Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Inhaltsverzeichnis
Ableitung Trigonometrische Funktionen

Kapitel mit 108 Aufgaben

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Die trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan (cot) haben eigene Regeln bezgl. ihrer Ableitungen. Im Folgenden lernen wir diese Ableitungsregeln kennen.

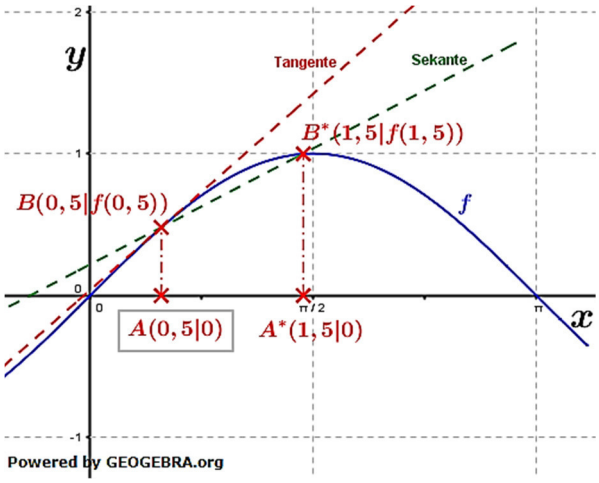
Ableitung der sin-Funktion

Wie bei den anderen Funktionen auch, bilden wir den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Wir betrachten den Graphen von f mit $f(x) = sin(x)$.

Wir bilden nun den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entsprechend der h-Methode, wie wir dies in anderen Kapiteln auch kennengelernt haben.

Zunächst die Steigung der Sekante durch die Punkte B und B':



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin(x+h) - sin(x)}{x+h-x}$$

$$= \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

Die Sekante durch B und B' hat die Steigung $\frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$.

Nun verkleinern wir h so lange, bis der Punkt A mit dem Punkt A' und der Punkt B mit dem Punkt B' zusammenfällt, also $h = 0$ ist.

Zur Untersuchung des $\lim\limits_{h \to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$ müssen wir zunächst noch ein paar Umformungen vornehmen. Über das Additionstheorem

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ erhalten wir:

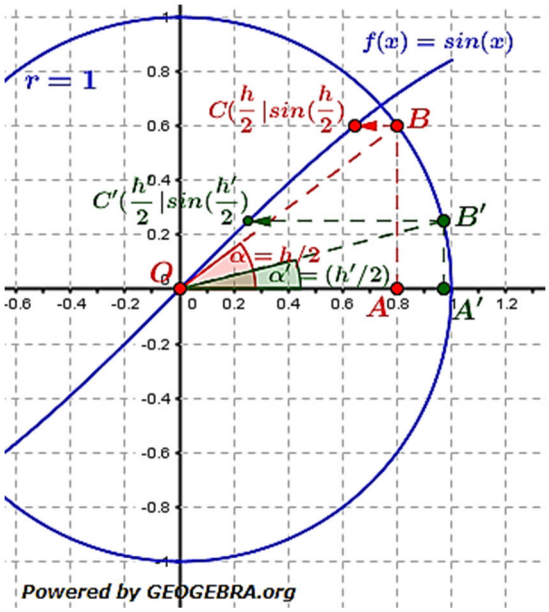
$$sin(x+h) - sin(x) = 2cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = 2cos(x + \frac{h}{2}) \cdot sin(\frac{h}{2})$$

Damit haben wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$. Wir erweitern diesen Bruch mit $\frac{1}{2}$ und erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{h \cdot \frac{1}{2}} = cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis.



Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

Mit kleiner werdendem h gilt für h':
$sin\left(\frac{h'}{2}\right)=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{A'B'}}{1}=\overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle|sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.

Mit $h\longrightarrow 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung.

Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot 1=cos(x)$$

Somit ist bewiesen: die Ableitung der Funktion

f mit $f(x)=sin(x)$ ist die Funktion f' mit $f'(x)=cos(x)$.

Ableitung der cos-Funktion

Auf ähnliche Art und Weise erfolgt der Nachweis der Ableitung der Funktion f mit $f(x)=cos(x)$. Wir betrachten uns dies nicht im Detail, sondern merken uns nur:
Die Ableitung der Funktion

f mit $f(x)=cos(x)$ ist die Funktion f' mit $f'(x)=-sin(x)$.

Ableitung der tan-Funktion

Nachdem wir nun die Ableitungen der sin-, und cos-Funktion kennen, ermitteln wir die Ableitung der tan-Funktion aus der Definition des tan, nämlich

$$tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Der folgende Nachweis greift auf die Quotientenregel der Ableitungen zurück, die da lautet:

Die Ableitung einer Funktion f mit $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ ist $f'\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$.

Mit $f(x)=tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$ gilt:

$u(x)=sin(x)$ $\qquad$ $u'(x)=cos(x)$
$v(x)=cos(x)$ $\qquad$ $v'(x)=-sin(x)$

und damit:

$$f'(x) = \frac{cos(x) \cdot cos(x) + sin(x) \cdot sin(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)}$$

Wegen $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ gilt weiterhin

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Wegen der Umformung von $\frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$ gilt aber auch:

$$f'(x) = 1 + tan^2(x)$$

Ableitung der cot-Funktion

Über die Definition des cot, nämlich

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

und der Quotientenregel erhalten wir:

$u(x) = cos(x)$ $\qquad$ $u'(x) = -sin(x)$

$v(x) = sin(x)$ $\qquad$ $v'(x) = cos(x)$

$$f'(x) = \frac{-sin(x) \cdot sin(x) - cos(x) \cdot cos(x)}{sin^2(x)} = -\frac{sin^2(x) + cos^2(x)}{sin^2(x)} = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

alternativ

$$f'(x) = -1 - cot^2(x)$$

Merksatz Ableitung trigonometrische Funktionen

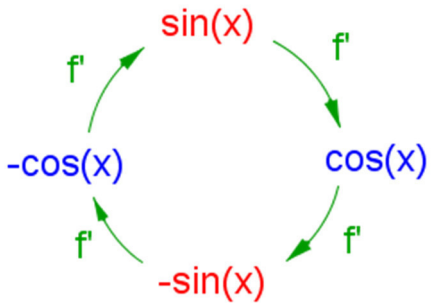
Die Ableitung von:

