WIKI Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Die trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan (cot) haben eigene Regeln bezgl. ihrer Ableitungen. Im Folgenden lernen wir diese Ableitungsregeln kennen.

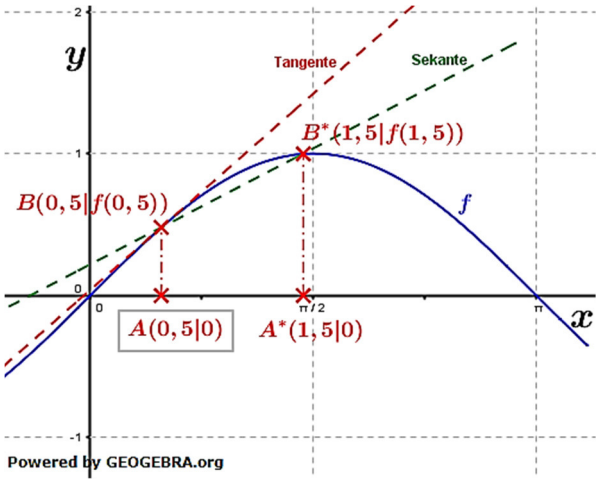
Ableitung der sin-Funktion

Wie bei den anderen Funktionen auch, bilden wir den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Wir betrachten den Graphen von f mit $f(x) = sin(x)$.

Wir bilden nun den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entsprechend der h-Methode, wie wir dies in anderen Kapiteln auch kennengelernt haben.

Zunächst die Steigung der Sekante durch die Punkte B und B':



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin(x+h) - sin(x)}{x+h-x}$$

$$= \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

Die Sekante durch B und B' hat die Steigung $\frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$.

Nun verkleinern wir h so lange, bis der Punkt A mit dem Punkt A' und der Punkt B mit dem Punkt B' zusammenfällt, also $h = 0$ ist.

Zur Untersuchung des $\lim\limits_{h \to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$ müssen wir zunächst noch ein paar Umformungen vornehmen. Über das Additionstheorem

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ erhalten wir:

$$sin(x+h) - sin(x) = 2cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = 2cos(x + \frac{h}{2}) \cdot sin(\frac{h}{2})$$

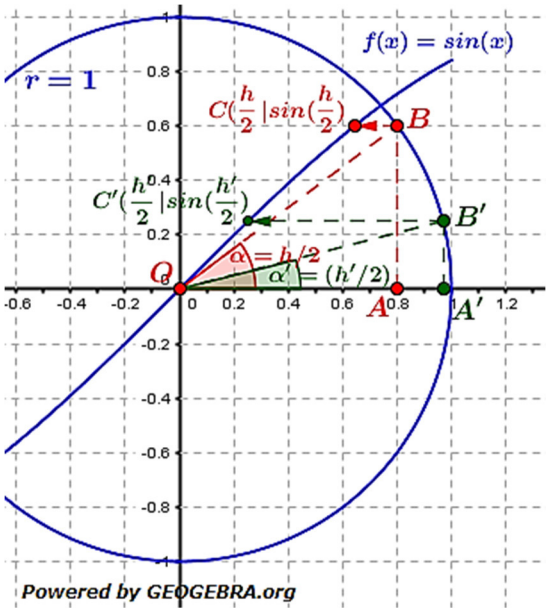
Damit haben wir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$. Wir erweitern diesen Bruch mit $\frac{1}{2}$ und erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{h \cdot \frac{1}{2}} = cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis.
Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.
Mit kleiner werdendem h gilt für h':
$sin\left(\frac{h'}{2}\right)=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{A'B'}}{1}=\overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle|sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.
Mit $h\longrightarrow 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung.



Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot 1=cos(x)$$

Somit ist bewiesen: die Ableitung der Funktion

f mit $f(x)=sin(x)$ ist die Funktion f' mit $f'(x)=cos(x)$.

Ableitung der cos-Funktion

Auf ähnliche Art und Weise erfolgt der Nachweis der Ableitung der Funktion f mit $f(x)=cos(x)$. Wir betrachten uns dies nicht im Detail, sondern merken uns nur:
Die Ableitung der Funktion

f mit $f(x)=cos(x)$ ist die Funktion f' mit $f'(x)=-sin(x)$.

Ableitung der tan-Funktion

Nachdem wir nun die Ableitungen der sin-, und cos-Funktion kennen, ermitteln wir die Ableitung der tan-Funktion aus der Definition des tan, nämlich

$$tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Der folgende Nachweis greift auf die Quotientenregel der Ableitungen zurück, die da lautet:
Die Ableitung einer Funktion f mit $f\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ ist $f'\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$.
Mit $f(x)=tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$ gilt:

$u(x)=sin(x)$ $\qquad$ $u'(x)=cos(x)$
$v(x)=cos(x)$ $\qquad$ $v'(x)=-sin(x)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

und damit:

$$f'(x) = \frac{cos(x) \cdot cos(x) + sin(x) \cdot sin(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)}$$

