

Aufgabe A1

- a) Bestimme die Nullstellen der nachfolgenden Funktionen:
 1) $f(x) = 2x^4 - 12$ 2) $f(x) = -x^3 - 54$
 3) $f(x) = x^4 + 1$
- b) Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = (x^3 - 125)(x^2 - 2x - 63)$
- c) Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^5 - 4x^3 - 5x$.
- d) Gib drei Beispiele von Funktionen verschiedener Grade mit genau den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ an. Skizziere die Graphen.



Aufgabe A2

Prüfe, ob x_1 eine Nullstelle ist.

- a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9$; $x_1 = -1$ b) $f(x) = x^2(x^2 - 6) + 8$; $x_1 = 2$
 c) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 34$; $x_1 = -2$ d) $f(x) = -0,5x^5 - 1,5x^3 + x - 1,7$; $x_1 = -\frac{2}{3}$

Aufgabe A3

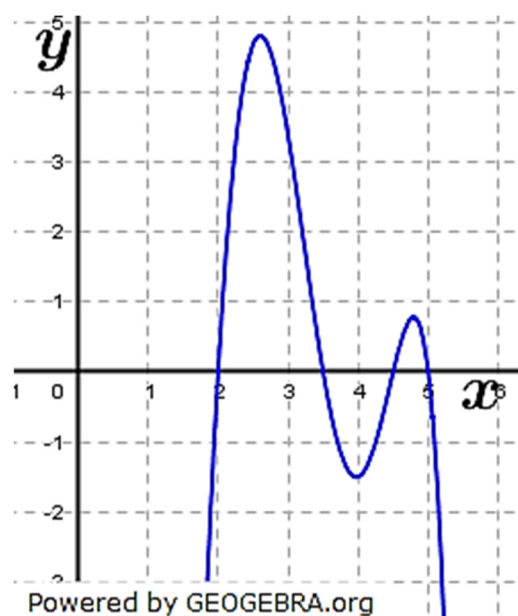
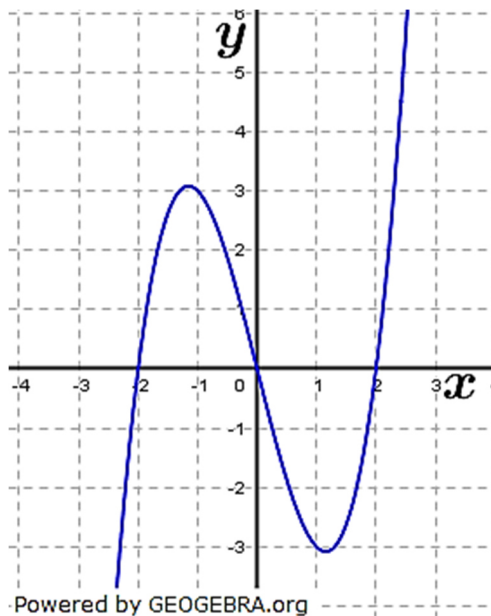
Gib die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen nachfolgender Funktionen an:

- a) $f(x) = 3(x + 5)(x - 3)(x - 4)$ b) $f(x) = -x(x + 1,5)(x - 1,5)(x + 4)$
 c) $f(x) = x(x^4 + 1)$ d) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$
 e)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
y	1,75	0	0	-0,5	-2,25	-4,5	-5	0	15,75

f)

g)



Aufgabe A4

Gib die Koordinaten der Achsenschnittpunkte der Graphen an.

- a) $f(x) = x^4 - 81$ b) $f(x) = 2x^3 - 18$
 c) $f(x) = -1,5x^3 + 12$ d) $f(x) = -5x^4 - 500$
 e) $f(x) = 50 - 2x^4$ f) $f(x) = x^6 + 74$

Aufgabe A5

Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit den Koordinatenachsen.

a) $f(x) = x^3 - 16x$

b) $f(x) = -2x^4 + 18x^2$

c) $f(x) = x^3 + 2x$

d) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$

e) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$

f) $f(x) = -4x^3 + 32x^2 - 36x$

Aufgabe A6

Löse die Gleichungen mithilfe einer Substitution.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

b) $2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$

c) $3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$

d) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$

e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$

f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

Aufgabe A7

Berechne die Nullstellen der Funktionen.