$f(x) = sin(x)$ lautet $f'(x) = cos(x)$

$f(x) = cos(x)$ lautet $f'(x) = -sin(x)$

$f(x) = -sin(x)$ lautet $f'(x) = -cos(x)$

$f(x) = -cos(x)$ lautet $f'(x) = sin(x)$



$f(x) = tan(x)$ lautet $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$

$f(x) = cot(x)$ lautet $f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)} = -1 - cot^2(x)$

Höhere Ableitungen von sin und cos

Mit diesen Ableitungsregeln können wir jedoch nur die Basisfunktionen in der Form $a \cdot sin(x) + d$, $a \cdot cos(x) + d$ bzw. $a \cdot tan(x) + d$ ableiten, nicht jedoch die allgemeine Form der trigonometrischen Funktionen $a \cdot sin\big(b(x-c)\big) + d$, $a \cdot cos\big(b(x-c)\big) + d$ bzw. $a \cdot tan\big(b(x-c)\big) + d$ und auch keine mit anderen Funktionstypen zusammengesetzte Funktionen wie etwa $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-7)\right) + 1$ oder gar $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ ableiten. Für solche Ableitungen benötigen wir zusätzliche Regeln wie etwa die Produkt- und Quotientenregel sowie die Kettenregel.

Beispiele

Beispiel 1: f mit $f(x) = sin(2x)$
Lösung 1: $f'(x) = cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$ | Kettenregel

Beispiel 2: f mit $f(x) = 1{,}5\, cos\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right)$
Lösung 2: $f'(x) = -1{,}5 sin\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4} sin\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right)$ | Kettenregel

Beispiel 3: f mit $f(x) = sin(x) \cdot cos(x)$.
Lösung 3: $u = sin(x)$; $u' = cos(x)$ | Produktregel
$v = cos(x)$; $v' = -sin(x)$
$f'(x) = u'v + uv'$
$f'(x) = cos(x) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot sin(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

Beispiel 4: f mit $f(x) = sin^2(x)$.
Lösung 4: $f'(x) = 2\, sin(x) \cdot cos(x)$ | Kettenregel

Beispiel 5: f mit $f(x) = 20 sin(x^2 - 1)$.
Lösung 5: $f'(x) = 20\, cos(x^2 - 1) \cdot 2x = 40x \cdot cos(x^2 - 1)$ | Kettenregel

Beispiel 6: Leite f mit $f(x) = 3cos(x^2)$ zweimal ab.
Lösung 6: $f'(x) = -3\, sin(x^2) \cdot 2x = -6x \cdot sin(x^2)$ | Kettenregel
$u = -6x$; $u' = -6$ | Produktregel
$v = sin(x^2)$; $v' = 2x \cdot cos(x^2)$ | für 2. Ableitung
$f''(x) = u'v + uv'$
$f''(x) = -6\, sin(x^2) - 6x \cdot 2x \cdot cos(x^2) = -6\, sin(x^2) - 12x^2 \cdot cos(x^2)$

Beispiel 7: f mit $f(x) = \frac{x}{3\cos(x^2+2x)}$.
Lösung 7: $u = x$; $u' = 1$
$v = 3cos(x^2 + 2x)$; $v' = -3(2x+2)sin(x^2 + 2x)$
$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | Quotientenregel
$f'(x) = \frac{3\, cos(x^2+2x) - x \cdot (-6x-6)\, sin(x^2+2x)}{9(cos(x^2+2x))^2} = \frac{3\big(cos(x^2+2x) + 2(x^2+2x) sin(x^2+2x)\big)}{9(cos(x^2+2x))^2}$
$= \frac{cos(x^2+2x) + 2(x^2+2x) sin(x^2+2x)}{3(cos(x^2+2x))^2}$

Aufgabe A1

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen trigonometrischen Funktionsgleichungen.

$f_n(x)$	$f_n'(x)$	$f_n''(x)$
$f_1(x) = sin(x)$	$f_1'(x) =$	$f_1''(x) =$
$f_2(x) = 2sin(x)$	$f_2'(x) =$	$f_2''(x) =$
$f_3(x) = asin(x)$	$f_3'(x) =$	$f_3''(x) =$
$f_4(x) = cos(x)$	$f_4'(x) =$	$f_4''(x) =$
$f_5(x) = 3cos(x)$	$f_5'(x) =$	$f_5''(x) =$
$f_6(x) = bcos(x)$	$f_6'(x) =$	$f_6''(x) =$
$f_7(x) = \frac{1}{2}sin(x) + 3$	$f_7'(x) =$	$f_7''(x) =$
$f_8(x) = \pi cos(x) - 5$	$f_8'(x) =$	$f_8''(x) =$

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen trigonometrischen Funktionsgleichungen.

$f_n(x)$	$f_n'(x)$	$f_n''(x)$
$f_1(x) = 2sin(x+2)$	$f_1'(x) =$	$f_1''(x) =$
$f_2(x) = asin(x+c)$	$f_2'(x) =$	$f_2''(x) =$
$f_3(x) = \frac{1}{c}sin(x-8)$	$f_3'(x) =$	$f_3''(x) =$
$f_4(x) = 0{,}5cos(x-2)$	$f_4'(x) =$	$f_4''(x) =$
$f_5(x) = 4 + cos(x-8)$	$f_5'(x) =$	$f_5''(x) =$
$f_6(x) = bcos(x+\pi)$	$f_6'(x) =$	$f_6''(x) =$
$f_7(t) = \frac{1}{2}sin\left(\frac{1}{8}+t\right) - 3$	$f_7'(x) =$	$f_7''(x) =$
$f_8(t) = \pi cos(t+x) + x$	$f_8'(x) =$	$f_8''(x) =$

Aufgabe A3

Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$.

a) $f(x) = -9sin(x)$ b) $f(x) = 5 + cos(x)$ c) $f(x) = 5x - cos(x)$

d) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}cos(x)$ e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{sin(x)}{2}$ f) $f(x) = \frac{3}{x^3} + 2\,sin(x)$

g) $f(x) = \frac{x^{-3}}{3} - \frac{cos(x)}{4}$ h) $f(x) = \frac{3sin(x)}{4} - \frac{2cos(x)}{5}$ i) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{8}sin(x)$