Wegen $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ gilt weiterhin

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Wegen der Umformung von $\frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)}$ gilt aber auch:

$$f'(x) = 1 + tan^2(x)$$

Ableitung der cot-Funktion

Über die Definition des cot, nämlich

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

und der Quotientenregel erhalten wir:

$u(x) = cos(x)$ $\qquad$ $u'(x) = -sin(x)$

$v(x) = sin(x)$ $\qquad$ $v'(x) = cos(x)$

$$f'(x) = \frac{-sin(x) \cdot sin(x) - cos(x) \cdot cos(x)}{sin^2(x)} = -\frac{sin^2(x) + cos^2(x)}{sin^2(x)} = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

alternativ

$$f'(x) = -1 - cot^2(x)$$

Merksatz Ableitung trigonometrische Funktionen

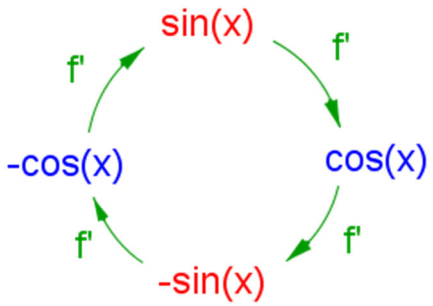
Die Ableitung von:

$f(x) = sin(x)$ lautet $f'(x) = cos(x)$

$f(x) = cos(x)$ lautet $f'(x) = -sin(x)$

$f(x) = -sin(x)$ lautet $f'(x) = -cos(x)$

$f(x) = -cos(x)$ lautet $f'(x) = sin(x)$



$f(x) = tan(x)$ lautet $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$

$f(x) = cot(x)$ lautet $f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)} = -1 - cot^2(x)$

Höhere Ableitungen von sin und cos

Mit diesen Ableitungsregeln können wir jedoch nur die Basisfunktionen in der Form $a \cdot sin(x) + d$, $a \cdot cos(x) + d$ bzw. $a \cdot tan(x) + d$ ableiten, nicht jedoch die allgemeine Form der trigonometrischen Funktionen $a \cdot sin\big(b(x-c)\big) + d$, $a \cdot cos\big(b(x-c)\big) + d$ bzw. $a \cdot tan\big(b(x-c)\big) + d$ und auch keine mit anderen Funktionstypen zusammengesetzte Funktionen wie etwa $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-7)\right) + 1$ oder gar $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ ableiten. Für solche Ableitungen benötigen wir zusätzliche Regeln wie etwa die Produkt- und Quotientenregel sowie die Kettenregel.

Beispiele

Beispiel 1: f mit $f(x) = sin(2x)$
Lösung 1: $f'(x) = cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$ | Kettenregel

Beispiel 2: f mit $f(x) = 1{,}5\, cos\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right)$
Lösung 2: $f'(x) = -1{,}5 sin\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4} sin\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right)$ | Kettenregel

Beispiel 3: f mit $f(x) = sin(x) \cdot cos(x)$.
Lösung 3: $u = sin(x)$; $u' = cos(x)$ | Produktregel
$v = cos(x)$; $v' = -sin(x)$
$f'(x) = u'v + uv'$
$f'(x) = cos(x) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot sin(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

Beispiel 4: f mit $f(x) = sin^2(x)$.
Lösung 4: $f'(x) = 2\, sin(x) \cdot cos(x)$ | Kettenregel

Beispiel 5: f mit $f(x) = 20 sin(x^2 - 1)$.
Lösung 5: $f'(x) = 20\, cos(x^2 - 1) \cdot 2x = 40x \cdot cos(x^2 - 1)$ | Kettenregel

Beispiel 6: Leite f mit $f(x) = 3cos(x^2)$ zweimal ab.
Lösung 6: $f'(x) = -3\, sin(x^2) \cdot 2x = -6x \cdot sin(x^2)$ | Kettenregel
$u = -6x$; $u' = -6$ | Produktregel
$v = sin(x^2)$; $v' = 2x \cdot cos(x^2)$ | für 2. Ableitung
$f''(x) = u'v + uv'$
$f''(x) = -6\, sin(x^2) - 6x \cdot 2x \cdot cos(x^2) = -6\, sin(x^2) - 12x^2 \cdot cos(x^2)$

Beispiel 7: f mit $f(x) = \frac{x}{3\cos(x^2+2x)}$.
Lösung 7: $u = x$; $u' = 1$
$v = 3cos(x^2 + 2x)$; $v' = -3(2x+2)sin(x^2 + 2x)$
$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ | Quotientenregel
$f'(x) = \frac{3\, cos(x^2+2x) - x \cdot (-6x-6)\, sin(x^2+2x)}{9(cos(x^2+2x))^2} = \frac{3\big(cos(x^2+2x) + 2(x^2+2x) sin(x^2+2x)\big)}{9(cos(x^2+2x))^2}$
$= \frac{cos(x^2+2x) + 2(x^2+2x) sin(x^2+2x)}{3(cos(x^2+2x))^2}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de