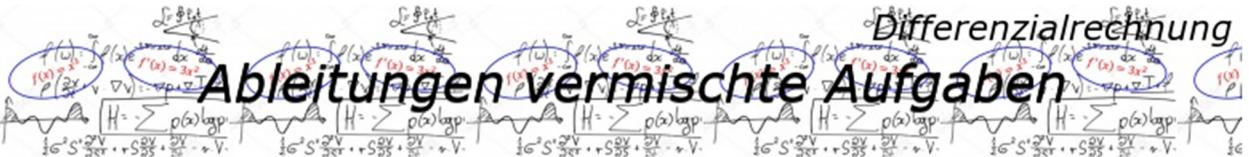


Ableitungen vermischt Aufgaben



Vermischte Aufgaben zu den Ableitungen

Inhaltsverzeichnis

Differenzialrechnung Ableitungen vermischt Aufgaben

Kapitel mit 338 Aufgaben

	Seite
Übersicht der Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 (28 Aufgaben)	06
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	07
Aufgabenblatt 2 (41 Aufgaben)	08
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	09
Aufgabenblatt 3 (36 Aufgaben)	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	12
Aufgabenblatt 4 (36 Aufgaben)	14
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	15
Aufgabenblatt 5 (36 Aufgaben)	16
Lösungen zum Aufgabenblatt 5	17
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 (36 Aufgaben)	19
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	20
Aufgabenblatt 2 (31 Aufgaben)	22
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	23
Aufgabenblatt 3 (25 Aufgaben)	25
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	26
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 (23 Aufgaben)	27
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	28
Aufgabenblatt 2 (18 Aufgaben)	29
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	30
Aufgabenblatt 3 (16 Aufgaben)	31
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	32
Level 4 Universität	
Aufgabenblatt 1 (12 Aufgaben)	34
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	35



Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x_0|f(x_0))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \rightarrow 0$.

Übungsaufgaben

In diesem Kapitel findest du eine Menge von Aufgaben zu allen Ableitungsregeln.

Merke:

Mathematik lernt man nur durch Üben, Üben, Üben und nochmals Üben. Je mehr du übst, umso umfangreicher ist dein Wissen und deine Fähigkeit, in Klausuren und anstehenden Abschlussprüfungen eine Note besser als 3+ zu erzielen.

Der generelle Merksatz des Erfolgs:

Merksatz des mathematischen Erfolgs

Deine Klausur- und Abschlussprüfungs-Noten sind *direkt proportional* zur Anzahl der richtig berechneten Übungsaufgaben.

Die Ableitungsregeln

Zur Übersicht hier noch einmal eine Zusammenstellung aller Ableitungsregeln.

Die Konstantenregel

Die Konstantenregel besagt, dass Konstanten bei der Ableitung verloren gehen.

Beispiel:

$$f(x) = 5 \quad f'(x) = 0$$

Die Faktorregel

Die Faktorregel besagt, dass Faktoren bei der Ableitung unverändert beibehalten werden.

Beispiel:

$$f(x) = a \cdot x \quad f'(x) = a$$

Die Potenzregel

Bei der Potenzregel (Ableitungsregel für Potenzfunktionen) wird der Exponent von x als Multiplikand vor die Ableitung geschrieben und der Exponent um 1 vermindert.

Beispiel:

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

WIKI

ZU den Ableitungen

Die Summen- bzw. Differenzregel

Die Summen- bzw. Differenzregel besagt, dass bei additiv bzw. subtraktiv zusammengesetzten Funktionen jedes Glied der zusammengesetzten Funktion einzeln abgeleitet wird.

Beispiel:

$$f(x) = g(x) + h(x) - i(x) \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) - i'(x)$$

Die Produktregel

Sind einzelne Funktionsglieder multiplikativ miteinander verknüpft, so muss für die Ableitung die Produktregel angewandt werden.

Beispiel:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$$

Die Quotientenregel

Sind einzelne Funktionsglieder mittels Division miteinander verknüpft, so muss für die Ableitung die Quotientenregel angewandt werden.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$$

Die Kettenregel

Sind zwei Funktionen miteinander verkettet, so muss für die Ableitung die Kettenregel angewandt werden.

Beispiel:

$$f(x) = g(h(x)) \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen lauten:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x) & f'(x) = \cos(x) \\ f(x) = \cos(x) & f'(x) = -\sin(x) \\ f(x) = \tan(x) & f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{array}$$

Ableitung der Exponentialfunktion

Die Ableitung der Exponentialfunktion lautet:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ f(x) = a^x & f'(x) = a^x \cdot \ln(|a|) \end{array}$$

Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Ableitung der Logarithmusfunktion lautet:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(x) & f'(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = \log_a(x) & f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \end{array}$$

Die Umkehrregel

Ist $g(y) = x$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$, so kann für die Ableitung die Umkehrregel angewandt werden.

Beispiel:

Ist $g(y) = x$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ so gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

WIKI

ZU den Ableitungen

Ableitungstabelle elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$C \in \mathbb{R}, \text{constant}$	0	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$	$2\tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$a^x \cdot (\ln(a))^2$
e^x	e^x	e^x
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$-\frac{1}{x^2 \cdot \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 28 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfach so weit wie möglich.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$ | b) $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$ | d) $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$ |
| e) $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$ | f) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1)$ | h) $f(x) = x(x^2 - \frac{3}{2}x - 4)$ |
| i) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ | j) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ |
| k) $f(x) = 6x + \frac{5}{x}$ | l) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$ |
| m) $f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$ | n) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 + tx^2 + (t+1)x; t \neq 0$ |
| o) $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$ | p) $f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$ |
| q) $A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3(u+1)$ | r) $A(u) = \frac{1}{2}u(u^2 - 1,5u - 4)$ |

Aufgabe A2

Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$.

- | | | |
|---|---------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{4}e^x - 5x^3 + 6e^3$ | b) $f(x) = e^x(e^{-x} - 3)$ | c) $f(x) = -\frac{3}{4}e^x - e^x$ |
| d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5e^x$ | e) $f(x) = -7e^x + 3e$ | f) $f(x) = 6e^x + 7$ |
| g) $f(t) = \frac{1}{2}t^4 - 5 + 5\cos(t)$ | h) $f(x) = 4\cos(x) - 8\sin(x)$ | i) $f(x) = 2x - 3\sin(x)$ |

Aufgabe A3

Gegeben ist das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 5t^2 + 3t + 8$.

Bestimme das zugehörige Geschwindigkeits-Zeit- sowie das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz.

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Lösung A1

- | | |
|--|---|
| a) $f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$ | b) $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$ |
| c) $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$ | d) $s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}$ |
| e) $f'(x) = 3x^2 - 22x + 14$ | f) $f'(x) = 2x \cdot (x^2 - 2)$ |
| g) $f'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 + 1)$ | h) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 4$ |
| i) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ | j) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ |
| k) $f'(x) = 6 - \frac{5}{x^2}$ | l) $f'(x) = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x^2}$ |
| m) $f_t'(x) = 2tx^3 - 6tx^2$ | n) $f_t'(x) = \frac{3}{t}x^2 + 2tx + t + 1; t \neq 0$ |
| o) $f'(t) = 15t^2 - 2$ | p) $f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1$ |
| q) $A'(u) = u + 3$ | r) $A'(u) = \frac{3}{2}u^2 - 1,5u + 2$ |

Lösung A2

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - 15x^2$ | $f''(x) = \frac{1}{4}e^x - 30x$ |
| b) $f'(x) = -3e^x$ | $f''(x) = -3e^x$ |
| c) $f'(x) = -\frac{7}{4}e^x$ | $f''(x) = -\frac{7}{4}e^x$ |
| d) $f'(x) = x + 5e^x + 4$ | $f''(x) = 5e^x + 1$ |
| e) $f'(x) = -7e^x$ | $f''(x) = -7e^x$ |
| f) $f'(x) = 6e^x$ | $f''(x) = 6e^x$ |
| g) $f'(t) = 2t^3 - 5\sin(t)$ | $f''(t) = 6t^2 - 5\cos(t)$ |
| h) $f'(x) = -4\sin(x) - 8\cos(x)$ | $f''(x) = -4\cos(x) + 8\sin(x)$ |
| i) $f'(x) = 2 - 3\cos(x)$ | $f''(x) = 3\sin(x)$ |

Lösung A3

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit:

$$s'(t) = v(t) = 10t + 3$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$v'(t) = a(t) = 10$$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Dokument mit 41 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = (2x + 3)^2$ b) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 4\right)^2$ c) $f(x) = (3 - 9x)^2$
d) $f(x) = \left(-2 - \frac{1}{3}x\right)^2$ e) $f(x) = 5(2x^2 + 3)^2$ f) $f(x) = 2(4 - 3x^2)^3$
g) $f(x) = \frac{1}{2}(3x + 2)^6$ h) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - 4x^2\right)^7$ i) $f(x) = (a + bx)^2$

Aufgabe A2

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = (1 + 2x)^2$ b) $f(x) = (3 - x)^3$ c) $f(x) = (x + x^2)^2$
d) $f(x) = (1 + x^3)^4$ e) $g(x) = (x^3 - 2x)^4$ f) $g(x) = (5x + x^2)^2$
g) $f(t) = (t^3 - 4t^2)^2$ h) $g(t) = (a^3 - t^3)^4$ i) $f(x) = (2 - 3x + x^2)^3$
j) $h(x) = \left(1 - x + \frac{1}{2}x^3\right)^2$ k) $f(a) = \left(-\frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{2}\right)^3$ l) $f(x) = (x\sqrt{2} - x^2)^3$