a) $f(x) = 2x^4 - 12$

b) $f(x) = 5(x - 1)(x + 3)(x - 4)$

c) $f(x) = x(x + 2)(x^2 - 3)$

d) $f(x) = -7x(x^2 + 6x + 9)$

e) $f(x) = x^4 - 41x^2 + 180$

f) $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 4)$

Aufgabe A8

Gib zwei ganzrationale Funktionen an, die

a) die Nullstellen 0, 2 und 5 haben.

b) die Nullstellen 0, $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$ haben.

c) den Grad 3 und die Nullstelle 2 haben.

d) Den Grad 3, die Nullstellen -2 und 3 haben sowie die y -Achse in $S_y(0|4)$ schneiden.

Lösung A1

Lösungshilfe:

Verwende die nachfolgenden Nullstellenverfahren:

- Wurzelziehen
- Satz vom Nullprodukt
- Potenzen von x ausklammern sowie Substitution
- Linearfaktorzerlegung

Klausuraufschrieb:

a1) $f(x) = 2x^4 - 12$

$$2x^4 - 12 = 0$$

$$x^4 = 6$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{6}$$

a2) $f(x) = -x^3 - 54$

$$-x^3 - 54 = 0$$

$$x^3 = -54$$

$$x = -\sqrt[3]{54}$$

a3) $f(x) = x^4 + 1$

$$x^4 + 1 = 0$$

$$x^4 = -1$$

$$\mathbb{L} = \{\}$$

$$\begin{array}{|l} -12; : 2 \\ \sqrt[4]{} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} +x^3 \\ \sqrt[3]{} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} -1 \\ \text{keine Lösung} \end{array}$$

b) $f(x) = (x^3 - 125)(x^2 - 2x - 63)$

$$(x^3 - 125)(x^2 - 2x - 63) = 0$$

$$x^3 - 125 = 0$$

$$x_1 = 5$$

$$x^2 - 2x - 63$$

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 + 63} = 1 \pm 8$$

$$x_2 = 9; \quad x_3 = -7$$

$$\begin{array}{|l} \text{Satz vom Nullprodukt} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} p/q\text{-Formel} \end{array}$$

c) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 5x$

$$x^5 - 4x^3 - 5x = 0$$

$$x(x^4 - 4x^2 - 5) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$$

$$z^2 - 4z - 5 = 0$$

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3$$

$$z_1 = 5; \quad z_2 = -1$$

$$\begin{array}{|l} \text{Potenz von } x \text{ ausklammern} \\ \text{Satz vom Nullprodukt} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \text{Substitution } x^2 = z \\ p/q\text{-Formel} \end{array}$$

$$x^2 = z_1 = 5$$

$$x_2 = \sqrt{5}; \quad x_3 = -\sqrt{5}$$

$$x^2 = z_2 = -1$$

$$x^2 = -1$$

$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}\}$$

$$\begin{array}{|l} \text{Resubstitution} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \text{Resubstitution} \\ \text{keine Lösung} \end{array}$$

d) Beispiel 1 quadratische Funktion:

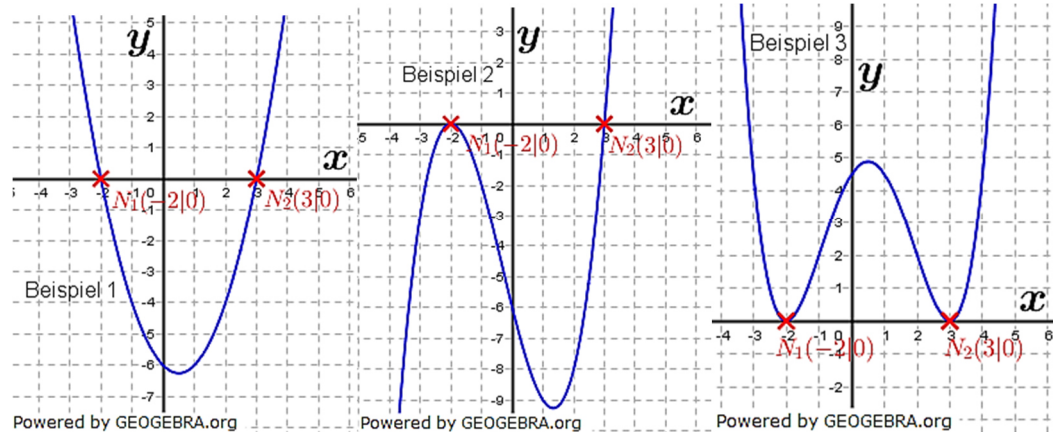
$$f_1(x) = (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$

