Lösung A1

a) *Beweise, dass die Höhe des höchsten Punktes der Bahn unabhängig von t $(t > 0)$ ist.*

Gesucht ist hier der y-Wert des Hochpunkts der Funktion. Ist in diesem kein t mehr enthalten, so ist der Beweis erfolgt.

$f_t(x) = 100t^2x^2 \cdot e^{-tx}$

Produktregel erforderlich:

$u(x) = 100t^2x^2$ $\quad u'(x) = 200t^2x$

$v(x) = e^{-tx}$ $\quad v'(x) = -t \cdot e^{-tx}$

$f_t'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u = 200t^2x \cdot e^{-tx} - t \cdot e^{-tx} \cdot 100t^2x^2 \cdot$

$f_t'(x) = 100t^2x \cdot e^{-tx} \cdot (2 - tx)$

$f_t'(x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$100t^2x \cdot e^{-tx} \cdot (2 - tx) = 0$

$100t^2x \cdot e^{-tx} = 0 \; x_1 = 0$

$2 - tx = 0$

$x_2 = \frac{2}{t}$

$f_t\left(\frac{2}{t}\right) = 100t^2 \frac{4}{t^2} \cdot e^{-t\frac{2}{t}} = 400 \cdot e^{-2} \approx 54{,}13$

Die Höhe des höchsten Punktes der Bahn beträgt etwa $54\,m$ und ist unabhängig von t.

b) *Nachweis, dass die Fahrt nach dem höchsten Punkt ständig abfällt.*

Nachweis über die erste Ableitung, für alle $x > \frac{2}{t}$ kleiner Null sein muss.

$f_t'(x) = 100t^2x \cdot e^{-tx} \cdot (2 - tx)$

Wegen $2 - tx < 0$ für $x > \frac{2}{t}$ ist $f_t'(x) < 0$ für alle $x > \frac{2}{t}$

Die Bahn fällt nach dem höchsten Punkt ständig ab.

c) *t für Steigung der Auffahrt maximal $70\,\%$.*

Maximale Steigungen sind in den Wendepunkten.

$f_t'(x) = 100t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (2x - tx^2)$

$u(x) = 100t^2 \cdot e^{-tx}$ $\quad u'(x) = -100t^3 \cdot e^{-tx}$

$v(x) = 2x - tx^2$ $\quad v'(x) = 2 - 2tx$

$f_t''(x) = -100t^3 \cdot e^{-tx} \cdot (2x - tx^2) + 100t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (2 - 2tx)$

$f_t''(x) = 100t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (-t \cdot (2x - tx^2) + 2 - 2tx)$

$f_t''(x) = 100t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (-2tx + t^2x^2 + 2 - 2tx)$

$f_t''(x) = 100t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (t^2x^2 - 4tx + 2)$

Wendepunkte über $f_t''(x) = 0$

$100t^2 \cdot e^{-tx} \cdot (t^2x^2 - 4tx + 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$t^2x^2 - 4tx + 2 = 0$ | $: t^2$

$x^2 - \frac{4}{t}x + \frac{2}{t^2} = 0$

$x_{1,2} = \frac{2}{t} \pm \sqrt{\frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^2}} = \frac{2}{t} \pm \frac{\sqrt{2}}{t} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{t}$

Da der Wendepunkt der Auffahrt vor dem Wendepunkt der Abfahrt liegt, ist hier die Stelle $x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{t}$ gefragt. Die Steigung der Wendetangente an dieser Stelle soll nicht größer als $70\,\%$.

Wegen $m = \tan(\alpha) = 0{,}7$ muss somit $f_t'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{t}\right) \leq 0{,}7$ sein.

$t^2 \cdot e^{-t\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{t}\right)} \cdot \left(200 \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{t}\right) - 100t \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{t}\right)^2\right) \leq 0{,}7$

$t^2 \cdot e^{\sqrt{2}-2} \cdot \left(\frac{200\cdot(2-\sqrt{2})}{t} - \frac{100\cdot(2-\sqrt{2})^2}{t}\right) \leq 0{,}7$

$t^2 \cdot e^{\sqrt{2}-2} \cdot \frac{400-200\cdot\sqrt{2}-100(4-4\cdot\sqrt{2}+2)}{t} \leq 0{,}7$

$t^2 \cdot e^{\sqrt{2}-2} \cdot \frac{400-200\sqrt{2}-400+400\sqrt{2}-200}{t} \leq 0{,}7$

$t \cdot e^{\sqrt{2}-2} \cdot \left(200\sqrt{2} - 200\right) \leq 0{,}7$

$t \cdot 200e^{\sqrt{2}-2}\left(\sqrt{2} - 1\right) \leq 0{,}7$

$t \leq \frac{0{,}7}{200(\sqrt{2}-1)\cdot e^{\sqrt{2}-2}}$

$t \leq 0{,}0152$

Für $t \leq 0{,}015$ ist die Auffahrt nicht steiler als $70\,\%$.

