Aufgabe A1

Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{2x^3-8x}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Gib den maximalen Definitionsbereich von f an.

Untersuche f auf

b) Nullstellen;

c) stetig hebbare Definitionslücken und Polstellen. Sind stetig hebbare Definitionslücken vorhanden, gib die stetig ergänzte Funktion f^* sowie die Lückenwerte an. Untersuche das Vorzeichenverhalten der Polstellen von f.

und errechne

d) eine Asymptoten-Gleichung, mit der das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ beschrieben werden kann.

Lösung A1

Lösungslogik

a) Der Definitionsbereich gebrochen rationaler Funktionen ist $\mathbb{R}$ mit Ausnahme der Definitionslücken. Wir bestimmen die Definitionslücken durch Untersuchung des Nenners auf den Wert 0.

b) Berechnung der Nullstellen durch Setzen des Zählers auf 0. Auflösung nach mit dem Horner-Schema, alternativ Polynomdivision.

c) hebbare Definitionslücken und Pole
Wir bilden die Funktionsgleichung in der Nullstellenform sowie gekürzt als Funktion f_g.
Die verbleibenden Nullstellen des Nenners von f_g sind die Polstellen, die fehlenden Nullstellen von f_g gegenüber f sind hebbare Definitionslücken.
Für den Vorzeichenwechsel der Pole nähern wir uns den Polstellen von f einmal von links und einmal von rechts.
Die stetige Funktion f^* ist eine abschnittsweise definierte Funktion.

d) Asymptoten-Gleichung von f für $x \to |\infty|$.
Wegen de Aufforderung „berechne" kürzen wir die Bruchgleichung mit der höchsten Potenz von x. (Alternativ: Ausklammern der höchsten Potenz von im Zähler und im Nenner).

Klausuraufschrieb

a) Untersuchung des Nenners auf den Wert 0.

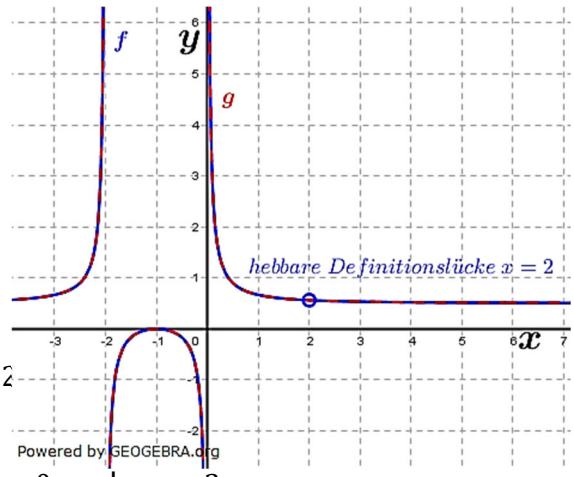
$2x^3 - 8x = 0$ | x ausklammern
$x(2x^2 - 8) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0$
$2x^2 - 8 = 0$
$x^2 = 8$
$x_2 = 2;\ \ x_3 = -2$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$

b) $x^3 - 3x - 2 = 0$
Eine Nullstelle liegt bei $x_0 = -1$
Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 3x - 2 : (x+1) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -x^2 - 3x \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
\qquad -2x - 2 \\
\qquad \underline{-(-2x - 2)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - x - 2 = 0$
$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{0{,}25 + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25} = \frac{1}{2} \pm 1{,}5$
$x_1 = 2;\ \ x_2 = -1$
Die Funktion $x^3 - 3x - 2$ hat die Nullstellen $x_1 = -1;\ \ x_2 = 2$. $x_1 = -1$ ist eine doppelte Nullstelle.

c) *Hebbare Definitionslücken und Pole*
Funktionsterm in Nullstellenform
$f(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot (x-2)}{2x \cdot (x-2) \cdot (x+2)}$
Gekürzter Funktionsterm g
$g(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot \cancel{(x-2)}}{2x \cdot \cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = \frac{(x+1)^2}{2x \cdot (x+2)}$
Verbleibende Definitionslücken von g sind $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.
Die fehlende Definitionslücke von g zu f ist $x_3 = 2$.
Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine hebbare Definitionslücke.



Die Pole von f haben die Gleichungen $x = 0$ und $x = -2$.
Vorzeichenwechsel des Pols $x = -2$
Für $x \to_{\nearrow} -2$ läuft $f(x) \to +\infty$
Für $x \to -2_{\nwarrow}$ läuft $f(x) \to -\infty$
Der Pol $x = -2$ hat VZW von $+$ nach $-$.
Vorzeichenwechsel des Pols $x = 0$
Für $x \to_{\nearrow} 0$ läuft $f(x) \to -\infty$
Für $x \to 0_{\nwarrow}$ läuft $f(x) \to +\infty$
Der Pol $x = 0$ hat VZW von $-$ nach $+$.

Stetige Funktion f^*:
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0{,}563$

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x-2}{2x^3-8x}; & x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\} \\ 0{,}563; & x = 2 \end{cases}$$

d) Kürzen des Bruchs $\frac{x^3-3x-2}{2x^3-8x}$ mit x^3:

$$\frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{8x}{x^3}} = \frac{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{8}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to |\infty|} \frac{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{8}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Die Funktion hat die waagrechte Asymptote $x = \frac{1}{2}$.

<u>Hinweis:</u>
Eigentlich genügt der einfache Hinweis auf die Regel:
Höchster Zählergrad = höchster Nennergrad, somit ist waagrechte Asymptote der Quotient aus den Koeffizienten des höchsten Grades von x im Zähler und des höchsten Grades von x im Nenner. Bei der gegebenen Funktionsgleichung ist dies 1 im Zähler und 2 im Nenner.