Aufgabe A3

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = (8x - 7)^{-1}$ b) $f(x) = (12 - 3x)^{-1}$ c) $f(x) = 2(5 - x)^{-1}$
d) $f(x) = \frac{1}{4}(7 - 2x)^{-1}$ e) $f(x) = (15x - 3)^{-2}$ f) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$
g) $f(x) = \frac{3}{(5-x)^2}$ h) $f(x) = \frac{7}{(8-3x)^3}$ i) $f(x) = \frac{1}{2(x-7)^3}$
j) $f(x) = \frac{5}{(x^2-1)^2}$ k) $f(x) = \frac{2}{(3-x^2)^3}$ l) $f(x) = \frac{8}{(5-4x^2)^4}$

Aufgabe A4

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ b) $f(x) = 6e^x - 2\sin(x)$
c) $f(x) = 7e^{2x-3} + 4$ d) $f(x) = 5\cos(4x - 3) + \sin(1,5)$
e) $f(x) = \frac{1}{2}e^4 - 3x - 5\cos(\pi(x - 3))$ f) $f(x) = (x - 3) \cdot e^{2x}$
g) $f(x) = 8x\sin(3x)$ h) $f(x) = \cos(x) \cdot e^{4x}$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Lösung A1

- | | |
|---|--|
| a) $f'(x) = 2 \cdot (2x + 3) \cdot 2$ | $= 4(2x + 3)$ |
| b) $f'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot -\frac{1}{2}$ | $= \frac{1}{2}x + 4$ |
| c) $f'(x) = 2 \cdot (3 - 9x) \cdot (-9)$ | $= 54(3x - 1)$ |
| d) $f'(x) = 2 \cdot \left(-2 - \frac{1}{3}x\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ | $= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$ |
| e) $f'(x) = 2 \cdot 5 \cdot (2x^2 + 3) \cdot 4x$ | $= 40x(2x^2 + 3)$ |
| f) $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (4 - 3x^2)^2 \cdot (-6x)$ | $= -36x(3x^2 - 4)^2$ |
| g) $f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2}(3x + 2)^5 \cdot 3$ | $= 9(3x + 2)^5$ |
| h) $f'(x) = 7 \cdot \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - 4x^2\right)^6 \cdot (-8x)$ | $= -7x\left(4x^2 - \frac{1}{2}\right)^6$ |
| i) $f'(x) = 2 \cdot (a + bx) \cdot b$ | $= 2ab + 2b^2x$ |

Lösung A2

- | | |
|---|---|
| a) $f'(x) = 2 \cdot (1 + 2x) \cdot 2$ | $= 4 + 8x$ |
| b) $f'(x) = 3 \cdot (3 - x)^2 \cdot (-1)$ | $= -3(x - 3)^2$ |
| c) $f'(x) = 2 \cdot (x + x^2) \cdot (1 + 2x)$ | $= 2(2x^3 + 3x^2 + x)$ |
| d) $f'(x) = 4 \cdot (1 + x^3)^3 \cdot 3x^2$ | $= 12x^2(1 + x^3)^3$ |
| e) $g'(x) = 4 \cdot (x^3 - 2x)^3 \cdot (3x^2 - 2)$ | $= (12x^2 - 8)(x^3 - 2x)^3$ |
| f) $g'(x) = 2 \cdot (5x + x^2) \cdot (2x + 5)$ | $= (4x + 10)(5x + x^2)$ |
| g) $f'(t) = 2 \cdot (t^3 - 4t^2) \cdot 3t^2 - 8t$ | $= (6t^2 - 16t)(t^3 - 4t^2)$ |
| h) $g'(t) = 4 \cdot (a^3 - t^3)^3 \cdot (-3t^2)$ | $= -12t^2(a^3 - t^3)^3$ |
| i) $f'(x) = 3 \cdot (2 - 3x + x^2)^2 \cdot (2x - 3)$ | $= (6x - 9)(x^2 - 3x + 2)^2$ |
| j) $h'(x) = 2 \cdot \left(1 - x + \frac{1}{2}x^3\right) \cdot (\frac{3}{2}x^2 - 1)$ | $= (3x^2 - 2)\left(1 - x + \frac{1}{2}x^3\right)$ |
| k) $f'(a) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{2}\right)^2 \cdot (-a + \sqrt{2})$ | $= (3\sqrt{2} - 3a)\left(a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a^2\right)^2$ |
| l) $f'(x) = 3 \cdot (x\sqrt{2} - x^2)^2 \cdot (\sqrt{2} - 2x)$ | $= (3\sqrt{2} - 6x)(x\sqrt{2} - x^2)^2$ |

Lösung A3

Hinweis Aufgaben a) bis e)

Ist die Funktionsgleichung mit negativen Hochzahlen gegeben, kann die Ableitung ebenfalls mit negativen Hochzahlen angegeben werden.

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $f'(x) = -(8x - 7)^{-2} \cdot 8$ | $= -8(8x - 7)^{-2}$ |
| b) $f'(x) = -(12 - 3x)^{-2} \cdot (-3)$ | $= 3(12 - 3x)^{-2}$ |
| c) $f'(x) = -2 \cdot (5 - x)^{-2} \cdot (-1)$ | $= 2(5 - x)^{-2}$ |
| d) $f'(x) = -\frac{1}{4}(7 - 2x)^{-2} \cdot (-2)$ | $= \frac{1}{2}(7 - 2x)^{-2}$ |
| e) $f'(x) = -2 \cdot (15x - 3)^{-3} \cdot 15$ | $= -30(15x - 3)^{-3}$ |

Hinweis Aufgaben f) bis l)

Ist die Funktionsgleichung als Bruchgleichung gegeben, muss die Ableitung ebenfalls als Bruchgleichung angegeben werden.

$$f) f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} = (x-2)^{-2} \quad f'(x) = -2 \cdot (x-2)^{-3} = -\frac{2}{(x-2)^3}$$

Alternativ über Quotientenregel:

$$f) f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad u = 1 \quad u' = 0 \\ f'(x) = \frac{0-2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{2}{(x-2)^3} \quad v = (x-2)^2 \quad v' = 2(x-2)$$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

g) $f'(x) = \frac{6}{(5-x)^3}$

j) $f'(x) = \frac{20x}{(x^2-1)^3}$

h) $f'(x) = \frac{63}{(3x-8)^4}$

k) $f'(x) = \frac{12x}{(x^2-3)^4}$

i) $f'(x) = \frac{3}{2(x-7)^4}$

l) $f'(x) = \frac{256x}{(5-4x^2)^5}$

Lösung A4

- a) $f'(x) = 15x^2 - 3x + 2$
- b) $f'(x) = 6e^x - 2\cos(x)$
- c) $f'(x) = 14e^{2x-3}$
- d) $f'(x) = -20\sin(4x - 3)$
- e) $f'(x) = -3 + 5\pi\sin(\pi(x - 3))$
- f) $f'(x) = (x - 1) \cdot e^{2x}$
- g) $f'(x) = 8(\sin(3x) + 3x\cos(3x))$
- h) $f'(x) = (4\cos(x) - \sin(x)) \cdot e^{4x}$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Dokument mit 36 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = \sqrt{3x}$

d) $h(r) = \sqrt{a^2r}$

g) $f(x) = \sqrt{x+x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{5x}$

e) $f(x) = \sqrt{1+2x}$

h) $f(t) = \sqrt{t+t^2+1}$

c) $f(t) = \sqrt{at}$

f) $f(x) = \sqrt{1-x}$

Aufgabe A2

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = \sin(2x)$

d) $s(t) = \cos(1-t)$

g) $s(t) = 3 \sin\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)$

b) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

e) $f(x) = \sin(x^2)$

h) $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{2}t^2)$

c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

f) $g(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)$

Aufgabe A3

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$

d) $g(t) = (t^3 - \sqrt{t})^{-2}$

g) $f(x) = 2 \sin^3(x)$

b) $f(x) = (2\sqrt{x} - x)^3$

e) $f(x) = \sin^2(x)$

h) $f(x) = \frac{1}{2}\cos^4(x)$

c) $f(x) = 2(x^2 - 3\sqrt{x})^2$

f) $g(x) = \cos^3(x)$

Aufgabe A4

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = (2x+1)(3x+4)^2$

c) $f(x) = (1,5x+6)^2(5-0,4x)^2$

e) $f(x) = (1-x)\sqrt{2x}$

g) $f(x) = (1+2x)\sin(2x)$

i) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x)$

k) $f(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

b) $f(x) = (4-4x)^3(1-x)$

d) $f(x) = (x-x^2)^3(1-3x)^2$

f) $f(x) = (1+2x)\sqrt{1+x^2}$

h) $f(x) = (1-x)^2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

j) $f(x) = x \cdot \sin(2x)$

l) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

Lösung A1

Lösungshinweis:

Bei gegebenen Wurzeln muss zuerst die Wurzel in die Potenzschreibweise gebracht werden, um dann die Potenzregel anwenden zu können. Nach der Ableitung muss die Potenzdarstellung der Wurzel wieder in die Wurzeldarstellung zurückgeführt werden.