Lösung A1

$f_n(x)$	$f_n'(x)$	$f_n''(x)$
$f_1(x) = sin(x)$	$f_1'(x) = cos(x)$	$f_1''(x) = -sin(x)$
$f_2(x) = 2sin(x)$	$f_2'(x) = 2\,cos(x)$	$f_2''(x) = -2sin(x)$
$f_3(x) = asin(x)$	$f_3'(x) = acos(x)$	$f_3^{''(x)} = -asin(x)$
$f_4(x) = cos(x)$	$f_4'(x) = -sin(x)$	$f_4''(x) = -cos(x)$
$f_5(x) = 3cos(x)$	$f_5'(x) = -3sin(x)$	$f_5''(x) = -3cos(x)$
$f_6(x) = bcos(x)$	$f_6'(x) = -bsin(x)$	$f_6''(x) = -bcos(x)$
$f_7(x) = \frac{1}{2}sin(x) + 3$	$f_7'(x) = \frac{1}{2}cos(x)$	$f_7''(x) = -\frac{1}{2}sin(x)$
$f_8(x) = \pi co\,s(x) - 5$	$f_8'(x) = -\pi sin(x)$	$f_8''(x) = -\pi cos(x)$

Lösung A2

$f_n(x)$	$f_n'(x)$	$f_n''(x)$
$f_1(x) = 2sin(x+2)$	$f_1'(x) = 2cos(x+2)$	$f_1''(x) = -2sin(x+2)$
$f_2(x) = asin(x+c)$	$f_2'(x) = acos(x+c)$	$f_2''(x) = -asin(x+2)$
$f_3(x) = \frac{1}{c}sin(x-8)$	$f_3'(x) = \frac{1}{c}cos(x-8)$	$f_3''(x) = -\frac{1}{c}sin(x-8)$
$f_4(x) = 0{,}5cos(x-2)$	$f_4'(x) = -0{,}5sin(x-2)$	$f_4''(x) = -0{,}5cos(x-2)$
$f_5(x) = 4 + cos(x-8)$	$f_5'(x) = -sin(x-8)$	$f_5''(x) = -cos(x-8)$
$f_6(x) = bcos(x+\pi)$	$f_6'(x) = -bsin(x+\pi)$	$f_6''(x) = -bcos(x+\pi)$
$f_7(t) = \frac{1}{2}sin\left(\frac{1}{8}+t\right) - 3$	$f_7'(x) = \frac{1}{2}cos\left(\frac{1}{8}+t\right)$	$f_7''(x) = -\frac{1}{2}sin\left(\frac{1}{8}+t\right)$
$f_8(t) = \pi co\,s(t+x) + x$	$f_8'(x) = -\pi sin(t+x)$	$f_8''(x) = -\pi cos(7+x)$

Lösung A3

a) $f(x) = -9sin(x)$ $\quad f'(x) = -9cos(x)$ $\quad f''(x) = 9sin(x)$

b) $f(x) = 5 + cos(x)$ $\quad f'(x) = -sin(x)$ $\quad f''(x) = -cos(x)$

c) $f(x) = 5x - cos(x)$ $\quad f'(x) = 5 + sin(x)$ $\quad f''(x) = cos(x)$

d) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}cos(x)$ $\quad f'(x) = 2x + \frac{1}{2}sin(x)$ $\quad f''(x) = 2 + \frac{1}{2}cos(x)$

e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{sin(x)}{2}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{cos(x)}{2}$ $\quad f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{sin(x)}{2}$

f) $f(x) = \frac{3}{x^3} + 2\,sin(x)$ $\quad f'(x) = -\frac{9}{x^4} + 2cos(x)$ $\quad f''(x) = \frac{36}{x^5} - 2sin(x)$

g) $f(x) = \frac{x^{-3}}{3} - \frac{cos(x)}{4}$ $\quad f'(x) = -x^{-4} + \frac{sin(x)}{4}$ $\quad f''(x) = 4x^{-5} + \frac{cos(x)}{4}$

h) $f(x) = \frac{3sin(x)}{4} - \frac{2cos(x)}{5}$ $\quad f'(x) = \frac{3cos(x)}{4} + \frac{2sin(x)}{5}$ $\quad f''(x) = -\frac{3sin(x)}{4} + \frac{2cos(x)}{5}$

i) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{8}sin(x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8}cos(x)$ $\quad f''^{(x)} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{8}sin(x)$

Aufgabe A1

Wahr oder falsch?

a) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = cos(x)$

b) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = sin(x)$

c) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -sin(x)$

d) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -cos(x)$

e) Für $f(x) = sin(x) - cos(x)$ gilt $f^{(16)\prime}(x) = sin(x) - cos(x)$

Aufgabe A2

Bestimme den exakten Wert der Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}sin(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + cos(x);\ \ x_0 = \frac{2\pi}{3}$

c) $f(x) = \frac{1}{3}sin(x) + \frac{4}{3};\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + sin(x);\ \ x_0 = 0$

e) $f(x) = -2\,sin(x) + \sqrt{3}cos(x);\ \ x_0 = \frac{5\pi}{6}$

f) $f(x) = -\,sin(x) + x;\ \ x_0 = 0$

g) $f(x) = 5\,cos(x) + 3x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

h) $f(x) = \sqrt{3}\,sin(x) - cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

i) $f_t(x) = -tsin(x) + t^2\,cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

j) $f_t(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}sin(x) + tcos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

k) $f_t(x) = t^2\,cos(x) - t^2;\ \ x_0 = \frac{3\pi}{4}$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2}cos(x) + \frac{t}{\pi}x^2;\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe A3

In welchem Punkt hat der Graph von f mit $f(x) = sin(x)$ im Intervall $[0; 2\pi]$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende, die x-Achse bzw. die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$?

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = si\,n(x) - 2$ für $x \in [0; 2\pi]$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $f'(x_0) = 0$?

b) Gibt es Stellen mit $f'(x_0) > 1$?

Aufgabe A5

Bestimme jeweils die erste und zweite Ableitung.

a) $f(x) = 2\,cos(x) - 1$

b) $f(x) = 2sin(3x)$

c) $f(x) = x - sin(0{,}3\pi x)$

d) $f(x) = 4\,sin(3 + 2x) + 1$

e) $f(x) = \pi - 2cos(2(x + 1))$

f) $f(x) = 4\,cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

g) $f(x) = -3sin(2x^2 - 1)$

h) $f(x) = 4\,sin^2(5x - 3)$

Lösung A1

a) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = cos(x)$ ist falsch, denn die 4. Ableitung von $sin(x)$ ist $sin(x)$.

b) Für $f(x) = sin(x)$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = sin(x)$ ist falsch, denn die 9. Ableitung von $sin(x)$ ist $cos(x)$.

c) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -sin(x)$ ist falsch, denn die 10. Ableitung von $cos(x)$ ist -$cos(x)$.

d) Für $f(x) = cos(x)$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -cos(x)$ ist richtig, siehe c)

e) Für $f(x) = sin(x) - cos(x)$ gilt $f^{(16)\prime}(x) = sin(x) - cos(x)$ ist richtig.

