Lösung A1

a) $f(x) = sin(ln(x))$

$f'(x) = \frac{cos(ln(x))}{x}$

b) $f(x) = cos(ln(x^2))$

$f'(x) = -\frac{2sin(2ln(x))}{x}$

c) $f(x) = 3ln(sin(2x))$

$f'(x) = \frac{6cos(2x)}{sin(2x)}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}ln(3x^4 - x^2)$

$f'(x) = \frac{12x^2-2}{9x^3-3x}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}(2 - ln(4x))^{-3}$

$f'(x) = \frac{3}{2x(ln(4x)-2)^4}$

f) $f(x) = cos(ln(5x) + 2)$

$f'(x) = -\frac{sin(ln(5x)+2)}{x}$

g) $f(x) = log_a(cos^2(x))$

$f'(x) = -\frac{2sin(x)}{ln(a)\cdot cos(x)}$

h) $f(x) = log_a(\sin(1 - 3x^2))$

$f'(x) = \frac{6x\cdot cos(3x^2-1)}{ln(a)\cdot sin(3x^2-1)}$

Lösung A2

a) $f(x) = ln(x + ln(x))$

$f'(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln(x)}$

$\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln(x)} = 2 \implies 2 \cdot (x + \ln(x)) = 1 + \frac{1}{x}$

$x_0 = 1$

Probe $x_0 = 1$:

$2 \cdot (1 + \ln(1) \stackrel{?}{=} 1 + \frac{1}{1}$

$2 + 2 \cdot 0) = 2$

f hat an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung $f'(1) = 2$

b) $f(x) = sin(0{,}5ln(x^2) + 1) = sin(ln(x) + 1)$

$f'(x) = \frac{cos(ln(x)+1)}{x}$

$\frac{cos(ln(x)+1)}{x} = \frac{1}{2} \implies \frac{\cos(\ln(x)+1)}{x} - \frac{1}{2} = 0$

$x_1 \stackrel{GTR}{\approx} 0{,}08; \quad x_2 \stackrel{GTR}{\approx} 1{,}03$

f hat an der Stelle $x_1 \approx 0{,}08$ sowie $x_2 \approx 1{,}03$ die Steigung $m = \frac{1}{2}$.

c) $f(x) = ln(sin(ln(x)))$

$f'(x) = \frac{cos(ln(x))}{x\cdot sin(\ln(x))}$

$\frac{cos(ln(x))}{x\cdot sin(\ln(x))} = 1$

$x_1 \stackrel{GTR}{\approx} 0{,}174; \quad x_2 \stackrel{GTR}{\approx} 1{,}701$

f hat an der Stelle $x_1 \approx 0{,}17$ sowie $x_{21} \approx 1{,}7$ die Steigung $m = 1$.

d) $f(x) = ln(ln(x^2))$

$f'(x) = \frac{1}{x\cdot ln(x)}$

$\frac{1}{x\cdot ln(x)} = 2 \implies x_0 \stackrel{GTR}{\approx} 1{,}42$

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1{,}42$ die Steigung $m = 2$.

e) $f(x) = sin(cos(ln(x))$

$f'(x) = \frac{-sin(ln(x))\cdot cos(\cos(\ln(x)))}{x}$

$-sin(ln(x)) \cdot cos(cos(ln(x))) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$-sin(\ln(x)) = 0 \Longrightarrow ln(x_1) = 0;\ ln(x_2) = \pi \Longrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = e^{\pi}$

$cos(cos(ln(x))) = 0 \Longrightarrow cos(ln(x)) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ keine Lösung, da $-1 \leq cos(x) \leq 1$ und $\frac{\pi}{2} > 1$.

f hat an den Stellen $x_1 = 1$ sowie $x_2 = e^{\pi}$ die Steigung $m = 0$.

f) $f(x) = 3\left(ln(x) - ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = 12\,ln^2(x)$

$f'(x) = \frac{24ln(x)}{x}$

$\frac{24\ln(x)}{x} = 1 \Longrightarrow 24\,ln(x) = x \Longrightarrow x_0 \overset{GTR}{\approx} 1{,}044$

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1{,}044$ die Steigung $m = 1$.