Detaillierte Lösung für a)

$$\begin{aligned}
 a) \quad f(x) &= \sqrt{3x} = \sqrt{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} & = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x^{-\frac{1}{2}} & = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} \\
 b) \quad f'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot x^{-\frac{1}{2}} & = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \\
 c) \quad f'(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot t^{-\frac{1}{2}} & = \frac{a}{2\sqrt{r}} \\
 d) \quad h'(r) &= \frac{1}{2}a \cdot r^{-\frac{1}{2}} & = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\
 e) \quad f'(x) &= \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 & = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 f) \quad f'(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x & = \frac{2x+1}{2\sqrt{x+x^2}} \\
 g) \quad f'(x) &= \frac{1}{2}(x+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1) & = \frac{2t+1}{2\sqrt{t+t^2}} \\
 h) \quad f'(t) &= \frac{1}{2}(t+t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t+1)
 \end{aligned}$$

Lösung A2

$$\begin{aligned}
 a) \quad f'(x) &= 2\cos(2x) & b) \quad f'(x) &= -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\
 c) \quad f'(x) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) & d) \quad f'(t) &= \sin(1-t) \\
 e) \quad f'(x) &= 2x\cos(x^2) & f) \quad g'(t) &= -\pi t\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \\
 g) \quad s'(t) &= -3t\cos\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right) & h) \quad f'(t) &= \sqrt{2}t\cos(\sqrt{2}t^2)
 \end{aligned}$$

Lösung A3

$$\begin{aligned}
 a) \quad f'(x) &= 2 \cdot (1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} & = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 b) \quad f'(x) &= 3 \cdot (2\sqrt{x}-x)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) & = \left(\frac{3}{\sqrt{x}}-3\right) \cdot (2\sqrt{x}-x)^2 \\
 c) \quad f'(x) &= 2 \cdot 2 \cdot (x^2-3\sqrt{x}) \cdot \left(2x-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right) & = (x^2-3\sqrt{x}) \cdot \left(8x-\frac{12}{2\sqrt{x}}\right) \\
 d) \quad g'(t) &= -2 \cdot (t^3-\sqrt{t})^{-3} \cdot \left(3t^2-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) & = (t^3-\sqrt{t})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t}}-6t^2\right) \\
 e) \quad f'(x) &= 2\sin(x) \cdot \cos(x) & = \sin(2x) \\
 f) \quad g'(x) &= -3\cos^2(x) \cdot \sin(x) = -3(1-\sin^2(x))(\sin(x)) & = 3(\sin^3(x)-\sin(x)) \\
 g) \quad f'(x) &= 3 \cdot 2\sin^2(x) \cdot \cos(x) = 6(1-\cos^2(x))(\cos(x)) & = 6(\cos(x)-\cos^3(x)) \\
 h) \quad f'(t) &= 2 \cdot \sqrt{2}t \cdot \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t^2) & = \sqrt{2}t\cos(\sqrt{2}t^2)
 \end{aligned}$$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 2

Lösung A4

Detaillierte Lösung für a)

a) $f(x) = (2x + 1)(3x + 4)^2$

$$u = 2x + 1 \quad u' = 2$$

$$v = (3x + 4)^2 \quad v' = 6(3x + 4)$$

$$f'(x) = 2(3x + 4)^2 + 6(2x + 1)(3x + 4)$$

$$= 54x^2 + 114x + 56$$

b) $f'(x) = -12(4 - 4x)^2(1 - x) - (4 - 4x)^3$

$$= 256(x - 1)^3$$

c) $f'(x) = 3 \cdot (5 - 0,4x)^2(1,5x + 6) - 0,8 \cdot (5 - 0,4x) \cdot (1,5x + 6)^2$
 $= \frac{9(x+4)(2x-25)(4x-17)}{50}$

d) $f'(x) = 3(x - x^2)^2(1 - 2x)(1 - 3x)^2 - 6(x - x^2)^3 \cdot (1 - 3x)$
 $= 3x^2(x - 1)^2(3x - 1)(8x^2 - 7x + 1)$

e) $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x}} - \sqrt{2x} \quad = -\frac{3x-1}{\sqrt{2x}}$

f) $f'(x) = 1\sqrt{x^2 + 1} + \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}} \quad = \frac{4x^2+x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $f'(x) = 2 \sin(2x) + (4x + 2)\cos(2x)$

h) $f'(x) = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)(1 - x) - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)(1-x)^2}{2}$

i) $f'(x) = 2 \cos^2(2x) - 2 \sin^2(2x) \quad = -2(\sin^2(2x) - \cos^2(2x))$

j) $f'(x) = \sin(2x) + 2x\cos(2x)$

k) $f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{2} \quad = -\frac{x(x\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-4\cos\left(\frac{1}{2}x\right))}{2}$

l) $f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{x} - \frac{\sin(2x)}{x^2}$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

Dokument mit 36 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = (1 + \sqrt{3x})^2$ b) $f(x) = \sqrt{2 + (1 - x)^2}$ c) $f(x) = (\sin(2x))^2$
 d) $f(x) = 8(\sqrt{3x} + 1)^{-3}$ e) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ f) $f(x) = \sin(\sqrt{1 - x})$
 g) $f(x) = x\sqrt{x}$ h) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i) $f(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$
 j) $g(t) = (4t^2 - 1)\sqrt{t}$ k) $g(a) = \sqrt{a}(1 - a)$ l) $h(z) = \sqrt{z}(z^2 - 1)$

Aufgabe A2

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = (1 - 2x) \cdot (3x + 1)$ b) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^3 + 1)$ c) $f(t) = (3t^2 + t)(1 - t^2)$
 d) $g(x) = (x^3 + x^2) \cdot (1 - x)$ e) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)(4 - 0,8x^2)$ f) $h(r) = (1 + r^2)^2$

Aufgabe A3

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = (2x + 1) \cdot \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot (1 - x^3)$ c) $f(x) = \frac{3-x}{x}$
 d) $f(x) = x \cdot \cos(x)$ e) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$ f) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(x)$
 g) $g(t) = \sin(t) \cos(t)$ h) $g(t) = \sin^2(t)$ i) $g(t) = \cos^2(t)$

Aufgabe A4

Leite ab und vereinfache.

- a) $f(x) = mx$ b) $f(x) = ax^2$ c) $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$
 d) $f(x) = t \cdot (x^2 - x)$ e) $f(t) = t \cdot (x^2 - x)$ f) $g(z) = t \cdot (x^2 - x)$
 g) $f(x) = x \cdot g(x)$ h) $f(x) = (g(x))^2$ i) $f(x) = g'(x) \cdot g(x)$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 4

Lösung A1

- $f'(x) = 2 \cdot (1 + \sqrt{3x}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x}}$
- $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (1-x) \cdot (2 + (1-x)^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-1}{\sqrt{2+(1-x)^2}}$
- $f'(x) = 2\sin(2x) \cdot 2\cos(2x) = 4\sin(2x)\cos(2x)$
- $f'(x) = -8 \cdot 3 \cdot (\sqrt{3x+1})^{-4} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = -36 \cdot (\sqrt{3x+1})^{-5}$
- $f'(x) = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{2\sqrt{1-\sin^2(x)}} = -\frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$
- $f'(x) = \cos(\sqrt{1-x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{\cos(\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x}}$
- $f'(x) = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
- $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x}$
- $f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}$
- $g'(t) = 8t\sqrt{t} + \frac{4t^2-1}{2\sqrt{t}} = \frac{20t^2-1}{2\sqrt{t}}$
- $g'(a) = \frac{1-a}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a} = \frac{1-3a}{2\sqrt{a}}$
- $h'(z) = \frac{z^2-1}{2\sqrt{z}} + 2z\sqrt{z} = \frac{5z^2-1}{2\sqrt{z}}$

Lösung A2

- $f'(x) = 1 - 12x$
- $f'(x) = x(5x^3 - 12x + 2)$
- $f'(t) = -12t^3 - 3t^2 + 1$
- $f'(x) = 2x - 4x^3$
- $f'(x) = -\frac{6x^2 - 8x - 10}{5}$
- $h'(r) = 4r(r^2 + 1)$

Lösung A3

- $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x+1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$
- $f'(x) = -\frac{1-x^3}{x^2} - 3x = -\frac{2x^3+1}{x^2}$
- $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{3-x}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$
- $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$
- $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$
- $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin(x) = -\frac{2x\sin(x) - \cos(x)}{2\sqrt{x}}$
- $g'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
- $g'(t) = 2\sin(t) \cdot \cos(t)$
- $g'(t) = -2\sin(t) \cdot \cos(t)$

Lösung A4

- $f'(x) = m$
- $f'(x) = 2ax$
- $s'(t) = gt$
- $f'(x) = t(2x - 1)$
- $f'(t) = x^2 - x$
- $g'(z) = 0$
- $f'(t) = g(x) + x \cdot g'(x)$
- $h'(x) = 2g(x) \cdot g'(x)$
- $f'(x) = g''(x) \cdot g(x) + (g'(x))^2$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 1 – Grundlagen – Blatt 5

Dokument mit 36 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = \frac{2x}{1+3x}$

d) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$

g) $f(t) = \frac{t-t^3}{t^2+1}$

j) $s(t) = \frac{4t^2-5}{2t+1}$

b) $f(x) = \frac{3-x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+4}$

h) $h(r) = \frac{2r^4}{r^2-1}$

k) $h(a) = \frac{2a+a^2}{3a-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{1+3x^2}$

f) $f(x) = \frac{2-x^3}{2+x^3}$

i) $f(x) = \frac{6x}{15-x^2}$

l) $z(t) = \frac{t^2-1,5t}{1+0,8t}$

Aufgabe A2

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = \frac{a-bx}{a+bx}$

d) $g(x) = \frac{x^{-3}}{x^{-3}-1}$

g) $g(x) = \frac{x^2}{\cos(x)}$

j) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

b) $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{ax^2-bx+c}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

h) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

k) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

c) $g(t) = \frac{ct^2-d}{ct+d}$

f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

l) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

Aufgabe A3

Leite ab und vereinfache.