Lösung A2

a) $f(x) = -\frac{1}{4}sin(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{4}cos(x) + \frac{1}{8}\sqrt{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{2} = -\frac{1}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2} = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x + cos(x);\ \ x_0 = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{4} - sin(x)$

$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{1}{3}sin(x) + \frac{4}{3};\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3}cos(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + sin(x);\ \ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}x + cos(x)$

$f'(0) = cos(0) = 1$

e) $f(x) = -2\,sin(x) + \sqrt{3}cos(x);\ \ x_0 = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad f'(x) = -2\,cos(x) - \sqrt{3}sin(x)$

$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\,cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sqrt{3}sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

f) $f(x) = -\,sin(x) + x;\ \ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = -\,cos(x) + 1$

$f'(0) = -\cos(0) + 1 = -1 + 1 = 0$

g) $f(x) = 5\,cos(x) + 3x;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -\,5sin(x) + 3$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3$

h) $f(x) = \sqrt{3}\,sin(x) - cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \sqrt{3}cos(x) - sin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

i) $f(x) = -tsin(x) + t^2\,cos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\qquad f'(x) = -tcos(x) - t^2sin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\,tsin\left(\frac{\pi}{2}\right) + t^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -t + 0 = -t$

j) $f(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}sin(x) + tcos(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{t}{\sqrt{3}}cos(x) - tsin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{t}{\sqrt{3}}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - tsin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{t}{2\sqrt{3}} - t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{t\sqrt{3}}{6} - \frac{t\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{3}t\sqrt{3}$

k) $f(x) = t^2\,cos(x) - t^2;\ \ x_0 = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = -t^2sin(x)$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -t^2sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -t^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}t^2\sqrt{2}$

l) $f(x) = -\frac{t}{2}cos(x) + \frac{t}{\pi}x^2;\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\qquad f'(x) = -\frac{t}{2}sin(x) + \frac{2t}{\pi}x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{t}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2t}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{t}{2} + t = \frac{t}{2}$

Lösung A3

$f(x) = sin(x); \quad f'(x) = \cos(x)$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$f'(x) = 1 = cos(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2\pi$

f hat in $x_1 = 0$ sowie $x_2 = 2\pi$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x-Achse selbst hat die Steigung $m = 0$:

$f'(x) = 0 = cos(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ dieselbe Steigung wie die x-Achse.

Die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$:

$f'(x) = \frac{1}{2} = cos(x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{4}$ sowie $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ dieselbe Steigung wie die Gerade mit $y = \frac{1}{2}x$.

Lösung A4

$f(x) = sin(x) - 2; \quad f'(x) = cos(x)$

a) $cos(x) = 0; \Rightarrow \; x_1 = \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi$

b) Es gibt keiner Stellen $f'(x) > 1$, da $\mathbb{W}$ von $cos(x) = [-1; 1]$

Lösung A5

a)	$f(x) = 2cos(x) - 1$	$f'(x) = -2sin(x)$	$f''(x) = -2cos(x)$
b)	$f(x) = 2sin(3x)$	$f'(x) = 6cos(3x)$	$f''(x) = -18sin(3x)$
c)	$f(x) = x - sin(0{,}3\pi x)$	$f'(x) = 1 - 0{,}3\pi cos(0{,}3\pi x)$	$f''(x) = 0{,}09\pi^2 sin(0{,}3\pi x)$
d)	$f(x) = 4sin(3 + 2x) + 1$	$f'(x) = 8cos(3 + 2x)$	$f''(x) = -16sin(3 + 2x)$
e)	$f(x) = x - 2cos(2(x + 1))$	$f'(x) = 1 - 4\,sin\big(2(x + 1)\big)$	$f''(x) = -8cos\big(2(x + 1)\big)$
f)	$f(x) = 4\,cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$f'(x) = -\frac{4}{\pi} sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$f''(x) = -\frac{4}{\pi^2} cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$
g)	$f(x) = -3\,sin(2x^2 - 1)$	$f'(x) = -12x\,cos(2x^2 - 1)$	$f''(x) = -48x^2\,sin(2x^2 - 1)$
h)	$f(x) = 4\,sin^2(5x - 3)$	$f'(x) = 40\,sin(5x - 3) \cdot cos(5x - 3)$	
		$u = 40sin(5x - 3)$	$u' = 200cos(5x - 3)$
		$v = cos(5x - 3)$	$v' = -5sin(5x - 3)$
		$f''(x) = 200\,cos^2(5x - 3) - 200\,sin^2(5x - 3)$	
		$= 200(cos^2(5x - 3) - sin^2(5x - 3)$	

Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung.

a) $f(x) = -sin(3x) + cos(3x)$

b) $f(x) = 4cos(2x + 4)$

c) $f(x) = sin^3(x)$

d) $f(x) = sin(x^3)$

e) $f(x) = cos^4(\sqrt{x})$

f) $f(x) = 3\,sin^2((x-2)^2)$

g) $f(x) = sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$

h) $f(x) = 2\,tan^2(2x)$

Aufgabe A2

Bestimme den exakten Wert der Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 2\,cos(x) - 1;\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

b) $f(x) = 2sin(3x);\ \ x_0 = \frac{2\pi}{3}$

c) $f(x) = \pi x - sin(0{,}5\pi x);\ \ x_0 = 2$

d) $f(x) = 4\,sin(3\pi + 2x) + 1;\ \ x_0 = 0$

e) $f(x) = \pi - 2cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right);\ \ x_0 = \frac{5\pi}{6}$

f) $f(x) = 4\,cos\left(\frac{x}{\pi}\right);\ \ x_0 = 0$

g) $f(x) = -3sin\left(2x^2 - \frac{\pi}{4}\right);\ \ x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

h) $f(x) = 4\,sin^2\left(5x - \frac{4}{3}\pi\right);\ \ x_0 = \frac{\pi}{3}$

i) $f_t(x) = -tcos^2(x) + t^2\,sin(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$

j) $f_t(x) = \frac{t}{2\sqrt{3}}cos(x) + tsin(x);\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $f_t(x) = t^2\,sin(x) + t^2;\ \ x_0 = \frac{3\pi}{4}$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2\sqrt{2}}cos(x) + \frac{t}{\pi x};\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

Aufgabe A3

In welchem Punkt hat der Graph von f mit $f(x) = sin^2(x)$ im Intervall $[0; 2\pi]$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende bzw. die x-Achse?