Beispiel 2 ganzrational 3. Grades

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-3) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$$

Beispiel 3 ganzrational 4. Grades

$$f_3(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-3)^2 = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$



Lösung A2

Lösungshilfe

Wir prüfen, ob $f(x_1) = 0$ ist.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9$; $x_1 = -1$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 6(-1)^2 + 9 = -3 - 6 + 9 = 0$$

$x_1 = -1$ ist Nullstelle von f .

b) $f(x) = x^2(x^2 - 6) + 8$; $x_1 = 2$

$$f(2) = 2^2(2^2 - 6) + 8 = 4 \cdot (-2) + 8 = 0$$

$x_1 = 2$ ist Nullstelle von f .

c) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 34$; $x_1 = -2$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - 2 + 34 = -16 + 8 - 2 + 34 = 24 \neq 0$$

$x_1 = -2$ ist keine Nullstelle von f .

d) $f(x) = -0,5x^5 - 1,5x^3 + x - 1,7$; $x_1 = -\frac{2}{3}$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -0,5\left(-\frac{2}{3}\right)^5 - 1,5\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} - 1,7 = \frac{1}{243} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 1,7 \approx -2,25 \neq 0$$

$x_1 = -\frac{2}{3}$ ist keine Nullstelle von f .

Lösung A3

Lösungshilfe:

Teilaufgaben a) bis d):

Verwende die Linearfaktorzerlegung.

Teilaufgabe e);

Lies die Werte aus der Tabelle ab.

Teilaufgabe f) und g)

Bestimme die Werte über die Grafik.

Klausuraufschrieb:

- a) $f(x) = 3(x+5)(x-3)(x-4)$
 $x_1 = -5; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 4$
 $S_y(0|180)$ wegen $3 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot (-4) = 180$
- b) $f(x) = -x(x+1,5)(x-1,5)(x+4)$
 $x_1 = 0; \quad x_2 = -1,5; \quad x_3 = 1,5; \quad x_4 = -4$
 $S_y(0|9)$ wegen $-(1,5 \cdot (-1,5) \cdot 4) = 9$
- c) $f(x) = x(x^4 + 1)$
 $x_1 = 0$; der Faktor $(x^4 + 1)$ kann nicht 0 werden.
 $S_y(0|0)$
- d) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$
 Diese Funktion hat keine Nullstellen, die einzelnen Faktoren können nicht 0 werden.
 $S_y(0|6)$ wegen $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- e) Nullstellen (aus Tabelle)
 $x_1 = -2,5; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 0,5$
 $S_y(0|-5)$ aus Tabelle
- f) Nullstellen (aus Grafik)
 $x_1 = -2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2$
 $S_y(0|0)$ aus Grafik
- g) Nullstellen (aus Grafik)
 $x_1 = 2; \quad x_2 = 3,5; \quad x_3 = 4,5; \quad x_4 = 5$
 Schnittpunkt mit der y-Achse nicht ablesbar.

Lösung A4

Lösungshilfe:

Verwende für alle Teilaufgaben die Nullstellenberechnung durch Wurzelziehen.

