Aufgabenblatt Ableitungen zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ der nachfolgend gegebenen Umkehrfunktionen und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x^2}\right)$

e) $f(x) = \frac{1}{ln(x)}$

f) $f(x) = \frac{1}{ln(x^2)}$

g) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x)}$

h) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x^2)}$

Lösungstipp: Forme einige der gegebenen Funktionen zuerst nach den Logarithmusgesetzen um.

Aufgabe A2

Berechne die Steigung des Graphen der Funktionen f an der gegebenen Stelle x_0.

a) $f(x) = ln(\sqrt{x});\ \ x_0 = 4$

b) $f(x) = ln(2x^2);\ \ x_0 = 4$

c) $f(x) = sin(\pi \cdot lg(x));\ \ x_0 = 10$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{2}x\right);\ \ x_0 = 2$

e) $f(x) = -cos(\ln(x^2);\ \ x_0 = e^{\frac{\pi}{4}}$

f) $f(x) = 3(x - log_5(x));\ \ x_0 = \frac{2}{ln(5)}$

g) $f(x) = \frac{2}{lg^4(x)};\ \ x_0 = 10$

h) $f(x) = ln(2{,}5x^3 + 0{,}75);\ \ x_0 = 0$

Aufgabe A3

An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

a) $f(x) = ln((2x+4)^2);\ \ g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

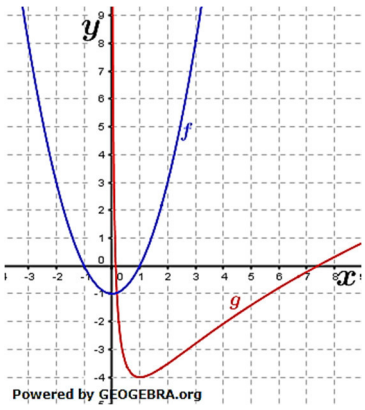
b) $f(x) = -\frac{1}{ln(x)};\ \ g(x) = ln(x)$

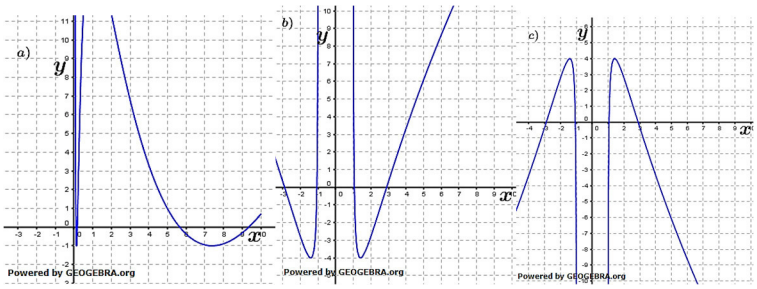
c) $f(x) = sin(ln(x));\ \ g(x) = cos(ln(x));\ \ 0 < x \leq 2\pi;$

Aufgabe A4

Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 1$, und g mit $g(x) = \ln^2(x) - 4$.

Gib an welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$ ist. Kannst du eine Aussage über die anderen beiden Graphen machen?





Lösung A1

a) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right) = ln(1) - ln(x) = -ln(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{x}$ $\qquad f''(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = ln(1) - ln(x^2) = -2ln(x)$

$f'(x) = -\frac{2}{x}$ $\qquad f''(x) = \frac{2}{x^2}$

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right) = ln^2(x)$

$f'(x) = \frac{2ln(x)}{x}$ $\qquad f''(x) = \frac{2x\cdot\frac{1}{x} - 2\,ln(x)}{x^2} = \frac{2(1-ln(x))}{x^2}$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 4ln^2(x)$

$f'(x) = \frac{8ln(x)}{x}$ $\qquad f''(x) = \frac{8(1-ln(x))}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{ln(x)} = ln^{-1}(x)$

$f'(x) = -\frac{ln^{-2}(x)}{x} = -\frac{1}{x\cdot ln^2(x)}$ $\qquad f''(x) = \frac{ln(x)+2}{x^2\,ln^3(x)}$

f) $f(x) = \frac{1}{ln(x^2)} = \frac{1}{2\ln(x)}$

$f'(x) = -\frac{1}{2x\cdot ln^2(x)}$ $\qquad f''(x) = \frac{ln(x)+2}{2x^2\,ln^3(x)}$

g) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x)} = ln^{-2}(x)$

$f'(x) = -\frac{2}{x\cdot ln^3(x)}$ $\qquad f''(x) = \frac{2\,ln(x)+6}{x^2\cdot ln^4(x)}$

h) $f(x) = \frac{1}{ln^2(x^2)} = \frac{1}{4\ln^2(x)}$

$f'(x) = -\frac{1}{2x\cdot\ln^3(x)}$ $\qquad f''(x) = \frac{ln(x)+3}{2x^2\cdot ln^4(x)}$