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3sin(x) - 1$ für $x \in [0; 2\pi]$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $f'(x_0) = 0$?

b) Gibt es Stellen mit $f'(x_0) > 1$?

Lösung A1

a) $f(x) = -\sin(3x) + \cos(3x)$ $\quad f'(x) = -3\cos(3x) - 3\sin(3x)$

b) $f(x) = 4\cos(2x+4)$ $\quad f'(x) = -8\sin(2x+4)$

c) $f(x) = \sin^3(x)$ $\quad f'(x) = 3\sin^2(x)\cdot\cos(x)$

d) $f(x) = \sin(x^3)$ $\quad f'(x) = 3x^2\cos(x^3)$

e) $\cos^4(\sqrt{x})$ $\quad f'(x) = 4\cos^3(\sqrt{x})\cdot\left(-\sin(\sqrt{x})\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{x}}\cos^3(\sqrt{x})\cdot\sin(\sqrt{x})$

f) $f(x) = 3\sin^2((x-2)^2)$ $\quad f'(x) = 6\sin((x-2)^2)\cdot\cos((x-2)^2)\cdot(2x-2)$

$= 12(x-1)\sin((x-2)^2)\cdot\cos((x-2)^2)$

g) $f(x) = \sin(\frac{1}{x} + x^2)$ $\quad f'(x) = (-\frac{1}{x^2} + 2x)(\cos\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$

h) $f(x) = 2\tan^2(2x)$ $\quad f'(x) = 4\cdot\tan(2x)\cdot(1+\tan^2(2x))\cdot 2$

$= 8\cdot\tan(2x)\cdot(1+\tan^2(2x))$

Lösung A2

a) $f(x) = 2\cos(x) - 1;\ x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad f'(x) = -2\sin(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

b) $f(x) = 2\sin(3x);\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$ $\quad f'(x) = 6\cos(3x)$

$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6\cos(2\pi) = 6\cdot 1 = 6$

c) $f(x) = \pi x - \sin(0{,}5\pi x);\ x_0 = 2$ $\quad f'(x) = 1 - 0{,}5\pi\cos(0{,}5\pi x)$

$f'(2) = \pi - 0{,}5\pi\cos(0{,}5\pi\cdot 2) = \pi - (-0{,}5\pi) = 1{,}5\pi$

d) $f(x) = 4\sin(3\pi + 2x) + 1;\ x_0 = 0$ $\quad f'(x) = 8\cos(3\pi + 2x)$

$f'(0) = 8\cos(3\pi) = -8$

e) $f(x) = \pi - 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right);\ x_0 = \frac{5\pi}{6}$ $\quad f'(x) = -4\sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -4\sin\left(2\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = -4\sin\left(\frac{7}{3}\pi\right) = -4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

f) $f(x) = 4\cos\left(\frac{x}{\pi}\right);\ x_0 = 0$ $\quad f'(x) = -\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

$f'(0) = -\frac{4}{\pi}\cos(0) = -\frac{4}{\pi}$

g) $f(x) = -3\sin(2x^2 - \frac{\pi}{4});\ x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ $\quad f'(x) = -12x\cdot\cos\left(2x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$

$f'^{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -12x\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -6\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = -3\sqrt{2\pi}$

h) $f(x) = 4\sin^2\left(5x - \frac{4}{3}\pi\right);\ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad f'(x) = 20\sin\left(5x - \frac{4}{3}\pi\right)\cdot\cos\left(5x - \frac{4}{3}\pi\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 20\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{4}{3}\pi\right) = 20\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 5\sqrt{3}$

i) $f(x) = -t\cos^2(x) + t^2\sin(x);\ x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad f'(x) = 2t\cos(x)\cdot\sin(x) + t^2\cos(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2t\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + t^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

j) $f(x) = \frac{t}{2\sqrt{3}}\cos(x) + t\sin(x);\ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad f'(x) = -\frac{t}{2\sqrt{3}}\sin(x) + t\cos(x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{t}{2\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + t\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{t}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{t}{2} = \frac{t}{4} + \frac{t}{2} = \frac{3}{2}t$

k) $f(x) = t^2\,sin(x) + t^2\,;\;\; x_0 = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = t^2 cos(x)$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = t^2 cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}t^2$

l) $f(x) = -\frac{t}{2\sqrt{2}}cos(x) + \frac{t}{\pi x};\;\; x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad f'(x) = \frac{t}{2\sqrt{2}}sin(x) - \frac{t}{\pi x^2}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{t}{2\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{t}{\frac{\pi^3}{16}} = \frac{t}{4} + \frac{16t}{\pi^3} = \frac{t(\pi^3+64)}{4\pi^3}$

Lösung A3

$f(x) = sin^2(x);\quad f'(x) = 2sin(x)\cdot cos(x)$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$f'(x) = 1 = 2si\,n(x)\cdot co\,s(x) \;\;\Rightarrow\;\; x_1 = \frac{\pi}{4};\;\; x_2 = \frac{5\pi}{4}$

f hat in $x_1 = \frac{\pi}{4}$ sowie $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x-Achse selbst hat die Steigung $m = 1$:

$f'(x) = 0 = 2si\,n(x)\cdot co\,s(x) \;\;\Rightarrow\;\; x_1 = 0;\;\; x_2 = \frac{\pi}{2};\;\; x_3 = \pi;\;\; x_4 = \frac{3}{2}\pi;\;\; x_5 = 2\pi$

f hat in $x = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi\right\}$ dieselbe Steigung wie die x-Achse.