Klausuraufschrieb:

Detaillierte Lösung für

- a) $f(x) = x^4 - 81$
 $x^4 - 81 = 0$ | +81
 $x^4 = 81$ | $\sqrt[4]{}$
 $x_1 = 3; \quad x_2 = -3$
 $S_y(0|-81)$
- b) $x_1 = \sqrt[3]{9}; \quad S_y(0|-18)$
- c) $x_1 = 2; \quad S_y(0|12)$
- d) keine Nullstelle wegen negativer Wurzel; $S_y(0|-500)$
- e) $x_1 = -\sqrt[4]{25}; \quad x_2 = \sqrt[4]{25}; \quad S_y(0|50)$
- f) keine Nullstelle wegen negativer Wurzel; $S_y(0|74)$

Lösung A5

Lösungshilfe:

Verwende für alle Teilaufgaben die Nullstellenberechnung durch Ausklammern von Potenzen von x .

Klausuraufschrieb:

- a) $f(x) = x^3 - 16x$
 $x^3 - 16x = 0$ | x ausklammern
 $x(x^2 - 16) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = 4$
 $S_y(0|0)$
- b) $f(x) = -2x^4 + 18x^2$
 $-2x^4 + 18x^2 = 0$ | x^2 ausklammern
 $x^2(-2x^2 + 18) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_{1,2} = 0; \quad x_3 = -3; \quad x_4 = 3$
 $S_y(0|0)$
- c) $f(x) = x^3 + 2x$
 $x^3 + 2x = 0$ | x ausklammern
 $x(x^2 + 2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0$
 $S_y(0|0)$
- d) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
 $3x^3 + 3x^2 - 18x = 0$ | $3x$ ausklammern
 $3x(x^2 + x - 6) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0$
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $x_{2,3} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6} = -0,5 \pm 2,5$ | p/q -Formel
 $x_2 = 2; \quad x_3 = -3$
 $S_y(0|0)$
- e) $f(x) = x^5 - 10x^4 + 25x^3$
 $x^5 - 10x^4 + 25x^3 = 0$ | x^3 ausklammern
 $x^3(x^2 - 10x + 25) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0$
 $x^2 - 10x + 25 = 0$
 $x_{2,3} = 5 \pm \sqrt{25 - 25} = 5$ | p/q -Formel
 $x_2 = 5$
 $S_y(0|0)$
- f) $f(x) = -4x^3 + 32x^2 - 36x$
 $-4x^3 + 32x^2 - 36x = 0$ | $-4x$ ausklammern
 $-4x(x^2 - 8x + 9) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0$
 $x^2 - 8x + 9 = 0$
 $x_{2,3} = 4 \pm \sqrt{16 - 9} = 4 \pm \sqrt{7}$ | p/q -Formel
 $x_2 = 4 + \sqrt{7}; \quad x_3 = 4 - \sqrt{7}$
 $S_y(0|0)$

Lösung A6

Lösungshilfe:

Verwende für alle Teilaufgaben die Nullstellenberechnung durch Substitution.

Klausuraufschrieb:

- a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
 $z^2 - 20z + 64 = 0$
 $z_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6$ | p/q -Formel
 $z_1 = 16; z_2 = 4$
 $x^2 = z_1 = 16$ | Resubstitution 1
 $x_1 = -4; x_2 = 4$
 $x^2 = z_2 = 4$ | Resubstitution 2
 $x_1 = -2; x_2 = 2$
 $\mathbb{L} = \{-4; -2; 2; 4\}$
- b) $2x^4 - 8x^2 - 90 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
 $2z^2 - 8z - 90 = 0$ | :2
 $z^2 - 4z - 45 = 0$
 $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm 7$ | p/q -Formel
 $z_1 = 9; z_2 = -45$
 $x^2 = z_1 = 9$ | Resubstitution 1
 $x_1 = -3; x_2 = 3$
 $x^2 = z_2 = -45$ | Resubstitution 2
keine Lösung
 $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$
- c) $3x^4 + 90x^2 - 93 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
 $3z^2 + 90z - 93 = 0$ | :3
 $z^2 + 30z - 31 = 0$
 $z_{1,2} = -15 \pm \sqrt{225 + 31} = -15 \pm 16$ | p/q -Formel
 $z_1 = 1; z_2 = -31$
 $x^2 = z_1 = 1$ | Resubstitution 1
 $x_1 = -1; x_2 = 1$
 $x^2 = z_2 = -31$ | Resubstitution 2
keine Lösung
 $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$
- d) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} = 0$ | Substitution $x^2 = z$
 $z^2 + \frac{4}{9}z - \frac{13}{9} = 0$
 $z_{1,2} = -\frac{2}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{13}{9}} = -\frac{2}{9} \pm \frac{11}{9}$ | p/q -Formel
 $z_1 = 1; z_2 = -\frac{13}{9}$
 $x^2 = z_1 = 1$ | Resubstitution 1
 $x_1 = -1; x_2 = 1$
 $x^2 = z_2 = -\frac{13}{9}$ | Resubstitution 2
keine Lösung
 $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