a) $f(x) = x^{-1}$

d) $g(x) = \frac{1}{2}x^{-5}$

g) $f(x) = \frac{1}{2x^3}$

j) $g(t) = \frac{c}{t^3}$

b) $f(x) = x^{-4}$

e) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{5}{3x^4}$

k) $h(r) = \frac{p}{qr}$

c) $f(x) = 2x^{-3}$

f) $g(x) = \frac{3}{x^6}$

i) $f(t) = at^{-2}$

l) $k(s) = \frac{2}{as^2}$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 1 – Grundlagen – Blatt 5

Lösung A1

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad f'(x) &= \frac{2(1+3x)-6x}{(1+3x)^2} & = \frac{2}{(1+3x)^2} \\
 \text{b)} \quad f'(x) &= \frac{-(x^2+1)-2x(3-x)}{(x^2+1)^2} & = -\frac{3x^2+6x+1}{(x^2+1)^2} \\
 \text{c)} \quad f'(x) &= \frac{2x(1+3x^2)-6x^3}{(1+3x^2)^2} & = \frac{2x}{(1+3x^2)^2} \\
 \text{d)} \quad f'(x) &= \frac{(3x^2+1)(x^2-1)-2x(x^3+x)}{(x^2-1)^2} & = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} \\
 \text{e)} \quad f'(x) &= \frac{6x(x^2+4)-2x(3x^3-1)}{(x^2+4)^2} & = \frac{26x}{(x^2+4)^2} \\
 \text{f)} \quad f'(x) &= \frac{-3x^2(2+x^3)-3x^2(2-x^3)}{(2+x^3)^2} & = -\frac{12x^2}{(2+x^3)^2} \\
 \text{g)} \quad f'(t) &= \frac{(1-3t^2)(t^2+1)-2t(1-3t^3)}{(t^2+1)^2} & = -\frac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2} \\
 \text{h)} \quad h'(r) &= \frac{8r^3(r^2-1)-4r^6}{(r^2-1)^2} & = \frac{4r^3(r^2-2)}{(r^2-1)^2} \\
 \text{i)} \quad f'(x) &= \frac{6(15-x^2)+12x^2}{(15-x^2)^2} & = \frac{6(x^2+15)}{(15-x^2)^2} \\
 \text{j)} \quad s'(t) &= \frac{8t(2t+1)-8t^2}{(2t+1)^2} & = \frac{2(4t^2+4t+5)}{(2t+1)^2} \\
 \text{k)} \quad h'(a) &= \frac{(2a+2)-3(2a+a^2)}{(3a-4)^2} & = \frac{3a^2-8a-8}{(3a-4)^2} \\
 \text{l)} \quad h'(z) &= \frac{(2t-1,5)(1+0,8t)-0,8(t^2-1,5t)}{(1+0,8t)^2} & = \frac{40x^2+100x-75}{32x^2+80x+50}
 \end{aligned}$$

Lösung A2

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad f'(x) &= \frac{-b(a+bx)b(a-bx)}{(a+bx)^2} & = -\frac{2ab}{(a+bx)^2} \\
 \text{b)} \quad f'(x) &= \frac{(2ax+b)(ax^2-bx+c)-(2x-1)(ax^2+bx+c)}{(ax^2-bx+c)^2} & = -\frac{2b(ax^2-c)}{(ax^2-bx+c)^2} \\
 \text{c)} \quad g'(t) &= \frac{2ct(ct+d)-c(ct^2-d)}{(ct+d)^2} & = \frac{c(ct^2+2dt+d)}{(ct+d)^2} \\
 \text{d)} \quad g'(x) &= \frac{-3x^{-4}(x^{-3}-1)+3x^{-7}}{(x^{-3}-1)^2} & = \frac{3x^2}{(x^3-1)^2} \\
 \text{e)} \quad f'(x) & & = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
 \text{f)} \quad f'(x) &= \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} & = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \\
 \text{g)} \quad g'(x) &= \frac{2x\cos(x)+x^2\sin(x)}{\cos^2(x)} & = \frac{2x}{\cos(x)} + \frac{x^2\sin(x)}{\cos^2 x} \\
 \text{h)} \quad f'(x) &= \frac{\cos^2 x-\sin^2(x)}{\cos^2(x)} & = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x) \\
 \text{i)} \quad f'(x) &= \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2} & = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \\
 \text{j)} \quad g'(x) &= -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} & = -\frac{1}{2\sqrt{x+1}\cdot(x+1)} \\
 \text{k)} \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} & = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^2} \\
 \text{l)} \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(\sqrt{x}+1)}{x-1} & = \frac{1}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}
 \end{aligned}$$

Differenzialrechnung

Aufgabenblatt Ableitungen vermischte Aufgaben

Lösungen

Lösung A3

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| a) $f'(x) = -x^{-2}$ | b) $f'(x) = -4x^{-5}$ |
| c) $f'(x) = -6x^{-4}$ | d) $g'(x) = -\frac{5}{2}x^{-6}$ |
| e) $g'(x) = -\frac{1}{x^3}$ | f) $g'(x) = -\frac{18}{x^7}$ |
| g) $f'(x) = -\frac{3}{2x^4}$ | h) $f'(x) = -\frac{20}{3x^5}$ |
| i) $f'(t) = -2at^{-3}$ | j) $g'(t) = -\frac{3c}{t^4}$ |
| k) $h'(r) = -\frac{p}{qr^2}$ | l) $k'(s) = -\frac{4}{as^3}$ |

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 36 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = 2x^4$ | b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ |
| c) $f(x) = 2x$ | d) $f(x) = -2x$ |
| e) $f(x) = x^{-3}$ | f) $f(x) = (\frac{1}{4}x)^3$ |
| g) $f(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2$ | h) $f(x) = 5x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 3$ |
| i) $f(x) = -4x^3 - 2x^2 + 3x$ | j) $f(x) = 4x^6 + 3x^4 - 6x^2 + 1$ |
| k) $f(x) = 2ax^3 - 6a^2x^2$ | l) $f(x) = t^2x^4 - 3t^2x^2 + 4t^2$ |
| m) $f(x) = 2(3x^3 - 2x)$ | n) $f(x) = 4(x^2 + 2x)$ |

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|--|----------------------------------|
| a) $f(x) = 2x^3 \cdot 4x^2$ | b) $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 - 4)$ |
| c) $f(x) = (2x^3 - x \cdot 2) \cdot (4x^2 + 2x - 3)$ | |
| d) $f(x) = (x + 1)^2$ | e) $f(x) = (x^2 - 2)^{-3}$ |
| f) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ | g) $f(x) = \sin^2 x$ |
| h) $f(x) = \cos(x^2)$ | i) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 3x}$ |
| j) $f(x) = (4x + 1)^3$ | k) $f(x) = 2(x^2 + a)^4$ |
| l) $f(x) = (x - 1) \cdot (x - k)^2$ | m) $f(x) = 2ax(x - a)^2$ |

Aufgabe A3

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{4x^3}$ | b) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{2x}$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ | d) $f(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$ |
| e) $f(x) = \frac{x}{(3x+2)^2}$ | f) $f(x) = \frac{ax}{x^2+a}$ |
| g) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$ | h) $f(x) = \frac{ax^2 + 2}{x^2 + a}$ |
| i) $f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 5}{7x^2}$ | |

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Lösung A1

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $f'(x) = 8x^3$ | $f''(x) = 24x^2$ |
| b) $f'(x) = \frac{1}{2}x$ | $f''(x) = \frac{1}{2}$ |
| c) $f'(x) = 2$ | $f''(x) = 0$ |
| d) $f'(x) = -2$ | $f''(x) = 0$ |
| e) $f'(x) = -3x^{-4}$ | $f''(x) = 12x^{-5}$ |
| f) $f'(x) = \frac{3}{64} \cdot x^2$ | $f''(x) = \frac{3}{32}x$ |
| g) $f'(x) = 8x^3 + 12x^2 - 6x$ | $f''(x) = 6(4x^2 + 4x - 1)$ |
| h) $f'(x) = 25x^4 - 12x^3 - 4x$ | $f''(x) = 4(25x^3 - 9x^2 - 1)$ |
| i) $f'(x) = -12x^2 - 4x + 3$ | $f''(x) = -4(6x + 1)$ |
| j) $f'(x) = 12(2x^5 + x^3 - x)$ | $f''(x) = 12(10x^4 + 3x^2 - 1)$ |
| k) $f'(x) = 6a(x^2 - 2ax)$ | $f''(x) = 12a(x - a)$ |
| l) $f'(x) = 4t^2x^3 - 6t^2x$ | $f''(x) = 6t^2(2x^2 - 1)$ |
| m) $f'(x) = 2(9x^2 - 2)$ | $f''(x) = 36x$ |
| n) $f'(x) = 8(x + 1)$ | $f''(x) = 8$ |