Lösung A4

$f(x) = 3sin(x) - 1;\quad f'(x) = 3cos(x)$

a) $3co\,s(x) = 0; \Rightarrow\;\; x_1 = \frac{\pi}{2};\;\; x_2 = \frac{3}{2}\pi$

b) Ja, es gibt Stellen mit $f'(x) > 1$, da $\mathbb{W}$ von $3cos(x) = [-3; 3]$

Aufgabenblatt Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = -sin(3x) \cdot cos(3x)$

b) $f(x) = 4x \cdot cos(2x+4)$

c) $f(x) = x^2 \cdot sin^3(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot sin(x^3)$

e) $f(x) = cos^4(\sqrt{x}) \cdot (x-2)^2$

f) $f(x) = 3\,sin(3x-4) \cdot 5x$

g) $f(x) = sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x}$

h) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot tan(2x-4)$

Aufgabe A2

Weise nach, dass die 1. und die 2. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \tan(x)$ lautet:

$$f'(x) = 1 + tan^2(x)$$
$$f''(x) = 2 \cdot tan(x) \cdot (1 + tan^2(x))$$

Aufgabe A3

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot sin(4x)$

b) $f(x) = (3x + \cos(x))^2$

c) $f(x) = 4(x^3 + sin(x))^2$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot sin(3x+3)$

e) $f(x) = (2x - cos(x))^2$

Lösung A1

Für diese Aufgaben ist die Produktregel erforderlich.

a) $f(x) = -\sin(3x) \cdot \cos(3x)$ $\quad u = -\sin(3x)$ $\quad u' = -3\cos(3x)$

$v = \cos(3x)$ $\quad v' = -3\sin(3x)$

$f'(x) = -3\cos^2(3x) + 3\sin^2(3x) = 3(\sin^2(x) - \cos^2(x))$

b) $f(x) = 4x \cdot \cos(2x+4)$ $\quad u = 4x$ $\quad u' = 4$

$v = \cos(2x+4)$ $\quad v' = -2\sin(2x+4)$

$f'(x) = 4\cos(2x+4) - 8x \cdot \sin(2x+4)$

c) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3(x)$ $\quad u = x^2$ $\quad u' = 2x$

$v = \sin^3(x)$ $\quad v' = 3\sin^2(x) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = 2x \cdot \sin^3(x) + 3x^2 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

$f'(x) = x \cdot \sin^2(x)\big(2\sin(x) + 3x\cos(x)\big)$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x^3)$ $\quad u = \frac{1}{x}$ $\quad u' = -\frac{1}{x^2}$

$v = \sin(x^3)$ $\quad v' = 3x^2\cos(x^3)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x^3) + 3x \cdot \cos(x^3)$

e) $f(x) = \cos^4(\sqrt{x}) \cdot (x-2)^2$ $\quad u = \cos^4(\sqrt{x})$ $\quad u' = -\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \cos^3(\sqrt{x}) \cdot \sin(\sqrt{x})$

$v = (x-2)^2$ $\quad v' = 2(x-2)$

$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \cos^3(\sqrt{x}) \cdot \sin(\sqrt{x}) \cdot (x-2)^2 + 2(x-2) \cdot \cos^4(\sqrt{x})$

f) $f(x) = 3\sin(3x-4) \cdot 5x$ $\quad u = 5x$ $\quad u' = 5$

$v = 3\sin(3x-4)$ $\quad v' = 9\cos(3x-4)$

$f'(x) = 15\sin(3x-4) + 45x \cdot \cos(3x-4)$

g) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\quad u = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\quad u' = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

$v = \sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$ $\quad v' = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$

$f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+x^2\right)}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$

$f'(x) = \frac{x \cdot \sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right) + (4x^3-2) \cdot \cos\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{4x\sqrt{x}}$

h) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot \tan(2x-4)$ $\quad u = 2x^3 + x^2$ $\quad u' = 6x^2 + 2x$

$v = \tan(2x-4)$ $\quad v' = \frac{2}{\cos^2(2x-4)}$

$f'(x) = (6x^2 + 2x) \cdot \tan(2x-4) + \frac{2 \cdot (2x^3+x^2)}{\cos^2(2x-4)}$

$= 2x((3x+1) \cdot \tan(2x-4) + \sec^2(2x-4) \cdot (2x^2 + x))$

Lösung A2

Über die Definition des Tangens $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und der Quotientenregel erhalten wir:

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad u = \sin(x)$ $\quad u' = \cos(x)$ $\quad v = \cos(x)$ $\quad v' = -\sin(x)$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) - (-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $\quad$ ***q.e.d.***

$f''(x) = 2 \cdot \tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$ $\quad$ ***q.e.d.***

Lösung A3

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot sin(4x)$ $\quad u = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2$ $\quad u' = 2\left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right) \cdot \frac{3}{5}x^2$

$u' = \frac{6x^5+120x^2}{25}$

$v = sin(4x)$ $\quad v' = 4cos(4x)$

$f'(x) = \frac{6x^5+120x^2}{25} \cdot sin(4x) + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot cos(4x)$

$u = \frac{6x^5+120x^2}{25}$ $\quad u' = \frac{6x^4+48x}{5}$

$v = \sin(4x)$ $\quad v' = 4cos(4x)$

$w = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2$ $\quad w' = \frac{6x^5+120x^2}{25}$

$t = 4\cos(4x)$ $\quad t' = -4sin(4x)$

$f''(x) = \left(\frac{6x^4+48x}{5}\right) \cdot sin(4x) + 4\left(\frac{6x^5+120x^2}{25}\right) \cdot cos(4x) +$

$4\left(\frac{6x^5+120x^2}{25}\right) \cdot co\,s(4x) - 4\left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot sin(4x)$

$f''(x) = 4cos(4x) \cdot \left(\frac{12x^5+240x^2}{25}\right) + sin(4x) \cdot \left(-\frac{4}{25}x^6 + \frac{6}{5}x^4 - \frac{32}{5}x^3 + \frac{48}{5}x - 64\right)$

b) $f(x) = (3x + cos(x))^2$

$f'(x) = 2(3x + cos(x)) \cdot (3 - sin(x))$

$u = 6x + 2cos(x)$ $\quad u' = 6 - 2sin(x)$

$v = 3 - sin(x)$ $\quad v' = -cos(x)$

$f''(x) = 2 \cdot (3 - sin(x)) \cdot (3 - sin(x)) \; - cos(x) \cdot (6x + 2\,cos(x))$

