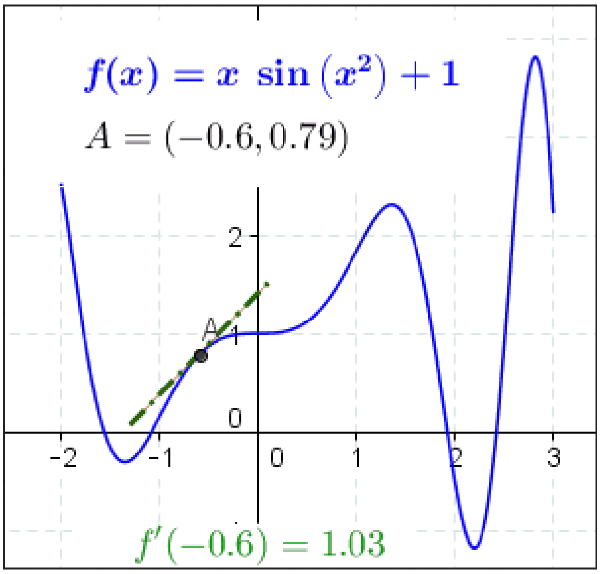
Einleitung

Im Portalbereich „Änderungsraten" haben wir bereits kennengelernt, dass man den Grenzwert des Differenzenquotienten für minimale Δx als Differenzialquotienten bezeichnet und dass dieser Differenzialquotient gleichbedeutend ist mit dem Begriff „Ableitung".
Mittels mathematischer Umformungen haben wir den Differenzenquotienten in den Differenzialquotienten (die Ableitung) in einem bestimmten Punkt des Graphen einer Funktion überführt. Diese mathematischen Umformungen waren mehr oder weniger umständlich.

Nun fragen wir uns natürlich, ob diese umständliche Berechnung nicht einfacher und eleganter erfolgen kann und vor allem nicht in einem ganz bestimmten Punkt, sondern generell für alle Punkte des Graphen einer beliebigen Funktion.

Mit diesem Thema beschäftigen wir uns nun im Portalbereich „Ableitungen" und wir rekapitulieren noch einmal kurz, wie die Ableitung mathematisch formuliert wird.

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0, bezeichnet mit $f'(x_0)$, beschreibt lokal das Verhalten der Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle x_0. Nun wird x_0 nicht die einzige Stelle sein, an der f differenzierbar ist. Man kann daher versuchen, jeder Zahl x aus dem Definitionsbereich von f die Ableitung an dieser Stelle (also $f'(x)$) zuzuordnen. Auf diese Weise erhält wir eine neue Funktion f', deren Definitionsbereich die Menge Ω aller Punkte ist, an denen f differenzierbar ist. Diese Funktion f' heißt die *Ableitungsfunktion* oder kurz die *Ableitung* von f.
Das Berechnen der Ableitung einer Funktion wird *Differenziation* genannt; sprich, man *differenziert* diese Funktion.



Quelle: WIKIPEDIA
[Die Ableitung an verschiedenen Stellen einer differenzierbaren Funktion]

Um die Ableitung elementarer Funktionen (z. B. x^n, $sin(x)$, …) zu berechnen, hält man sich eng an die oben angegebene Definition, berechnet explizit einen Differenzenquotienten und lässt dann Δxgegen Null gehen. In der Schulmathematik wird dies als „h-Methode" bezeichnet. Der typische Mathematikanwender vollzieht diese Berechnung nur ein paar wenige Male in seinem Leben nach. Später kennt er die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen auswendig, schlägt Ableitungen nicht ganz so geläufiger Funktionen in einem Tabellenwerk nach und berechnet die Ableitung zusammengesetzter Funktionen mit Hilfe der *„Ableitungsregeln"*.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Die Ableitung f' einer Funktion f an der Stelle x_0 kann jedoch nur gebildet werden, wenn die Funktion f dort differenzierbar und stetig ist. Mehr hierzu erfährst du im Untermenü „Differenzierbarkeit und Stetigkeit“ (linkes Menü).