g) $f(x) = \frac{2}{ln(x^2+1)}$

$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)\cdot \ln^2(x^2+1)}$

$-\frac{4x}{(x^2+1)\cdot \ln^2(x^2+1)} = -1 \Longrightarrow 4x = (x^2+1)\cdot \ln^2(x^2+1);\ x \neq 0$

$x_0 \overset{GTR}{\approx} 1{,}67$

Hinweis:

$x = 0$ muss hier ausgeschlossen werden, da dann im Nenner über $ln^2(0^2+1) = ln^2(1) = 0$ eine Definitionslücke entsteht.

f hat an der Stelle $x_0 \approx 1{,}67$ die Steigung $m = -1$.

h) $f(x) = ln((2{,}5x^3 + 0{,}75)^3) = 3ln(2{,}5x^3 + 0{,}75)$

$f'(x) = \frac{45x^2}{2(2{,}5x^3+0{,}75)}$

$\frac{45x^2}{2(2{,}5x^3+0{,}75)} = -2{,}5 \Longrightarrow x_0 \overset{GTR}{\approx} -3{,}62$

f hat an der Stelle $x_0 = -3{,}62$ die Steigung $m = -2{,}5$.

Lösung A3

a) $f(x) = ln(5x+1)$ $\qquad g(x) = 5x$

$f'(x) = \frac{5}{5x+1}$ $\qquad g'(x) = 5$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{5}{5x+1} = 5$

$5x + 1 = 1 \Longrightarrow x_0 = 0$

An der Stelle $x_0 = 0$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel. Wegen $f(0) = 0 = g(0)$ ist der Graph der Funktion g Tangente an den Graphen von f.

b) $f(x) = e^{3x^2-12}$ $\qquad$ $g(x) = ln(3x^2 - 12)$

$f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2-12}$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$6x \cdot e^{3x^2-12} = \frac{2x}{x^2-4}$

$x \cdot \left(6e^{3x^2-12} - \frac{2}{x^2-4}\right) = 0$ $\qquad$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$6e^{3x^2-12} - \frac{2}{x^2-4} \Longrightarrow$ keine weitere Lösung

An der Stelle $x_1 = 0$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

c) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right) = ln^2(x)$ $\qquad$ $g(x) = ln(2x)$

$f'(x) = \frac{2ln(x)}{x}$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) \cap g'(x)$

$\frac{2ln(x)}{x} = \frac{1}{x}$

$2ln(x) = 1$

$ln(x) = \frac{1}{2}$

$x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

An den Stellen $x_0 = \sqrt{e}$ verlaufen die Graphen der Funktionen f und g parallel.

Lösung A4

$h(x) = f(g(x)) = ln\left(\frac{1}{ln(x)+1}\right) - 1$

Abbildung b) zeigt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(g(x))$, denn:
Untersuchung der Nullstellen:

$ln\left(\frac{1}{ln(x)+1}\right) - 1 = 0 \Longrightarrow \; ln\left(\frac{1}{ln(x)+1}\right) = 1$

$\frac{1}{ln(x)+1} = e$ $\qquad$ | Entlogarithmieren

$e \cdot \ln(x) + e = 1$

$\ln(x) = \frac{1-e}{e}$ $\qquad$ | Entlogarithmieren

$x = e^{\frac{1-e}{e}} \approx 0{,}5315$

Nur Abbildung b) hat die Nullstelle $x_0 \approx 0{,}5$.

Abbildung a) zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion h', denn:
h ist im dargestellten Bereich streng monoton fallend. Damit muss h' im dargestellten Bereich unterhalb der x-Achse verlaufen.

Abbildung c) zeigt das Schaubild der Funktion k mit $k(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{ln(ln(x-1))} + 1$.
$\mathbb{D}_k \in \mathbb{R};\; x > 2$, da für $x < 1$ $ln(x-1)$ nicht definiert ist und für $1 < x < 2$ $ln(x-1) < 0$ und damit $ln(ln(x-1))$ wiederum nicht definiert ist. Abbildung c) hat den Definitionsbereich $\mathbb{D}_k \in \mathbb{R};\; x > 2$.