$f''(x) = 2 \cdot (3 - \sin(x))^2 - \cos(x) \cdot (\cos(x) + 3x))$

c) $f(x) = 4(x^3 + sin(x))^2$

$f'(x) = 8(x^3 + sin(x)) \cdot (3x^2 + cos(x))$

$u = 8(x^3 + si\,n(x))$ $\quad u' = 8(3x^2 + co\,s(x))$

$v = 3x^2 + cos(x)$ $\quad v' = 6x - sin(x)$

$f''(x) = 8 \cdot (3x^2 + cos(x)) \cdot (3x^2 - co\,s(x)) + (6x - si\,n(x)) \cdot 8 \cdot (x^3 + sin(x))$

$f''(x) = 8 \cdot (9x^4 - cos^2(x)) + 6x^4 + 6x \cdot sin(x) - x^3 \cdot sin(x) - sin^2(x))$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot sin(3x + 3)$

$u = x^2 - 4$ $\quad u' = 2x$

$v = sin(3x + 3)$ $\quad v' = 3cos(3x + 3)$

$f'(x) = 2x \cdot sin(3x + 3) + 3 \cdot (x^2 - 4) \cdot cos(3x + 3)$

$u = 2x$ $\quad u' = 2$

$v = sin(3x + 3)$ $\quad v' = 3cos(3x + 3)$

$w = 3(x^2 - 4)$ $\quad w' = 6x$

$t = cos(3x + 3)$ $\quad t' = -3sin(3x + 3)$

$f''(x) = 2 \cdot sin(3x + 3) + 6x \cdot cos(3x + 3) + 6x \cdot cos(3x + 3) - 9(x^2 - 4) \cdot sin(3x + 3)$

$f''(x) = 12x \cdot cos(3x + 3) - (9x^2 - 38) \cdot sin(3x + 3)$

e) $f(x) = (2x - cos(x))^2$

$f'(x) = 2(2x - co\,s(x)) \cdot (2 + sin(x))$

$u = 2(2x - co\,s(x))$ $\quad u' = 2(2 + sin(x))$

$v = 2 + sin(x)$ $\quad v' = cos(x)$

$f''(x) = 2(2 + sin(x)) \cdot (2 + si\,n(x)) + 2(2x - co\,s(x)) \cdot cos(x)$

$f''(x) = 2((2 + sin(x))^2 + cos\,(x) \cdot (2x - cos(x)))$

Aufgabe A1

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = (sin(x) - cos(x))^3$

b) $f(x) = x^2 \cdot sin(-x + 2)$

c) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot tan(2x - 4)$

d) $f(x) = 2x \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

e) $f(x) = x \cdot sin(-2x + 3)$

f) $f(x) = x \cdot sin(x)$

g) $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$

h) $f(x) = x \cdot \sin^2(x)$

i) $f(x) = x \cdot sin(x^2)$

j) $f(x) = x^2 \cdot sin(x^2)$

k) $f(x) = \cos(x) \cdot 5x$

l) $f_a(t) = \frac{a}{t} \cdot \cos(2at)$

m) $f_k(t) = k^2 t \cdot sin\left(\frac{1}{k} t\right)$

Aufgabe A2

Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = cos(x)$ die Funktion f' mit $f'(x) = -sin(x)$ ist.

Lösung A1

a) $f(x) = (sin(x) - cos(x))^3$

$f'(x) = 3 \cdot (sin(x) - cos(x))^2 \cdot (sin(x) + cos(x))$

$u = 3 \cdot (sin(x) - cos(x))^2 \qquad u' = 6 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (sin(x) + cos(x))$

$v = (sin(x) + cos(x)) \qquad v' = -(sin(x) - cos(x))$

$f''(x) = 6 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (sin(x) + cos(x))^2 -$
$3 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (sin(x) - cos(x))^2$
$= 3 \cdot (sin(x) - cos(x))(sin^2(x) + 6\, sin(x)\, cos(x) + cos^2(x))$

$f''(x) = 3 \cdot (sin(x) - cos(x)) \cdot (1 + 6\, sin(x)\, cos(x))$

b) $f(x) = x^2 \cdot sin(-x + 2) \qquad u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v = -sin(x - 2) \qquad v' = -cos(x - 2)$

$f'(x) = -2x \cdot sin(x - 2) - x^2 \cdot cos(x - 2)$

$u = -2x \qquad u' = -2$

$v = sin(x - 2) \qquad v' = cos(x - 2)$

$w = -x^2 \qquad w' = -2x$

$t = cos(x - 2) \qquad t' = -sin(x - 2)$

$f''(x) = -2 \cdot sin(x - 2) - 2x \cdot cos(x - 2) - 2x \cdot cos(x - 2) + x^2 \cdot sin(x - 2)$

$f''(x) = sin(x - 2)(x^2 - 2) - 4x \cdot cos(x - 2)$

c) $f(x) = (2x^3 + x^2) \cdot tan(2x - 4) \quad u = 2x^3 + x^2 \qquad u' = 6x^2 + 2x$

$v = tan(2x - 4) \qquad v' = 2(1 + tan^2(2x - 4))$

$f'(x) = (6x^2 + 2x) \cdot tan(2x - 4) + 2 \cdot (2x^3 + x^2)(1 + tan^2(2x - 4))$

$u = 6x^2 + 2x \qquad u' = 12x + 2$

$v = tan(2x - 4) \qquad v' = 2(1 + tan^2(2x - 4))$

$w = 4x^3 + 2x^2 \qquad w' = 12x^2 + 4x$

$t = 1 + tan^2(2x - 4) = sec^2(x)$

$t' = 4tan(2x - 4) \cdot sec^2(x)$

$f''(x) = (12x + 2) \cdot tan(2x - 4) + (12x^2 + 4x) \cdot sec^2(x) + (12x^2 + 4x) \cdot sec^2(x) +$
$(16x^3 + 8x^2) \cdot tan(2x - 4) \cdot sec^2(x)$

$f''(x) = tan(2x - 4) \cdot (12x + 2) + (16x^3 + 8x^2) \cdot sec^2(x)) + (24x^2 + 8x) \cdot sec^2(x)$

d) $f(x) = 2x \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad u = 2x \qquad u' = 2$

$v = sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad v' = x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$f'(x) = 2 \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) + 2x^2 \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$u = 2 \qquad u' = 0$

$v = sin(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad v' = x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$w = 2x^2 \qquad w' = 4x$

$t = cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) \qquad t' = -x \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$f''(x) = 2x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) + 4x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) - 2x^3 \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