- e) $x^4 + 16 - 17x^2 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
 $z^2 - 17z + 16 = 0$
 $z_{1,2} = 8,5 \pm \sqrt{72,25 - 16} = 8,5 \pm 7,5$ | p/q -Formel
 $z_1 = 16; \quad z_2 = 1$
 $x^2 = z_1 = 16$ | Resubstitution 1
 $x_1 = -4; \quad x_2 = 4$
 $x^2 = z_2 = 1$ | Resubstitution 2
 $x_3 = -1; \quad x_4 = 1$
 $\mathbb{L} = \{-4; -1; 1; 4\}$
- f) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$ | Substitution $x^3 = z$
 $z^2 - 10z + 9 = 0$
 $z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$ | p/q -Formel
 $z_1 = 9; \quad z_2 = 1$
 $x^3 = z_1 = 9$ | Resubstitution 1
 $x_1 = \sqrt[3]{9}$
 $x^3 = z_2 = 1$ | Resubstitution 2
 $x_2 = 1$
 $\mathbb{L} = \{1; \sqrt[3]{9}\}$

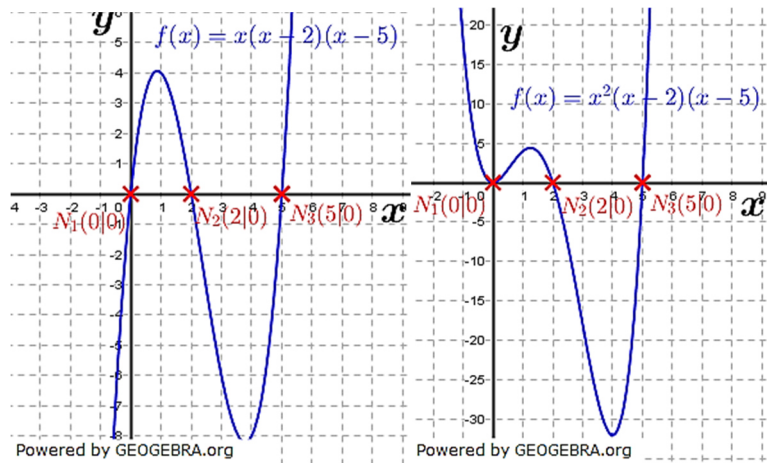
Lösung A7

- a) $f(x) = 2x^4 - 12$
 $2x^4 - 12 = 0$ | $+12; :2$
 $x^4 = 6$ | $\sqrt[4]{1}$
 $x_1 = \sqrt[4]{6}; \quad x_2 = -\sqrt[4]{6}$
- b) $f(x) = 5(x-1)(x+3)(x-4)$
 $5(x-1)(x+3)(x-4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 4$
- c) $f(x) = x(x+2)(x^2-3)$
 $x(x+2)(x^2-3) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = \sqrt{3}; \quad x_4 = -\sqrt{3}$
- d) $f(x) = -7x(x^2 + 6x + 9)$
 $-7x(x^2 + 6x + 9) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0$
 $x_1 = 0$ ist einzige Lösung, den $x^2 + 6x + 9$ kann nicht Null werden.
- e) $f(x) = x^4 - 41x^2 + 180$
 $x^4 - 41x^2 + 180 = 0$ | Substitution $x^2 = z$
 $z^2 - 41z + 180 = 0$
 $z_{1,2} = 20,5 \pm \sqrt{420,25 - 180} = 20,5 \pm 15,5$ | p/q -Formel
 $z_1 = 36; \quad z_2 = 5$
 $x^2 = z_1 = 36$ | Resubstitution 1
 $x_1 = -6; \quad x_2 = 6$
 $x^2 = z_2 = 5$ | Resubstitution 2
 $x_3 = -\sqrt{5}; \quad x_4 = \sqrt{5}$
 $\mathbb{L} = \{-6; -\sqrt{5}; \sqrt{5}; 6\}$
- f) $f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 4)$
 $(x^4 - 1)(x^2 + 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = -1; \quad x_2 = 1$
 x_1 und x_2 sind einzige Lösungen, den $(x^2 + 4)$ kann nicht Null werden.

