

Aufgabenblatt Ableitungen**zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)**

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die erste Ableitung $f'(x)$ der nachfolgend gegebenen, verketteten Logarithmusfunktionen und vereinfache soweit wie möglich.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = \sin(\ln(x))$ | b) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$ |
| c) $f(x) = 3\ln(\sin(2x))$ | d) $f(x) = \frac{1}{3}\ln(3x^4 - x^2)$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - \ln(4x))^{-3}$ | f) $f(x) = \cos(\ln(5x) + 2)$ |
| g) $f(x) = \log_a(\cos^2(x))$ | h) $f(x) = \log_a(\sin(1 - 3x^2))$ |

**Aufgabe A2**

Berechne die Stellen x_0 des Graphen an der die Funktionen f die Steigung m haben.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \ln(x + \ln(x)); m = 2$ | b) $f(x) = \sin(0,5\ln(x^2) + 1); m = \frac{1}{2};$ |
| c) $f(x) = \ln(\sin(\ln(x))); m = 1$ | d) $f(x) = \ln(\ln(x^2)); m = 2$ |
| e) $f(x) = \sin(\cos(\ln(x)); m = 0; 0 \leq x \leq \pi$ | |
| f) $f(x) = 3\left(\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2; m = 1$ | g) $f(x) = \frac{2}{\ln(x^2+1)}; m = -1$ |
| h) $f(x) = \ln((2,5x^3 + 0,75)^3); m = -2,5$ | |

Aufgabe A3

An welchen Stellen verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel?

- a) $f(x) = \ln(5x + 1); g(x) = 5x;$
- b) $f(x) = e^{3x^2 - 12}; g(x) = \ln(3x^2 - 12)$
- c) $f(x) = \ln^2\left(\frac{1}{x}\right); g(x) = \ln(2x)$

Aufgabenblatt Ableitungen

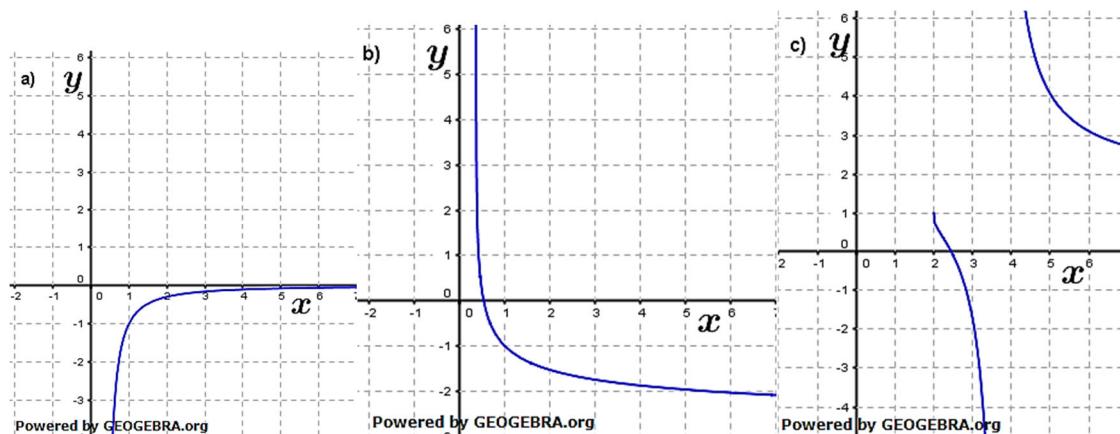
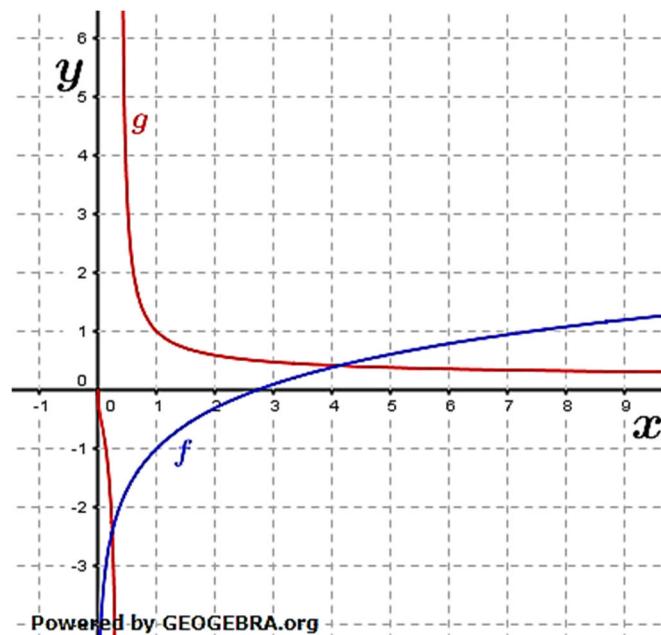
zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Aufgabe A4

