Aufgabe A1

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = e^x + x^2$
b) $f(x) = 3e^x - 0{,}5x^2 + x$
d) $f(x) = e^{-x} + e^x$
d) $f(x) = e^{-2x} - 4e^{-x}$
e) $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$
f) $f(x) = (3x - 4) \cdot e^x$
g) $f(x) = 3x^2 \cdot e^{-4x}$
h) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 \cdot e^{2x}$
i) $f(x) = (2x + 5) \cdot e^{-x}$
j) $f(x) = (x + k) \cdot e^{-kx}$
k) $f(x) = (4x + e^{-x})^2$
l) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$
m) $f(x) = (x + 3) \cdot e^{2x+1}$
n) $f(x) = (8 - 4x) \cdot e^{-0{,}5x}$
o) $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{1-x}$
p) $f_a(x) = \frac{x+2a}{e^x}$
q) $f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}48x}(1 - e^{-0{,}12x})$
r) $f_a(x) = (a - e^x)^2$
s) $N_k(t) = N_0 \cdot e^{-kt}(1 - e^{-kt})$
t) $f_a(x) = (ax + 1) \cdot e^{1-ax}$
u) $f_a(t) = \frac{e^t - a}{e^t + a}$
v) $f_t(x) = \frac{e^{tx} - e^{-tx}}{e^{tx} + e^{-tx}}$
w) $f(x) = e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Aufgabe A2

Bestimme die ersten drei Ableitungen von $f(x) = 2xe^{-x}$. Stelle eine Vermutung auf, wie die 10. Ableitung $f^{(10)\prime}(x)$ lautet.

Aufgabe A3

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = 2x \cdot cos(\frac{1}{2}x^2 + 4)$
b) $f(x) = x^3 \cdot sin(x)$
c) $f(x) = (sinx + cosx)^2$
d) $f(x) = (x^2 - sinx)^3$
e) $f(x) = (ax - sin(ax))^2$
f) $f(x) = x \cdot sin(x) \cdot cos(x)$
g) $f(x) = x^2 \cdot sin(4x + 3)$

Lösung A1

a) $f'(x) = e^x + 2x$ $\quad f''(x) = e^x + 2$

b) $f'(x) = 3e^x - x + 1$ $\quad f''(x) = 3e^x - 1$

d) $f'(x) = -e^{-x} + e^x$ $\quad f''(x) = e^{-x} + e^x$

d) $f'(x) = -2e^{-2x} + 4e^{-x} = 2e^{-x}(2 - e^{-x})$ $\quad f''(x) = 4e^{-2x} - 4e^{-x} = 4e^{-x}(e^{-x} - 1)$

e) $f'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x - 1) \cdot e^x$
$= e^x(2x - 2 + x^2 - 2x - 1) = e^x(x^2 - 3)$
$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$

f) $f'(x) = e^x \cdot (3x - 1)$ $\quad f''(x) = e^x(3x + 2)$

g) $f'(x) = 6x \cdot e^{-4x} - 12x^2 \cdot e^{-4x} = 6e^{-4x}(x - 2x^2)$
$f''(x) = e^{-4x}(48x^2 - 48x + 6)$

h) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot e^{2x} = e^{2x}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)$
$f''(x) = e^{2x}(2x^3 + 6x^2 + 3x)$

i) $f'(x) = -e^{-x}(2x + 3)$ $\quad f''(x) = e^{-x}(2x + 1)$

j) $f'(x) = e^{-kx}\big(1 - k(x + k)\big) = -e^{-kx}(kx + k^2 - 1)$
$f''(x) = ke^{-kx}(kx + k^2 - 2)$

k) $f'(x) = 2(4x + e^{-x})(4 - e^{-x})$ $\quad f''(x) = e^{-2x}(32e^{2x} + e^x(8x - 16) + 4)$