Grafisches Differenzieren

Bevor wir uns mit den (rechnerischen) Ableitungsregeln beschäftigen, lernen wir hier, wie man aus dem Graphen einer Funktion f den Graphen ihrer Ableitung f' erhält. Dies ist ins besonders dann erforderlich, wenn zu dem Graphen von f keine Funktionsgleichung $f(x)$ vorliegt. Mehr hierzu erfährst du im Untermenü „Grafisches Differenzieren“ (linkes Menü).

Die Ableitungsregeln

Je nach Art und Ausprägung einer Funktion müssen wir unterschiedliche Ableitungsregeln einsetzen. Diese sind nachfolgend global beschrieben. Mehr zu den Regeln erfährst du in den entsprechenden Untermenüpunkten (linkes Menü).

Die Konstantenregel

Die Konstantenregel besagt, dass Konstanten bei der Ableitung verloren gehen.
Beispiel:

$f(x) = 5$ $\qquad$ $f'(x) = 0$

Die Faktorregel

Die Faktorregel besagt, dass Faktoren bei der Ableitung unverändert beibehalten werden.
Beispiel:

$f(x) = a \cdot x$ $\qquad$ $f'(x) = a$

Die Potenzregel

Bei der Potenzregel (Ableitungsregel für Potenzfunktionen) wird der Exponent von x als Multiplikand vor die Ableitung geschrieben und der Exponent um 1 vermindert.
Beispiel:

$f(x) = x^n$ $\qquad$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Die Summen- bzw. Differenzregel

Die Summen- bzw. Differenzregel besagt, dass bei additiv bzw. subtraktiv zusammengesetzten Funktionen jedes Glied der zusammengesetzten Funktion einzeln abgeleitet wird.
Beispiel:

$f(x) = g(x) + h(x) - i(x)$ $\qquad$ $f'(x) = g'(x) + h'(x) - i'(x)$

Die Produktregel

Sind einzelne Funktionsglieder multiplikativ miteinander verknüpft, so muss für die Ableitung die Produktregel angewandt werden.
Beispiel:

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ $\qquad$ $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$

Die Quotientenregel

Sind einzelne Funktionsglieder mittels Division miteinander verknüpft, so muss für die Ableitung die Quotientenregel angewandt werden.
Beispiel:

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $\qquad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{\left(h(x)\right)^2}$

Die Kettenregel

Sind zwei Funktionen miteinander verkettet, so muss für die Ableitung die Kettenregel angewandt werden.
Beispiel:

$f(x) = g\left(h(x)\right)$ $\qquad f'(x) = g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen lauten:

$f(x) = sin(x)$ $\qquad f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$ $\qquad f'(x) = -sin(x)$
$f(x) = tan(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x)$

Ableitung der Exponentialfunktion

Die Ableitung der Exponentialfunktion lautet:

$f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$ $\qquad f'(x) = a^x \cdot ln(|a|)$

Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Ableitung der Logarithmusfunktion lautet:

$f(x) = ln(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = log_a(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$

Die Umkehrregel

Ist $g(y) = x$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$, so kann für die Ableitung die Umkehrregel angewandt werden.
Beispiel:

Ist $g(y) = x$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ so gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Ableitungstabelle elementarer Funktionen

$f(x)$		$f'(x)$	$f''(x)$
C	$C \in \mathbb{R}, constant$	0	0
x^n	$n \in \mathbb{N}, n > 0$ $n \in \mathbb{Z}, x \neq 0$ $n \in \mathbb{R}, x > 0$	$n \cdot x^{n-1}$	$n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$
$\sqrt{x}$	$x \in \mathbb{R}, x \geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$
$sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$cos(x)$	$-sin(x)$
$cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$-sin(x)$	$-cos(x)$
$tan(x)$	$x \in \mathbb{R}$ $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{cos^2(x)}$ $= 1 + tan^2(x)$	$2tan(x) \cdot (1 + tan^2(x)$
$arcsin(x)$	$x \in [-1; 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$x \in [-1; 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
a^x	$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ $x \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot ln(a)$	$a^x \cdot (ln(a))^2$
e^x	$x \in \mathbb{R}$	e^x	e^x
$log_a(x)$	$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ $x \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$	$-\frac{1}{x^2 \cdot ln(a)}$
$ln(x)$	$x \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$