Die Grafik zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = \ln(x) - 1$, und g mit $g(x) = \frac{1}{\ln(x)} + 1$.

Gib an welcher der nachfolgend abgebildeten Graphen der Graph der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$ ist, welcher die Ableitungsfunktion ist und welcher Graph zu keinem von beiden passt.



Aufgabenblatt Ableitungen

zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Differenzialrechnung Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A1

a) $f(x) = \sin(\ln(x))$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

c) $f(x) = 3\ln(\sin(2x))$

$$f'(x) = \frac{6\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - \ln(4x))^{-3}$

$$f'(x) = \frac{3}{2x(\ln(4x)-2)^4}$$

g) $f(x) = \log_a(\cos^2(x))$

$$f'(x) = -\frac{2\sin(x)}{\ln(a)\cdot\cos(x)}$$

b) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$

$$f'(x) = -\frac{2\sin(2\ln(x))}{x}$$

d) $f(x) = \frac{1}{3}\ln(3x^4 - x^2)$

$$f'(x) = \frac{12x^2-2}{9x^3-3x}$$

f) $f(x) = \cos(\ln(5x) + 2)$

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln(5x)+2)}{x}$$

h) $f(x) = \log_a(\sin(1 - 3x^2))$

$$f'(x) = \frac{6x\cos(3x^2-1)}{\ln(a)\cdot\sin(3x^2-1)}$$

Lösung A2

a) $f(x) = \ln(x + \ln(x))$

$$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln(x)}$$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln(x)} = 2 \Rightarrow 2 \cdot (x + \ln(x)) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x_0 = 1$$

Probe $x_0 = 1$:

$$2 \cdot (1 + \ln(1)) = 1 + \frac{1}{1}$$

$$2 + 2 \cdot 0 = 2$$

f hat an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung $f'(1) = 2$

b) $f(x) = \sin(0,5\ln(x^2) + 1) = \sin(\ln(x) + 1)$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x}$$

$$\frac{\cos(\ln(x)+1)}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1 \approx 0,08; x_2 \approx 1,03$$

f hat an der Stelle $x_1 \approx 0,08$ sowie $x_2 \approx 1,03$ die Steigung $m = \frac{1}{2}$.

c) $f(x) = \ln(\sin(\ln(x)))$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x \cdot \sin(\ln(x))}$$

$$\frac{\cos(\ln(x))}{x \cdot \sin(\ln(x))} = 1$$

$$x_1 \approx 0,174; x_2 \approx 1,701$$

f hat an der Stelle $x_1 \approx 0,17$ sowie $x_{21} \approx 1,7$ die Steigung $m = 1$.

d) $f(x) = \ln(\ln(x^2))$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$$

$$\frac{1}{x \cdot \ln(x)} = 2 \Rightarrow x_0 \approx 1,42$$

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1,42$ die Steigung $m = 2$.

Aufgabenblatt Ableitungen
Differenzialrechnung
zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)
Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

e) $f(x) = \sin(\cos(\ln(x)))$

$$f'(x) = \frac{-\sin(\ln(x)) \cdot \cos(\cos(\ln(x)))}{x}$$

$$-\sin(\ln(x)) \cdot \cos(\cos(\ln(x))) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$-\sin(\ln(x)) = 0 \Rightarrow \ln(x_1) = 0; \ln(x_2) = \pi \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = e^\pi$$

$$\cos(\cos(\ln(x))) = 0 \Rightarrow \cos(\ln(x)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{keine Lösung, da } -1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ und } \frac{\pi}{2} > 1.$$

f hat an den Stellen $x_1 = 1$ sowie $x_2 = e^\pi$ die Steigung $m = 0$.