$f''(x) = 6x \cdot cos(0{,}5x^2 + 1{,}5) - 2x^3 \cdot sin(0{,}5x^2 + 1{,}5)$

e) $f(x) = x \cdot sin(-2x+3)$ $\quad u = x \quad u' = 1$

$v = -sin(2x-3) \quad v' = -2cos(2x-3)$

$f'(x) = -sin(2x-3) - 2x \cdot cos(2x-3)$

$u = -2x \quad u' = -2$

$v = cos(2x-3) \quad v' = -2sin(2x-3)$

$f''(x) = -2\,cos(2x-3) - 2\,cos(2x-3) + 4x \cdot sin(2x-3)$

$f''(x) = -4\,cos(2x-3) + 4xsin(2x-3)$

f) $f(x) = x \cdot sin(x) \quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin(x) \quad v' = cos(x)$

$f'(x) = sin(x) + x \cdot cos(x)$

$f''(x) = cos(x) + cos(x) - x \cdot sin(x) = 2cos(x) - x \cdot sin(x)$

g) $f(x) = x^2 \cdot sin(x) \quad u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = sin(x) \quad v' = cos(x)$

$f'(x) = 2x \cdot sin(x) + x^2 \cdot cos(x)$

$f''(x) = 2sin(x) + 2xcos(x) + 2x \cdot cos(x) - x^2 \cdot sin(x)$

$= sin(x) \cdot (2 - x^2) + 4x \cdot cos(x)$

h) $f(x) = x \cdot sin^2(x) \quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin^2(x) \quad v' = 2sin(x) \cdot cos(x)$

$f'(x) = sin^2(x) + 2x \cdot sin(x) \cdot cos(x)$

Für $f''(x)$ leiten wir zunächst $g(x) = 2x \cdot sin(x) \cdot cos(x)$ ab.

$u = 2x \quad u' = 2 \quad v = sin(x) \quad v' = cos(x)\; w = cos(x) \quad w' = -sin(x)$

$g'(x) = u'vw + uv'w + uvw' = 2\,sin(x)\,cos(x) + 2xcos^2(x) - 2xsin^2(x)$

$f''(x) = 2sin(x)cos(x) + 2\,sin(x)\,cos(x) + 2xcos^2(x) - 2xsin^2(x)$

$= 4sin(x)cos(x) + 2x(cos^2(x) - sin^2(x))$

Alternativ:

Nach den Additionstheoremen gilt:

$2\,sin(x)\,cos(x) = sin(2x)$

$f'(x) = sin^2(x) + x \cdot sin(2x)$

$f''(x) = 2\,sin(x)\,cos(x) + sin(2x) + 4x \cdot cos(2x) = sin(2x) + sin(2x) + 2xcos(2x)$

$= 2 \cdot sin(2x) + 2x \cdot cos(2x)$

i) $f(x) = x \cdot sin(x^2) \quad u = x \quad u' = 1$

$v = sin(x^2) \quad v' = 2x \cdot cos(x^2)$

$f'(x) = sin(x^2) + 2x^2 \cdot cos(x^2)$

$f''(x) = 2x \cdot cos(x^2) + 4x \cdot cos(x^2) - 4x^3 \cdot sin(x^2)$

$= 6x \cdot cos(x^2) - 4x^3 \cdot sin(x^2)$

j) $f(x) = x^2 \cdot sin(x^2) \quad u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = sin(x^2) \quad v' = 2x \cdot cos(x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot sin(x^2) + 2x^3 \cdot cos(x^2)$

$f''(x) = 2 \cdot sin(x^2) + 4x^2 \cdot cos(x^2) + 6x^2 \cdot cos(x^2) - 4x^4 sin(x^2)$

$= 2 \cdot sin(x^2)\,(1 - 2x^4) + 10x^2 \cdot cos(x^2)$

$= 6x \cdot cos(x^2) - 4x^3 \cdot sin(x^2)$

k) $f(x) = cos(x) \cdot 5x \quad u = 5x \quad u' = 2$

$v = cos(x) \quad v' = -sin(x)$

$f'(x) = 2 \cdot cos(x) - 5x \cdot sin(x)$

$f''(x) = -2 \cdot sin(x) + 5 \cdot sin(x) - 5x \cdot cos(x)$

$= 3 \cdot sin(x) - 5x \cdot cos(x)$

l) $f_a(t) = \frac{a}{t} \cdot cos(2at)$ $\quad u = \frac{a}{t} \quad u' = -\frac{a}{t^2}$

$v = cos(2at) \quad v' = -2a \cdot sin(2at)$

$f_a{}'(t) = -\frac{a}{t^2} \cdot cos(2at) - \frac{2a^2}{t} \cdot sin(2at)$

$u = -\frac{a}{t^2} \quad u' = \frac{2a}{t^3}$

$v = cos(2at) \quad v' = -2a \cdot sin(2at)$

$w = \frac{-2a^2}{t} \quad w' = \frac{2a^2}{t^2}$

$s = sin(2at) \quad s' = 2a \cdot cos(2at)$

$f_a{}''(t) = \frac{2a}{t^3} \cdot cos(2at) + \frac{2a^2}{t^2} \cdot sin(2at) + \frac{2a^2}{t^2} \cdot sin(2at) - \frac{4a^3}{t} \cdot cos(2at)$

$= \frac{4a^2}{t^2} \cdot sin(2at) + cos(2at) \cdot \left(\frac{2a}{t^3} - \frac{4a^3}{t}\right)$

m) $f_k(t) = k^2 t \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right) \quad u = k^2 t \quad u' = k^2$

$v = sin\left(\frac{1}{k}t\right) \quad v' = \frac{1}{k} \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right)$

$f'(x) = k^2 \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right) + kt \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right)$

$f''(x) = k \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right) + k \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right) - t \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right)$

$= 2k \cdot cos\left(\frac{1}{k}t\right) - t \cdot sin\left(\frac{1}{k}t\right)$

Lösung A2

$f(x) = cos(x)$

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{cos(x+h) - cos(h)}{x+h-x}$

Das Additionstheorem $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$ ergibt aufgelöst:

$-2\,sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Somit ist:

$cos(x+h) - cos(h) = -2\,sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = -2\,sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)$

und

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{2\,sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$ | Erweiterung mit $\frac{1}{2}$

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$

Wegen

$\lim_{h \to 0} \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$

ist somit

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x) = \lim_{h \to 0} -sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} -sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot 1 = -sin(x)$