Lösung A2

a) $f(x) = ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2x}$ $\qquad f'(2) = \frac{1}{4}$

b) $f(x) = ln(2x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{2x^2}\cdot 4x = \frac{2}{x}$ $\qquad f'(4) = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = sin(\pi\cdot lg(x))$

$f'(x) = \frac{\pi}{\ln(10)x}\cdot cos\left(\pi\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)$ $\qquad f'(10) = -\frac{\pi}{10\cdot ln(10)}$

d) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{2}x\right)$

$f'(x) = \frac{2ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ $\qquad f'(2) = 0$

e) $f(x) = -cos(ln(x^2) = -cos(2\,ln(x))$

$f'(x) = \frac{2}{x}\cdot sin(2\,ln(x))$ $\qquad f'\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{2}{e^{\frac{\pi}{4}}}$

f) $f(x) = 3(x - log_5(x))$

$f'(x) = 3\cdot\left(1 - \frac{1}{\ln(5)\cdot x}\right)$ $\qquad f'\left(\frac{2}{\ln(5)}\right) = \frac{3}{2}$

g) $f(x) = \frac{2}{lg^4(x)}$

$f'(x) = \frac{8\,ln^4(10)}{x ln^5(x)}$ $\qquad f'(10) = \frac{8 \cdot ln^4(10)}{10 \cdot ln^5(10)} = \frac{4}{5 \cdot ln(10)}$

h) $f(x) = ln(2{,}5x^3 + 0{,}75)$

$f'(x) = \frac{7{,}5x^2}{2{,}5x^3+0{,}75}$. $\qquad f'(0) = \frac{4}{3}$

Lösung A3

a) $f(x) = ln((2x+4)^2)$ $\qquad g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$

$f'(x) = \frac{2}{x+2}$ $\qquad g'(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{2}{x+2} = \frac{1}{2}x + 2$ $\qquad | \quad \cdot x + 2$

$2 = \frac{x^2+2x}{2} + 2x + 4$ $\qquad | \quad -2;\ \cdot 2$

$x^2 + 6x + 4 = 0$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-4} = -3 \pm \sqrt{5}$ $\qquad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = -3 + \sqrt{5};\ \ x_2 = -3 - \sqrt{5}$

An den Stellen $x_1 = -3 + \sqrt{5}$ und $x_1 = -3 - \sqrt{5}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

b) $f(x) = -\frac{1}{ln(x)}$ $\qquad g(x) = ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln^2(x)}$ $\qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{1}{x \cdot ln^2(x)} = \frac{1}{x}$

$ln^2(x) = 1$

$|\,ln(x)| = 1$

$x_1 = e;\ \ x_2 = \frac{1}{e}$

An den Stellen $x_1 = e$ und $x_2 = \frac{1}{e}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = sin(ln(x))$ $\qquad g(x) = cos(\ln(x))$

$f'(x) = \frac{1}{x} cos(\ln(x))$ $\qquad g'(x) = -\frac{1}{x} sin(ln(x))$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{1}{x} cos(\ln(x)) = -\frac{1}{x} sin(\ln(x))$

$cos(\ln(x)) = -sin(\ln(x))$

$\ln(x_1) = \frac{3}{4}\pi;\ \ln(x_2) = \frac{7}{4}\pi$

$x_1 = e^{0{,}75\pi};\ \ x_2 = e^{1{,}75\pi}$

An den Stellen $x_1 = e^{0{,}75\pi}$ und $x_2 = e^{1{,}75\pi}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

Abbildung a) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$.
Wir haben keine anderen Anhaltspunkte als die Nullstellen.
$f(g(x))$ hat Nullstellen, wenn $(ln^2(x) - 4)^2 = 1$ oder -1 ist. Dies ist der Fall, wenn $ln^2(x) = 5$ oder $ln^2(x) = 3$ ist. $ln^2(x) = 5 \Longrightarrow ln(x) = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow ln(x_{1,2}) = \pm\sqrt{5}$. $ln^2(x) = 3 \Longrightarrow ln(x) = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow ln(x_{3,4}) = \pm\sqrt{3}$. Wir entlogarithmieren die Lösungen und erhalten: $x_1 = e^{-\sqrt{5}} \approx 0{,}11$; $x_2 = e^{\sqrt{5}} \approx 9{,}4$; $x_3 = e^{-\sqrt{3}} \approx 0{,}18$; $x_4 = e^{\sqrt{3}} \approx 5{,}7$. Nur der Graph von a) besitzt dort Nullstellen.
Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = g(f(x)) = ln^2(x^2 - 1) - 4$. Dies ergibt sich aus der Betrachtung des globalen Verhaltens, denn für $x \longrightarrow |\infty|$ gilt $h(x) \longrightarrow \infty$.
Abbildung c) zeigt den an der x-Achse gespiegelten Graphen von b).