f) $f(x) = 3 \left(\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 = 12 \ln^2(x)$

$$f'(x) = \frac{24 \ln(x)}{x}$$

$$\frac{24 \ln(x)}{x} = 1 \Rightarrow 24 \ln(x) = x \Rightarrow x_0 \approx 1,044$$

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1,044$ die Steigung $m = 1$.

g) $f(x) = \frac{2}{\ln(x^2+1)}$

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1) \cdot \ln^2(x^2+1)}$$

$$-\frac{4x}{(x^2+1) \cdot \ln^2(x^2+1)} = -1 \Rightarrow 4x = (x^2 + 1) \cdot \ln^2(x^2 + 1); x \neq 0$$

GTR

$$x_0 \approx 1,67$$

Hinweis:

$x = 0$ muss hier ausgeschlossen werden, da dann im Nenner über $\ln^2(0^2 + 1) = \ln^2(1) = 0$ eine Definitionslücke entsteht.

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1,67$ die Steigung $m = -1$.

h) $f(x) = \ln((2,5x^3 + 0,75)^3) = 3 \ln(2,5x^3 + 0,75)$

$$f'(x) = \frac{45x^2}{2(2,5x^3 + 0,75)}$$

$$\frac{45x^2}{2(2,5x^3 + 0,75)} = -2,5 \Rightarrow x_0 \approx -3,62$$

f hat an der Stelle $x_0 = -3,62$ die Steigung $m = -2,5$.

Lösung A3

a) $f(x) = \ln(5x + 1)$

$$f'(x) = \frac{5}{5x+1}$$

$$f'(x) \cap g'(x)$$

$$\frac{5}{5x+1} = 5$$

$$5x + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0$$

An der Stelle $x_0 = 0$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Wegen $f(0) = 0 = g(0)$ ist der Graph der Funktion g Tangente an den Graphen von f .

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Umkehrregel (Ableitung der Logarithmusfunktion)

Differenzialrechnung Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

b) $f(x) = e^{3x^2 - 12}$
 $f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2 - 12}$

$$g(x) = \ln(3x^2 - 12)$$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) \cap g'(x)$$

$$6x \cdot e^{3x^2 - 12} = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$x \cdot \left(6e^{3x^2 - 12} - \frac{2}{x^2 - 4} \right) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0$$

$$6e^{3x^2 - 12} - \frac{2}{x^2 - 4} \Rightarrow \text{keine weitere Lösung}$$

An der Stelle $x_1 = 0$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) = \ln^2(x)$

$$g(x) = \ln(2x)$$

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) \cap g'(x)$$

$$\frac{2\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}$$

$$2\ln(x) = 1$$

$$\ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

An den Stellen $x_0 = \sqrt{e}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

$$h(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{1}{\ln(x)+1}\right) - 1$$

Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$, denn:

Untersuchung der Nullstellen:

$$\ln\left(\frac{1}{\ln(x)+1}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\ln(x)+1}\right) = 1$$

$$\frac{1}{\ln(x)+1} = e \quad | \quad \text{Entlogarithmieren}$$

$$e \cdot \ln(x) + e = 1$$

$$\ln(x) = \frac{1-e}{e} \quad | \quad \text{Entlogarithmieren}$$

$$x = e^{\frac{1-e}{e}} \approx 0,5315$$

Nur Abbildung b) hat die Nullstelle $x_0 \approx 0,5$.

Abbildung a) zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion h' , denn:

h ist im dargestellten Bereich streng monoton fallend. Damit muss h' im dargestellten Bereich unterhalb der x -Achse verlaufen.

Abbildung c) zeigt das Schaubild der Funktion k mit $k(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\ln(\ln(x-1))} + 1$.

$\mathbb{D}_k \in \mathbb{R}; x > 2$, da für $x < 1 \ln(x-1)$ nicht definiert ist und für $1 < x < 2 \ln(x-1) < 0$ und damit $\ln(\ln(x-1))$ wiederum nicht definiert ist. Abbildung c) hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_k \in \mathbb{R}; x > 2$.