Lösung A2

- | | |
|--|---|
| a) $f'(x) = 40x^4$ | $f''(x) = 160x^3$ |
| b) $f'(x) = 2x^2(5x^2 - 2)$ | $f''(x) = 8x(5x^2 - 1)$ |
| c) $u = 2x^3 - x \cdot 2$ | $u' = 6x^2 - 2$ |
| $v = 4x^2 + 2x - 3$ | $v' = 8x + 2$ |
| $f'(x) = (6x^2 - 2) \cdot (4x^2 + 2x - 3) + (8x + 2) \cdot (2x^3 - x \cdot 2)$ | |
| $= 24x^4 + 12x^3 - 18x^2 - 8x^2 - 4x + 6 + 16x^4 - 16x^2 + 4x^3 - 4x$ | |
| $= 40x^4 + 16x^3 - 42x^2 - 8x + 6$ | |
| $f''(x) = 160x^3 + 48x^2 - 82x - 8$ | |
| d) $f'(x) = 2(x + 1)$ | $f''(x) = 2$ |
| e) $f'(x) = -6x(x^2 - 2)^{-4} = -\frac{6x}{(x^2-2)^4}$ | $f''(x) = -\frac{6(x^2-2)^4 - 8x \cdot (x^2-2)^3}{(x^2-2)^8}$
$= -\frac{6x^2 - 8x - 12}{(x^2-2)^5}$ |
| f) $f'(x) = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3x-4}}$ | $f''(x) = -\frac{3}{4(3x-4) \cdot \sqrt{3x-4}}$ |
| g) $f'(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$ | $f''(x) = 2 \cos(2x)$ |
| h) $f'(x) = -2x \cdot \sin(x^2)$ | $f''(x) = -2 \sin(x^2) - 4x^2 \cos(x^2)$ |
| i) $f'(x) = \frac{4x+3}{3 \cdot (2x^2+3x)^{\frac{2}{3}}}$ | $u = 4x + 3 \quad u' = 4$

$v = 3 \cdot (2x^2 + 3x)^{\frac{2}{3}} \quad v' = \frac{2 \cdot (4x+3)}{(2x^2+3x)^{\frac{1}{3}}}$
$f''(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot (2x^2+3x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2 \cdot (4x+3)^2}{(2x^2+3x)^{\frac{1}{3}}}}{(2x^2+3x)^{\frac{4}{3}}}$
$= \frac{12 \cdot (2x^2+3x) - 2 \cdot (4x+3)^2}{9 \cdot (2x^2+3x)^{\frac{5}{3}}}$
$= \frac{24x^2 + 36x - 32x^2 - 48x - 18}{9 \cdot (2x^2+3x)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{8x^2 + 12x + 18}{9 \cdot (2x^2+3x)^{\frac{5}{3}}}$ |
| j) $f'(x) = 12(4x + 1)^2$ | $f''(x) = 96(4x + 1)$ |
| k) $f'(x) = 16x(x^2 + a)^3$ | $f''(x) = 96x^2(x^2 + a)^2$ |
| l) $f'(x) = (x - k)(3x - k - 2)$ | $f''(x) = 6x - 4k - 2$ |
| m) $f'(x) = 2a(x - a)(3x - a)$ | $f''(x) = 12ax - 8a^2$ |

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Lösung A3

- | | |
|---|---|
| a) $f'(x) = -\frac{x+3}{2x^3}$ | $f''(x) = \frac{2x+9}{2x^4}$ |
| b) $f'(x) = \frac{3x^4+1}{2x^2}$ | $f''(x) = \frac{3x^4-1}{x^3}$ |
| c) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ | $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ |
| d) $f'(x) = -\frac{16}{(2x+1)^3}$ | $f''(x) = \frac{96}{(x+1)^4}$ |
| e) $f'(x) = -\frac{3x-2}{(3x+2)^2}$ | $f''(x) = \frac{6(3x-4)}{(3x+2)^4}$ |
| f) $f'(x) = \frac{a(x^2-a)}{(x^2+a)^2}$ | $f''(x) = \frac{2ax(x^2-3a)}{(x^2+a)^3}$ |
| g) $f'(x) = \frac{x(3x^3+9x-8)}{(x^2+1)^2}$ | $f''(x) = \frac{2(3x^3-12x^2-9x+4)}{(x^2+1)^3}$ |
| h) $f'(x) = \frac{2x(a^2-2)}{(x^2+a)^2}$ | $f''(x) = \frac{2(a^2-2)(3x^2-a)}{(x^2+a)^3}$ |
| i) $f'(x) = -\frac{2x-10}{7x^3}$ | $f''(x) = \frac{4x-30}{7x^4}$ |

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Dokument mit 31 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.



- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = e^x + x^2$ | b) $f(x) = 3e^x - 0,5x^2 + x$ |
| d) $f(x) = e^{-x} + e^x$ | d) $f(x) = e^{-2x} - 4e^{-x}$ |
| e) $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$ | f) $f(x) = (3x - 4) \cdot e^x$ |
| g) $f(x) = 3x^2 \cdot e^{-4x}$ | h) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 \cdot e^{2x}$ |
| i) $f(x) = (2x + 5) \cdot e^{-x}$ | j) $f(x) = (x + k) \cdot e^{-kx}$ |
| k) $f(x) = (4x + e^{-x})^2$ | l) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ |
| m) $f(x) = (x + 3) \cdot e^{2x+1}$ | n) $f(x) = (8 - 4x) \cdot e^{-0,5x}$ |
| o) $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{1-x}$ | p) $f_a(x) = \frac{x+2a}{e^x}$ |
| q) $f(x) = 100 \cdot e^{-0,48x}(1 - e^{-0,12x})$ | r) $f_a(x) = (a - e^x)^2$ |
| s) $N_k(t) = N_0 \cdot e^{-kt}(1 - e^{-kt})$ | t) $f_a(x) = (ax + 1) \cdot e^{1-ax}$ |
| u) $f_a(t) = \frac{e^t - a}{e^t + a}$ | v) $f_t(x) = \frac{e^{tx} - e^{-tx}}{e^{tx} + e^{-tx}}$ |
| w) $f(x) = e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ | |

Aufgabe A2

Bestimme die ersten drei Ableitungen von $f(x) = 2xe^{-x}$. Stelle eine Vermutung auf, wie die 10. Ableitung $f^{(10)}(x)$ lautet.

Aufgabe A3

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = 2x \cdot \cos(\frac{1}{2}x^2 + 4)$ | b) $f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$ |
| c) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ | d) $f(x) = (x^2 - \sin x)^3$ |
| e) $f(x) = (ax - \sin(ax))^2$ | f) $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ |
| g) $f(x) = x^2 \cdot \sin(4x + 3)$ | |

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A1

- | | |
|---|--|
| a) $f'(x) = e^x + 2x$ | $f''(x) = e^x + 2$ |
| b) $f'(x) = 3e^x - x + 1$ | $f''(x) = 3e^x - 1$ |
| c) $f'(x) = -e^{-x} + e^x$ | $f''(x) = e^{-x} + e^x$ |
| d) $f'(x) = -2e^{-2x} + 4e^{-x} = 2e^{-x}(2 - e^{-x})$ | $f''(x) = 4e^{-2x} - 4e^{-x} = 4e^{-x}(e^{-x} - 1)$ |
| e) $f'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x - 1) \cdot e^x$
$= e^x(2x - 2 + x^2 - 2x - 1) = e^x(x^2 - 3)$ | $f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$ |
| f) $f'(x) = e^x \cdot (3x - 1)$ | $f''(x) = e^x(3x + 2)$ |
| g) $f'(x) = 6x \cdot e^{-4x} - 12x^2 \cdot e^{-4x} = 6e^{-4x}(x - 2x^2)$ | $f''(x) = e^{-4x}(48x^2 - 48x + 6)$ |
| h) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot e^{2x} = e^{2x}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)$ | $f''(x) = e^{2x}(2x^3 + 6x^2 + 3x)$ |
| i) $f'(x) = -e^{-x}(2x + 3)$ | $f''(x) = e^{-x}(2x + 1)$ |
| j) $f'(x) = e^{-kx}(1 - k(x + k)) = -e^{-kx}(kx + k^2 - 1)$ | $f''(x) = ke^{-kx}(kx + k^2 - 2)$ |
| k) $f'(x) = 2(4x + e^{-x})(4 - e^{-x})$ | $f''(x) = e^{-2x}(32e^{2x} + e^x(8x - 16) + 4)$ |
| l) $f'(x) = 2e^{-2x} \cdot (e^{4x} - 1)$ | $f''(x) = 4e^{-2x}(e^{4x} + 1)$ |
| m) $f'(x) = e^{2x+1} \cdot (2x + 7)$ | $f''(x) = 4e^{2x+1}(x + 4)$ |
| n) $f'(x) = e^{-0,5x} \cdot (2x - 8)$ | $f''(x) = -e^{-0,5x} \cdot (x - 6)$ |
| o) $f'(x) = -e^{1-x} \cdot (x^2 - 2)$ | $f''(x) = e^{1-x} \cdot (x^2 - 2x - 2)$ |
| p) $f_a'(x) = -\frac{x+2a-1}{e^x}$ | $f_a''(x) = \frac{x+2a-2}{e^x}$ |
| q) $f'(x) = -e^{-0,6x}(48e^{0,12x} - 60)$ | $f''(x) = e^{-1,08x}(23,04e^{0,6x} - 36e^{0,48x})$ |
| r) $f_a'(x) = 2e^x(e^x - a)$ | $f_a''(x) = 2e^x(2e^x - a)$ |
| s) $N_k'(t) = -kN_0 \cdot e^{-2kt}(e^{kt} - 2)$ | $N_k''(t) = k^2 N_0 e^{-2kt}(e^{kt} - 4)$ |
| t) $f_a'(x) = -a^2 x \cdot e^{1-ax}$ | $f_a''(x) = a^2 e^{1-ax}(ax - 1)$ |
| u) $f_a'(t) = \frac{2ae^x}{(e^x+a)^2}$ | $f_a''(t) = -\frac{2ae^x(e^x-a)}{(e^x+a)^3}$ |
| v) $f_t'(x) = \frac{4e^{2tx}}{(e^{2tx}+1)^2}$ | $f_t''(x) = \frac{8t^2 e^{2tx}(e^{2tx}-1)}{(e^{2tx}+1)^3}$ |
| w) $f'(x) = \frac{(4x-3)e^{2x}}{2x^2\sqrt{x}}$ | $f''(x) = \frac{(16x^2-24x+15)e^{2x}}{4x^3\sqrt{x}}$ |

Lösung A2

$$f(x) = 2x \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}(2x - 2)$$

$$f''(x) = e^{-x}(2x - 4)$$

$$f'''(x) = -e^{-x}(2x - 6)$$

Die n -te Ableitung errechnet sich über die Formel:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x} \cdot (2x - 2n); \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Somit ist $f^{(10)}(x) = e^{-x}(2x - 20)$.