l) $f'(x) = 2e^{-2x} \cdot (e^{4x} - 1)$ $\quad f''(x) = 4e^{-2x}(e^{4x} + 1)$

m) $f'(x) = e^{2x+1} \cdot (2x + 7)$ $\quad f''(x) = 4e^{2x+1}(x + 4)$

n) $f'(x) = e^{-0,5x} \cdot (2x - 8)$ $\quad f''(x) = -e^{-0,5x} \cdot (x - 6)$

o) $f'(x) = -e^{1-x} \cdot (x^2 - 2)$ $\quad f''(x) = e^{1-x} \cdot (x^2 - 2x - 2)$

p) $f_a{}'(x) = -\frac{x+2a-1}{e^x}$ $\quad f_a{}''(x) = \frac{x+2a-2}{e^x}$

q) $f'(x) = -e^{-0,6x}(48e^{0,12x} - 60)$ $\quad f''(x) = e^{-1,08x}(23{,}04e^{0,6x} - 36e^{0,48x})$

r) $f_a{}'(x) = 2e^x(e^x - a)$ $\quad f_a{}''(x) = 2e^x(2e^x - a)$

s) $N_k{}'(t) = -kN_0 \cdot e^{-2kt}(e^{kt} - 2)$ $\quad N_k{}''(t) = k^2N_0e^{-2kt}(e^{kt} - 4)$

t) $f_a{}'(x) = -a^2x \cdot e^{1-ax}$ $\quad f_a{}''(x) = a^2e^{1-ax}(ax - 1)$

u) $f_a{}'(t) = \frac{2ae^x}{(e^x+a)^2}$ $\quad f_a{}''(t) = -\frac{2ae^x(e^x-a)}{(e^x+a)^3}$

v) $f_t{}'(x) = \frac{4e^{2tx}}{(e^{2tx}+1)^2}$ $\quad f_t{}''(x) = \frac{8t^2e^{2tx}(e^{2tx}-1)}{(e^{2tx}+1)^3}$

w) $f'(x) = \frac{(4x-3)e^{2x}}{2x^2\sqrt{x}}$ $\quad f''(x) = \frac{(16x^2-24x+15)e^{2x}}{4x^3\sqrt{x}}$

Lösung A2

$f(x) = 2x \cdot e^{-x}$ $\quad f'(x) = -e^{-x}(2x - 2)$

$f''(x) = e^{-x}(2x - 4)$ $\quad f'''(x) = -e^{-x}(2x - 6)$

Die n-te Ableitung errechnet sich über die Formel:

$f^{(n)\prime}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x} \cdot (2x - 2n); \quad n \in \mathbb{N}^*$

Somit ist $f^{(10)\prime}(x) = e^{-x}(2x - 20)$.

<u>Lösung A3</u>

a) $f'(x) = -2\left(x^2 sin\left(\frac{1}{2}x^2+4\right) - cos\left(\frac{1}{2}x^2+4\right)\right)$

$f''(x) = -2\left(3xsin\left(\frac{1}{2}x^2+4\right) + x^3 cos\left(\frac{1}{2}x^2+4\right)\right)$

b) $f'(x) = x^{2\cdot}\big(3sin(x) + xcos(x)\big)$

$f''(x) = -x\big((x^2-6)sin(x) - 6xcos(x)\big)$

c) $f'(x) = 2(cos^2(x) - sin^2(x))$

$f''(x) = -8\,cos(x)\,sin(x)$

d) $f'(x) = 3(x^2 - sin(x))^2 \cdot (2x - cos(x))$

$f''(x) = 3(x^2 - sin(x))^2(sin(x)+2) + 6(2x - cos(x))^2(x^2 - sin(x))$

e) $f'(x) = 2a(cos(ax) - 1)\cdot(sin(ax) - ax)$

$f''(x) = -2a^2(sin^2(ax) - axsin(ax) - cos^2(ax) + 2cos(ax) - 1)$

f) $f'(x) = -xsin^2(x) + \sin(x)\,cos(x) + xcos^2(x)$

$f''(x) = -2\big(sin^2(x) + 2\text{x}\sin(x)\,cos(x) - cos^2(x)\big)$

g) $f'(x) = 2x\big(sin(4x+3) + 2x\cdot cos(4x+3)\big)$

$f''(x) = (2-16x^2)\,sin(4x+3) + 16xcos(4x+3)$