3 \cdot sin(x) - 5x \cdot cos(x)$

l) $f_a(t) = \frac{a}{t} \cdot cos(2at)$ $\quad u = \frac{a}{t} \quad u' = -\frac{a}{t^2}$

$v = cos(2at) \quad v' = -2a \cdot sin(2at)$

$f_a{}'(t) = -\frac{a}{t^2} \cdot cos(2at) - \frac{2a^2}{t} \cdot sin(2at)$

$u = -\frac{a}{t^2} \quad u' = \frac{2a}{t^3}$

$v = cos(2at) \quad v' = -2a \cdot sin(2at)$

$w = \frac{-2a^2}{t} \quad w' = \frac{2a^2}{t^2}$

$s = sin(2at) \quad s' = 2a \cdot cos(2at)$

$f_a{}''(t) = \frac{2a}{t^3} \cdot cos(2at) + \frac{2a^2}{t^2} \cdot sin(2at) + \frac{2a^2}{t^2} \cdot sin(2at) - \frac{4a^3}{t} \cdot cos(2at)$

$= \frac{4a^2}{t^2} \cdot sin(2at) + cos(2at) \cdot \left(\frac{2a}{t^3} - \frac{4a^3}{t}\right)$

m) $f_k(t) = k^2 t \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right) \quad u = k^2 t \quad u' = k^2$

$v = sin\left(\frac{1}{k}t\right) \quad v' = \frac{1}{k} \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right)$

$f'(x) = k^2 \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right) + kt \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right)$

$f''(x) = k \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right) + k \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right) - t \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right)$

$= 2k \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right) - t \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right)$

Lösung A2

$f(x) = cos(x)$

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{cos(x+h) - cos(h)}{x+h-x}$

Das Additionstheorem $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$ ergibt aufgelöst:

$-2\,sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Somit ist:

$cos(x+h) - cos(h) = -2\,sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = -2\,sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)$

und

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{2\,sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$ | Erweiterung mit $\frac{1}{2}$

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$

Wegen

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$

ist somit

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} -sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim\limits_{h \to 0} -sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot 1 = -sin(x)$