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A3

- a) $f'(x) = -2 \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\right) \right)$
 $f''(x) = -2 \left(3x \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\right) \right)$
- b) $f'(x) = x^2 \cdot (3\sin(x) + x\cos(x))$
 $f''(x) = -x((x^2 - 6)\sin(x) - 6x\cos(x))$
- c) $f'(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$
 $f''(x) = -8\cos(x)\sin(x)$
- d) $f'(x) = 3(x^2 - \sin(x))^2 \cdot (2x - \cos(x))$
 $f''(x) = 3(x^2 - \sin(x))^2(\sin(x) + 2) + 6(2x - \cos(x))^2(x^2 - \sin(x))$
- e) $f'(x) = 2a(\cos(ax) - 1) \cdot (\sin(ax) - ax)$
 $f''(x) = -2a^2(\sin^2(ax) - a\sin(ax) - \cos^2(ax) + 2\cos(ax) - 1)$
- f) $f'(x) = -x\sin^2(x) + \sin(x)\cos(x) + x\cos^2(x)$
 $f''(x) = -2(\sin^2(x) + 2x\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x))$
- g) $f'(x) = 2x(\sin(4x + 3) + 2x \cdot \cos(4x + 3))$
 $f''(x) = (2 - 16x^2)\sin(4x + 3) + 16x\cos(4x + 3)$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Dokument mit 25 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
 c) $f(x) = (\sqrt{x} + 2)^2$
 e) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{ax^2 - 2ax}$
 d) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x^2 + 4}$
 f) $f(x) = \sqrt[5]{2x^2 + 5}$

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = \frac{3}{1+e^x}$
 c) $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$
 e) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{1+e^x}$

b) $f(x) = \frac{x}{2+e^{3x}}$
 d) $f(x) = \frac{e^x}{2-e^{-x}}$
 f) $f(x) = \frac{4}{1-e^{-x}}$

Aufgabe A3

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = \frac{2}{1+\sin(x)}$
 c) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+5}}$
 e) $f(x) = \frac{\ln(ax)}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$
 d) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Aufgabe A4

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$
 c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$
 e) $f(x) = a^{nx}$
 g) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$
 d) $f(x) = e^x \cdot \sin x$
 f) $f(x) = x^5 \cdot \ln(x)$
 h) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 3

Lösung A1

- a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$
- b) $f'(x) = \frac{a(x-1)}{\sqrt{ax^2-2ax}}$
- c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 1$
- d) $f'(x) = \frac{4(x^2+2)}{\sqrt{x^2+4}}$
- e) $f'(x) = \frac{x(3x^2-8)}{\sqrt{x^2-4}}$
- f) $f'(x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(2x^2+5)^4}}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{4}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}} \\ f''(x) &= -\frac{a^2}{(ax^2-2ax)\cdot\sqrt{ax^2-2ax}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} \\ f''(x) &= \frac{4x^3+24x}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}} \\ f''(x) &= \frac{6x^4-36x^2+32}{(x^2-4)\cdot\sqrt{x^2-4}} \\ f''(x) &= -\frac{24x^2-100}{25\cdot(2x^2+5)\cdot\sqrt[5]{(2x^2+5)^4}} \end{aligned}$$

Lösung A2

- a) $f'(x) = -\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$
- b) $f'(x) = -\frac{e^{3x}\cdot(3x-1)-2}{(2+e^{3x})^2}$
- c) $f'(x) = \frac{xe^x(2e^x+x+2)}{(e^x+1)^2}$
- d) $f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x-1)}{(2e^x-1)^2}$
- e) $f'(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x}-2e^x-1)}{(1+e^x)^2}$
- f) $f'(x) = -\frac{4e^x}{(e^x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3e^x\cdot(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \\ f''(x) &= \frac{3e^{3x}\cdot((3x-2)e^{3x}-4)}{(2+e^{3x})^3} \\ f''(x) &= \frac{x(2e^{2x}+e^x(-x^2+4x+4)+x^2+4x+2)}{(e^x+1)^3} \\ f''(x) &= \frac{2e^{2x}(2e^{2x}-3e^x+2)}{(2e^x-1)^3} \\ f''(x) &= \frac{e^{-x}(e^{3x}-5e^{2x}-3e^x-1)}{(1+e^x)^3} \\ f''(x) &= \frac{4e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3} \end{aligned}$$

Lösung A3

- a) $f'(x) = -\frac{2\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$
- b) $f'(x) = \frac{4}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}$
- c) $f'(x) = -\frac{5}{(2x+5)\cdot\sqrt{2x+5}}$
- d) $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$
- e) $f'(x) = \frac{2x(\ln(ax)-1)-1}{x(2x+1)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(\sin^2(x)+\sin(x)+2\cos^2(x))}{(1+\sin(x))^3} \\ f''(x) &= -\frac{12x}{(1+x^2)^2\cdot\sqrt{1+x^2}} \\ f''(x) &= \frac{15}{(2x+5)^2\cdot\sqrt{2x+5}} \\ f'(x) &= \frac{4x}{(x^2-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{4x(x(2\ln(ax)-3)-2)-1}{x^2(2x+1)^3} \end{aligned}$$

Lösung A4

- a) $f'(x) = 2x \cdot (\sin(2x) + x\cos(2x))$
 $f''(x) = (2+4x^2) \cdot \sin(2x) + 8x \cdot \cos(2x)$
- b) $f'(x) = \frac{4x(x-3)}{(x-1)^2 \cdot (x+3)^2}$
- c) $f'(x) = \frac{x+1}{(1+2x)\cdot\sqrt{1+2x}}$
- d) $f'(x) = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$
- e) $f'(x) = n \cdot a^{nx} \cdot \ln(a)$
- f) $f'(x) = x^4 \cdot (5\ln(x) + 1)$
- g) $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
- h) $f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4(2x^3-9x^2-9)}{(x-1)^3 \cdot (x+3)^3} \\ f''(x) &= -\frac{x+2}{(1+2x)^2 \cdot \sqrt{1+2x}} \\ f''(x) &= 2e^x \cdot \cos(x) \\ f''(x) &= n^2 \cdot a^{nx} \cdot \ln^2(a) \\ f''(x) &= x^3 \cdot (20\ln(x) + 9) \\ f''(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} \\ f''(x) &= \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 23 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = \ln(2 + 3x^2)$ | b) $f(x) = \ln(2x^2 + x)$ |
| c) $f(x) = 2x \cdot \ln(4 + x)$ | d) $f_t(x) = \ln(x^2 + t)$ |
| e) $f(x) = \ln(\ln(3x + 1))$ | |

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $f(x) = \sin(e^x + 1)$ | b) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$ |
| c) $f(x) = e^{3x} \cdot \sin(e^{2x})$ | d) $f(x) = \sqrt{e^{3x} + 1}$ |
| e) $f(x) = \sqrt{2x + 1} \cdot e^{-x}$ | f) $f(x) = \ln(\sin(x))$ |

Aufgabe A3

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = \ln(x^2 + 3\sin(x))$ | b) $f(x) = \sin(\ln(3x))$ |
| c) $f(x) = \sqrt{3\ln(x^2)}$ | d) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$ |
| e) $f(x) = 3\ln(\sqrt{2x^2 + x})$ | |

Aufgabe A4

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = x^2 - a^2$ | b) $f(a) = x^2 - a^2$ |
| c) $f(y) = x^2 - a^2$ | d) $f(x) = e^x \cdot 3x^2 \cdot \cos(2x)$ |
| e) $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\sin(x)}$ | f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ |
| g) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-x}$ | |