Lösung A8

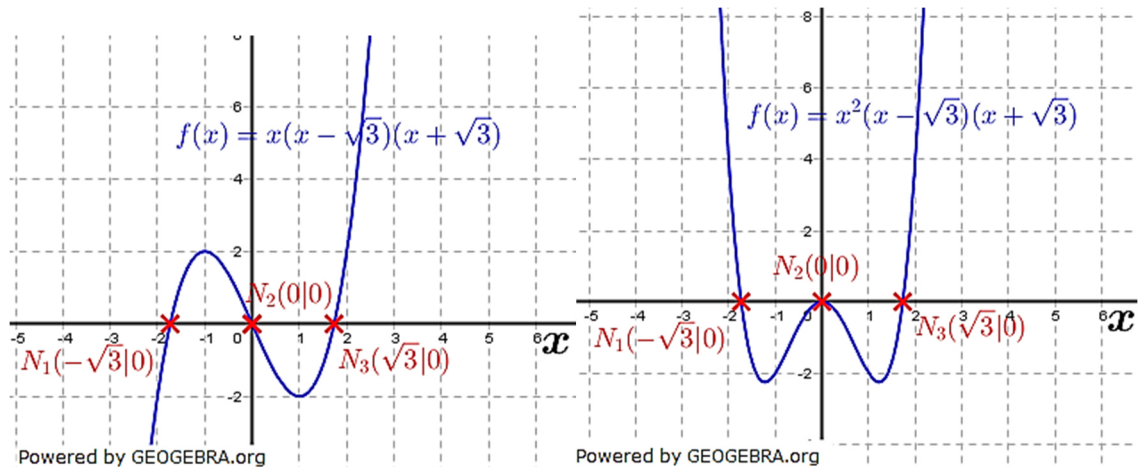
a) $f_1(x) = x(x-2)(x-5)$

$f_2(x) = x^2(x-2)(x-5)$



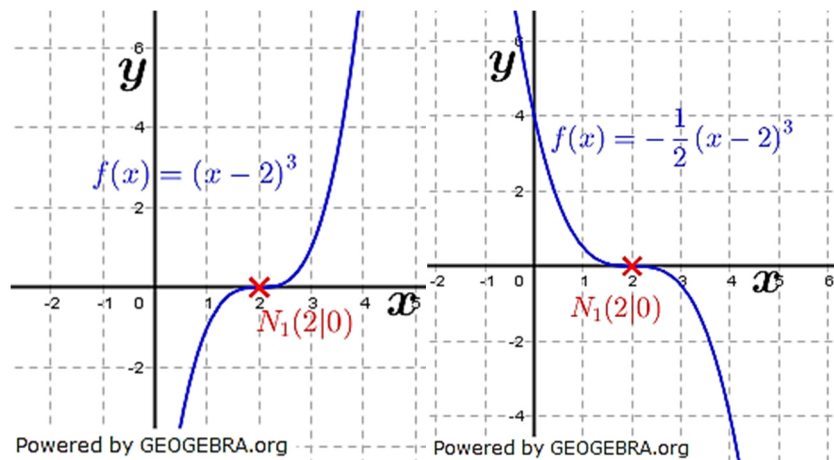
b) $f_1(x) = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

$f_2(x) = x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$



c) $f_1(x) = (x-2)^3$

$f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^3$



Level 1 – Grundlagen – Blatt 3

d) $f_1(x) = -\frac{1}{3}(x+2)^2(x-3)$ $f_2(x) = \frac{2}{9}(x+2)(x-3)^2$