Lösung A2

a) *Gemeinsamkeiten der Funktionsschar:*

a.1) Alle Graphen verlaufen durch den Ursprung.

a.2) Alle Graphen haben die -Achse als gemeinsame Asymptote.

a.3) Sie verlaufen aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten.

a.4) Sie haben im III. Quadranten einen Tief- und im I. Quadranten einen Hochpunkt.

b) *Symmetrieuntersuchungen:*

$f_a(-x) = (-x) \cdot e^{-a(-x)^2} = -x \cdot e^{-ax^2} \neq f_a(x)$

Keine Achsensymmetrie.

$-f_a(-x) = -\left(-x \cdot e^{-ax^2}\right) = x \cdot e^{-ax^2} = f_a(x)$

Der Graph der Funktion verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) *Asymptoten:*

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-ax^2} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = 0$

Die waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = 0$.

d) Extrempunkte und Wendestellen:

1. Ableitung: Produktregel erforderlich:

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{-ax^2} \qquad v'(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2}$

$f_a'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u = e^{-ax^2} - 2ax^2 \cdot e^{-ax^2}$

$f_a'(x) = e^{-ax^2} \cdot (1 - 2ax^2)$

2. Ableitung: Produktregel erforderlich:

$u(x) = e^{-ax^2} \qquad u'(x) = -2ax \cdot e^{-ax^2}$

$v(x) = 1 - 2ax^2 \qquad v'(x) = -4ax$

$f_a''(x) = u' \cdot v + v' \cdot u = -2ax \cdot e^{-ax^2}(1 - 2ax^2) - 4ax \cdot e^{-ax^2}$

$f_a''(x) = 2a \cdot e^{-ax^2} \cdot (-x(1 - 2ax^2) - 2x))$

$f_a''(x) = 2a \cdot e^{-ax^2}(2ax^3 - 3x)$

Extrempunkte über $f_t'(x) = 0$

$e^{-ax^2} \cdot (1 - 2ax^2) = 0 \qquad |$ Satz vom Nullprodukt

$x^2 = \frac{1}{2a}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}}$

$f_a\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot e^{-a\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2} = \frac{e^{-a\cdot\frac{1}{2a}}}{\sqrt{2a}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a\cdot e}}$

$f_a\left(-\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot e^{-a\left(-\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2a\cdot e}}$

$f_a''\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = -2a \cdot e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{6}{\sqrt{2a}} + \frac{1}{2a}\right) < 0$ => Hochpunkt.

$f_a''\left(-\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = -2a \cdot e^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{6}{\sqrt{2a}} + \frac{1}{2a}\right) > 0$ => Tiefpunkt.

$HP\left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| \frac{1}{\sqrt{2a\cdot e}}\right)$ $HP\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}} \middle| -\frac{1}{\sqrt{2a\cdot e}}\right)$

Wendepunkte über $f_t''(x) = 0$

$2a \cdot e^{-ax^2}(2ax^3 - 3x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$2ax^3 - 3x = 0$

$x(2ax^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0$

$2ax^2 - 3 = 0$

$x^2 = \frac{3}{2a}$

$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2a}}$

$f_a(0) = 0 \cdot e^{-a\cdot 0} = 0$

$f_a\left(\sqrt{\frac{3}{2a}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot e^{-a\left(\sqrt{\frac{3}{2a}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot e^{-\frac{3}{4}}$

$f_a\left(-\sqrt{\frac{3}{2a}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot e^{-a\left(-\sqrt{\frac{3}{2a}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot e^{-\frac{3}{4}}$

$WP_1(0|0)$ $WP_2\left(\sqrt{\frac{3}{2a}} \middle| \sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot e^{-\frac{3}{4}}\right)$ $WP_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2a}} \middle| -\sqrt{\frac{3}{2a}} \cdot e^{-\frac{3}{4}}\right)$

e) Ortskurve der Hochpunkte:

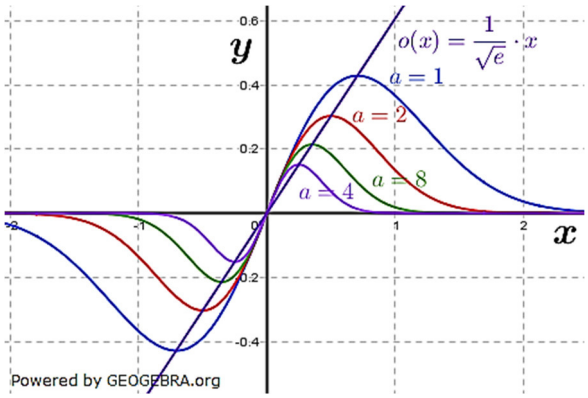
$x_{HP} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ | $\cdot\sqrt{2a}$

$x_{HP} \cdot \sqrt{2a} = 1$ | $:x_{HP}$

$\sqrt{2a} = \frac{1}{x_{HP}}$ | ^{2}

$2a = \frac{1}{x_{HP}^2}$ | $:2$

$a = \frac{1}{2x^2}$

$a \to y_{HP}$

$o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2x^2}\cdot e}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{e}{x^2}}} = \sqrt{\frac{x^2}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}x$