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 1

Lösung A1

a) $f'(x) = \frac{6x}{2+3x^2}$

$$f''(x) = \frac{6(3x^2-2)}{(2+3x^2)^2}$$

b) $f'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x}$

$$f''(x) = -\frac{8x^2+4x+1}{x^2(2x+1)^2}$$

c) $f'(x) = 2\ln(4+x) + \frac{2x}{4+x}$

$$f''(x) = \frac{2(8+x)}{(4+x)^2}$$

d) $f_t'(x) = \frac{2x}{x^2+t}$

$$f_t''(x) = -\frac{2(x^2-t)}{(x^2+t)^2}$$

e) $f'(x) = \frac{3}{(3x+1)\cdot\ln(3x+1)}$

$$f''(x) = \frac{9(\ln(3x+1)+1)}{(3x+1)^2\ln^2(3x+1)}$$

Lösung A2

a) $f'(x) = e^x \cdot \cos(e^x + 1)$

$$f''(x) = -e^x(e^x \sin(e^x + 1) - \cos(e^x + 1))$$

b) $f'(x) = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$

$$f''(x) = 2e^x \cdot \cos(x)$$

c) $f'(x) = 3e^{3x} \cdot \sin(e^{2x}) + 2e^{5x} \cos(e^{2x})$

$$f''(x) = (9e^{3x} - 4e^{7x}) \sin(e^{2x}) + 16e^{5x} \cos(e^{2x})$$

d) $f'(x) = \frac{3e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x}+1}}$

$$f''(x) = \frac{9e^{6x}+18e^{3x}}{4 \cdot (e^{3x}+1) \cdot \sqrt{e^{3x}+1}}$$

e) $f'(x) = -\frac{2x \cdot e^{-x}}{\sqrt{2x+1}}$

$$f''(x) = \frac{(4x^2-2) \cdot e^{-x}}{(2x+1) \cdot \sqrt{2x+1}}$$

f) $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$f''(x) = -\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} - 1$$

Lösung A3

a) $f'(x) = \frac{2x+3\cos(x)}{x^2+3\sin(x)}$

$$f''(x) = -\frac{(3x^2-6) \sin(x) + 12 \cos(x) + 2x^2 + 9}{(3 \sin(x) + x^2)^2}$$

b) $f'(x) = \frac{\cos(\ln(3x))}{3}$

$$f''(x) = -\frac{\sin(\ln(3x)) + \cos(\ln(3x))}{x^2}$$

c) $f'(x) = \frac{\sqrt{6}}{2x \cdot \sqrt{\ln(x)}}$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{6} \cdot (2 \ln(x) + 1)}{4x^2 \ln(x) \cdot \sqrt{\ln(x)}}$$

d) $f'(x) = \frac{1}{2x}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

e) $f'(x) = \frac{12x+3}{4x^2+2x}$

$$f''(x) = -\frac{3(8x^2+4x+1)}{2x^2(2x+1)^2}$$

Lösung A4

a) $f'(x) = 2x$

$$f''(x) = 2$$

b) $f'(a) = -2a$

$$f''(a) = -2$$

c) $f'(y) = 0$

$$f''(y) = 0$$

d) $f'(x) = -3xe^x \cdot (2x \sin(2x) + (-x-2) \cos(2x))$

$$f''(x) = -3e^x(4x(x+2) \sin(2x) + (3x^2 - 4x - 2) \cos(2x))$$

e) $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (\sin^2(x) + \cos^2(x) - 1)}{\sqrt{1-\cos^2(x)} \sin^2(x)} = \frac{\cos(x) \cdot (1-1)}{\sqrt{1-\cos^2(x)} \sin^2(x)} = 0$

$$f''(x) = 0$$

f) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \sin(x)}{\cos^3(x)} = 2 \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

g) $f'(x) = -e^{-x}(\sin(x) - \cos(x))$

$$f''(x) = -2e^{-x} \cdot \cos(x)$$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 3 – Expert – Blatt 2

Dokument mit 18 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache.

a) $f(x) = x^2 \cdot \sin(2x)$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$

d) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

e) $f(x) = a^{nx}$

f) $f(x) = x^5 \cdot \ln(x)$

Aufgabe A2

Bilde die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^n}$

d) $f(x) = e^{\tan(x)}$

e) $f(x) = p^{2x}$

f) $f(x) = \sqrt[k]{1-x}$

Aufgabe A3

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f_a(x) = \frac{ax^2}{ax+b}$

b) $f(x) = \frac{x-4}{x^2+2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-4}$

d) $f(x) = \frac{x-2}{x^3+3x+1}$

e) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 3 - Expert - Blatt 21

Lösung A1

- a) $f'(x) = 2x \cdot (\sin(2x) + x \cos(2x))$ $f''(x) = (2 - 4x^3)\sin(2x) + 8x\cos(2x)$
 b) $f'(x) = \frac{4x \cdot (x-3)}{(x-1)^2 \cdot (x+3)^2}$ $f''(x) = -\frac{4(2x^3 - 9x^2 - 9)}{(x-1)^3 \cdot (x+3)^3}$
 c) $f'(x) = \frac{x+1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}$ $f''(x) = -\frac{x+2}{(1+2x)^{\frac{5}{2}}}$
 d) $f'(x) = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))$ $f'(x) = 2e^x \cdot \cos(x)$
 e) $f'(x) = n \cdot a^{nx} \cdot \ln(a)$ $f''(x) = n^2 \cdot a^{nx} \cdot \ln^2(a)$
 f) $f'(x) = x^4 \cdot (5 \cdot \ln(x) + 1)$ $f''(x) = x^3 \cdot (20 \cdot \ln(x) + 9)$

Lösung A2

- a) $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
 b) $f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$
 c) $f'(x) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{2 \cdot \sqrt{1-x^n}}$
 d) $f'(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}$
 e) $f'(x) = 2 \cdot p^{2x} \cdot \ln(p)$
 f) $f'(x) = -\frac{k \sqrt{(1-x)^{1-k}}}{k}$

$$\begin{aligned}f''(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} \\f''(x) &= \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3} \\f''(x) &= \frac{n \cdot x^{n-2}(x^n(n-2)-2n+2)}{4(1-x^n)^{\frac{3}{2}}} \\f''(x) &= \frac{e^{\tan x}(2 \tan(x) \cdot \cos^2(x)+1)}{\cos^4(x)} \\f''(x) &= 4 \cdot p^{2x} \cdot \ln^2(p) \\f''(x) &= \frac{(\frac{1}{k}-1) \cdot k \sqrt{(1-x)^{1-2k}}}{k}\end{aligned}$$

Lösung A3

- a) $f_a'(x) = \frac{ax(ax+2b)}{(ax+b)^2}$
 b) $f'(x) = -\frac{x^2-8x-2}{(x^2+2)^2}$
 c) $f'(x) = \frac{x^2-8x-2}{(x-4)^2}$
 d) $f'(x) = -\frac{2x^3-6x^2-7}{(x^3+3x+1)^2}$
 e) $f'(x) = \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$
 f) $f'(x) = \frac{x(2 \sin(x) - x \cos(x))}{\sin^2(x)}$
 $f''(x) = \frac{(x^2+2) \sin^2(x) - 4x \cos(x) \sin(x) + 2x^2 \cos^2(x)}{\sin^3(x)}$

$$\begin{aligned}f_a''(x) &= \frac{2ab^2}{(ax+b)^3} \\f''(x) &= \frac{2(x^3-12x^2-6x+8)}{(x^2+2)^3} \\f''(x) &= \frac{36}{(x-4)^3} \\f''(x) &= \frac{6(x^5-4x^4-x^3-8x^2+2x-7)}{(x^3+3x+1)^3} \\f''(x) &= \frac{(x^2+1) \cdot e^x}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 3 – Expert – Blatt 3

Dokument mit 16 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = \ln(x) + 4x^2 + 3$

c) $f(x) = 2x^2 \ln(x)$

e) $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2)$

g) $f(x) = \ln(x+3)^2$

i) $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{x+1}$

k) $f(x) = (x^3 + 2)(x + 3)$

b) $f(x) = (2x - 1)(5x + 3)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

f) $f(x) = \frac{2x^3+x}{e^x}$

h) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5}}$

j) $f(x) = \sqrt{x-1}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

Aufgabe A2

Bilde die 1. Ableitung der gegebenen Funktionsgleichungen und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = 5e^{2x^2-3x+1}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \ln(x^2)}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{\ln(x)}$

d) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x+1)}$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 3

Lösung A1

a) $f(x) = \ln(x) + 4x^2 + 3$
 $f'(x) = \frac{1}{x} + 8x$

b) $f(x) = (2x - 1)(5x + 3)$
 $= 10x^2 + x - 3$
 $f'(x) = 20x + 1$

c) $f(x) = 2x^2 \ln(x)$
 Produktregel erforderlich

$$u = 2x^2; \quad u' = 4x \\ v = \ln(x); \quad v' = \frac{1}{x} \\ f'(x) = u'v + v'u = 4x\ln(x) + \frac{2x^2}{x} = 4x\ln(x) + 2x$$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 2 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
 Kettenregel und Quotientenregel erforderlich

$$u = 2 \cdot \ln(v); \quad u' = \frac{2}{v} \cdot v' \\ v = \frac{x+1}{x-1} = \frac{w}{q}; \quad v' = \frac{wq - q'w}{q^2} \\ w = x+1; \quad w' = 1 \\ q = x-1; \quad q' = 1; \quad q^2 = (x-1)^2 \\ v' = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{4 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)^2} = -\frac{4}{(x+1)(x-1)} = -\frac{4}{x^2-1}$$

e) $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2)$
 Kettenregel erforderlich
 $f'(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2} \cdot (3x^2 - 8x)$

f) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{e^x}$
 Quotientenregel erforderlich

$$u = 2x^3 + x; \quad u' = 6x + 1 \\ v = e^x; \quad v' = e^x; \quad v^2 = e^{2x} \\ f'(x) = \frac{(6x+1)e^x - (2x^3+x)e^x}{e^{2x}} \\ f'(x) = \frac{e^x(6x+1-2x^3-x)}{e^{2x}} = \frac{-2x^3+5x+1}{e^x}$$

g) $f(x) = \ln(x+3)^2$
 Kettenregel erforderlich

$$f'(x) = 2\ln(x+3) \cdot \frac{1}{x+3} \\ f'(x) = \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

i) $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{x+1}$
 Produktregel und Quotientenregel erforderlich

$$u = x \cdot \ln(x); \quad u' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \\ v = x+1; \quad v' = 1; \quad v^2 = (x+1)^2 \\ f'(x) = \frac{u'v - vu'}{v^2} = \frac{(\ln(x)+1) \cdot (x+1) - x \cdot \ln(x)}{(x+1)^2} = \frac{x\ln(x) + \ln(x) + x + 1 - x\ln(x)}{(x+1)^2} \\ = \frac{\ln(x) + x + 1}{(x+1)^2}$$

h) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5}} = e^{\frac{1}{2}(x^2+5)} = e^{\frac{x^2+5}{2}}$
 Kettenregel erforderlich

$$f'(x) = x \cdot e^{\sqrt{x^2+5}}$$

Aufgabenblatt Ableitungen vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung
Lösungen
Level 3 – Expert – Blatt 3

- j) $f(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$
 $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$
- k) $f(x) = (x^3 + 2)(x+3) = x^4 + 3x^3 + 2x + 6$
 $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2$
- l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} = (x^3+1)^{\frac{1}{3}}$
 $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$

Lösung A2

a) $f(x) = 5e^{2x^2-3x+1}$

Kettenregel erforderlich

$$f'(x) = 5 \cdot (6x-3) \cdot e^{2x^2-3x+1}$$

b) $f(x) = \frac{x^3}{\ln(x)}$

Quotientenregel erforderlich

$$u = x^3; \quad u' = 3x^2$$

$$v = \ln(x); \quad v' = \frac{1}{x}; \quad v^2 = \ln^2(x)$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{3x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{x^2(3\ln(x)-1)}{\ln^2(x)}$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \ln(x^2)} = (x^2 + \ln(x^2))^{\frac{1}{3}}$

Kettenregel erforderlich

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + \ln(x^2))^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + \frac{1}{x^2} \cdot 2x)$$

$$f'(x) = \frac{2x + \frac{2}{x}}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + \ln(x^2))^2}} = \frac{2x^2 + 2}{3x \cdot \sqrt[3]{(x^2 + \ln(x^2))^2}} = \frac{2(x^2 + 1)}{3x \cdot \sqrt[3]{(x^2 + \ln(x^2))^2}}$$

d) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x+1)}$

Quotientenregel erforderlich

$$u = e^x; \quad u' = e^x$$

$$v = \ln(x+1); \quad v' = \frac{1}{x+1}; \quad v^2 = \ln^2(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{e^x \cdot \ln(x+1) - e^x \cdot \frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)} = \frac{e^x (\ln(x+1) - \frac{1}{x+1})}{\ln^2(x+1)}$$

Aufgabenblatt Ableitungen**vermischte Aufgaben**

Level 4 – Universität – Blatt 1

Dokument mit 12 Aufgaben

**Aufgabe A1**

Leite zweimal ab und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = \frac{3x^2}{\cos(x)}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{\cos(x)}}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin^3(x)$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{\sin(x^2-1)}{x^2 \cdot \cos(x)}}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{2+\cos(x)}$

f) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \ln(x^2 + 1)$

g) $f(x) = \ln(\sin(\sqrt{e^{4x} + 5}))$

h) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$

Aufgabe A2

Wie lauten die ersten drei Ableitungen folgender Funktionen?

a) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x) = (3x^2 - 2x + 1) \cdot (3x^2 + 2x - 1)$

c) $f(x) = 5\sin(x) + 3\cos(x)$

Aufgabe A3

Weise nach, dass die 1. und die 2. Ableitung der Funktion

$$f(x) = 1 + \tan^2(x)$$

lautet:

$$f'(x) = 2 \sec^2(x) \tan(x)$$

$$f''(x) = 4 \sec^2(x) \tan^2(x) + 2 \sec^4(x)$$

Lösungstipp:Die trigonometrische Funktion $\sec(\alpha)$ (Sekans von α) ist definiert als

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Die Ableitung von $f(x) = \sec(x)$ lautet $f'(x) = \sec(x) \cdot \tan(x)$.

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 4 – Universität – Blatt 1

Lösung A1

a) $f'(x) = \frac{3x(x\sin(x)+2\cos(x))}{\cos^2(x)}$

$$f''(x) = \frac{6x^2\sin^2(x)+12x\sin(x)\cos(x)+(3x^2+6)\cos^2(x)}{\cos^3(x)}$$

b) $f'(x) = \frac{(2x+1)\sin(x)+2\cos(x)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2 \cdot \cos^4(x)}}$

$$f''(x) = \frac{(16x^2+16x+4)\sin^2(x)+(8x+4)\sin(x)\cos(x)+(12x^2+12x-5)\cos^2(x)}{9\sqrt[3]{(2x+1)^5 \cdot \cos^7(x)}}$$

c) $f'(x) = \frac{x\sin^2(x)(2\sin(x)+3x\cos(x))}{2}$

$$f''(x) = \frac{\sin(x)((3x^2-2)\sin^2(x)-12x\sin(x)-6x^2\cos^2(x))}{2}$$

d) $f'(x) = \frac{(x\sin(x)-2\cos(x))\sin(x^2-1)+2x^2\cos(x)\cos(x^2-1)}{2x\cos^2(x)\cdot|x|\cdot\sqrt{\frac{\sin(x^2-1)}{\cos x}}}$

$$f''(x) = \frac{(3x^2\sin^2(x)-4\sin(x)\cos(x)+(-8x^4+2x^2+8)\cos^2(x))\sin^2(x^2-1)}{4x^2\cos^4(x)\cdot|x|\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin(x^2-1)}{\cos x}\right)^3}} +$$

$$\frac{(4x^3\sin(x)\cos(x)-4x^2\cos^2(x))\cos(x^2-1)\sin(x^2-1)-4x^4\cos^2(x)\cos^2(x^2-1)}{4x^2\cos^4(x)\cdot|x|\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin(x^2-1)}{\cos x}\right)^3}}$$

e) $f'(x) = \frac{x(x\sin(x)+2\cos(x)+4)}{(2+\cos(x))^2}$

$$f''(x) = \frac{2x^2\sin^2(x)+\sin(x)(4x\cos(x)+8x)+\cos^2(x)(x^2+2)+\cos(x)(2x^2+8)+8}{(2+\cos(x))^3}$$

f) $f'(x) = (2-2)\cdot\ln(x^2+1) + \frac{2x(x^2-2x)}{x^2+1}$

$$f''(x) = \frac{2((x^4+2x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)+3x^4-2x^3+5x^2-6x)}{(x^2+1)^2}$$

g) $f'(x) = \frac{2e^{4x}\cdot\cos(\sqrt{e^{4x}+5})}{\sqrt{e^{4x}+5}\cdot\sin(\sqrt{e^{4x}+5})}$

$$f''(x) = \frac{4e^{4x}\left(e^{4x}\cdot(e^{4x}+5)^{\frac{3}{2}}\cdot\sin^2(\sqrt{e^{4x}+5})+(-e^{8x}-15e^{4x}-50)\cdot\cos(\sqrt{e^{4x}+5})\cdot\sin(\sqrt{e^{4x}+5})+e^{4x}(e^{4x}+5)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2(\sqrt{e^{4x}+5})\right)}{(e^{4x}+5)^{\frac{5}{2}}\cdot\sin^2(\sqrt{e^{4x}+5})}$$

h) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x} = \frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)}$

$$f'(x) = \frac{\sin^2(x)}{x\cdot\cos^2(x)} - \frac{\sin(x)}{x^2\cos(x)} + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2\sin^3(x)-x\cos(x)\sin^2(x)+(x^2+1)\cos^2(x)\sin(x)-x\cos^3(x))}{x^3\cos^3(x)}$$

Lösung A2

a) $f'(x) = 6x - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x^3}$

$$f''(x) = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{5}{9x^{\frac{7}{3}}} + 6$$

$$f'''(x) = \frac{28}{27x^{\frac{10}{3}}} - \frac{3}{4x^2}$$

b) $f'(x) = 36x^3 - 8x + 4$

$$f''(x) = 108x^2 - 8$$

$$f'''(x) = 216x$$

c) $f'(x) = 5\cos(x) - 3\sin(x)$

$$f''(x) = -5\sin(x) - 3\cos(x)$$

$$f'''(x) = -5\cos(x) + 3\sin(x)$$

Aufgabenblatt Ableitungen

vermischte Aufgaben

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 4 – Universität – Blatt 1

Lösung A3

$$f(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$u = \sin^2(x)$$

$$u' = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$v = \cos^2(x)$$

$$u' = -2 \sin(x) \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{2 \sin(x) \cos^3(x) + 2 \sin^3(x) \cos(x)}{\cos^4(x)} = \frac{2 \sin(x) \cos^2 x + 2 \sin^3(x)}{\cos^3(x)}$$
$$= \frac{2 \sin(x) (\cos^2 x + \sin^2(x))}{\cos^3(x)} = 2 \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = 2 \tan(x) \cdot \sec^2(x)$$

q.e.d.

$$f'(x) = 2 \tan(x) \cdot \sec^2(x)$$

$$u = 2 \tan(x)$$

$$u' = 2 \sec^2(x)$$

$$v = \sec^2(x)$$

$$u' = 2 \sec^2(x) \tan(x)$$

$$f''(x) = 2 \sec^4(x) + 4 \sec^2(x) \cdot \tan^2(x)$$

q.e.d.