Aufgabe A1

Für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx;\ x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f_t ist K_t. Betrachte Schaubilder für positive und negative Werte von t.
Wie unterscheiden sich die Schaubilder für negative Werte von t von denen für positive Werte von t? Gib gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an. Skizziere zwei Schaubilder.

Aufgabe A2

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -x^3 + tx^2;\ x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f_t ist K_t.

a) Gib gemeinsame Eigenschaften der Schaubilder an. Skizziere zwei Schaubilder.

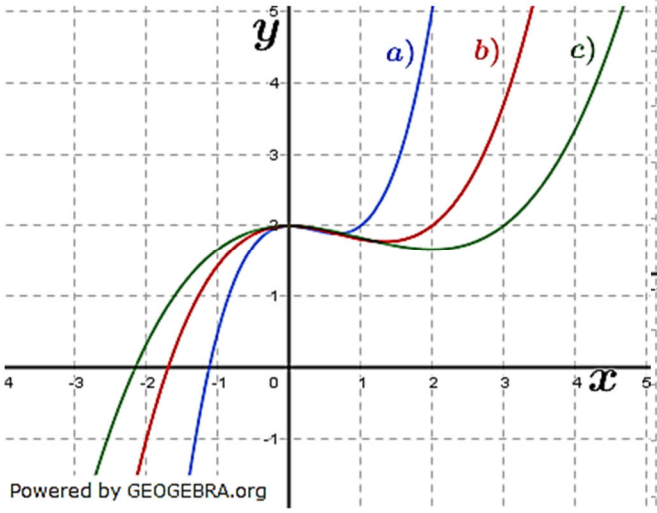
b) Die Gerade g hat die Gleichung $y = mx$. Zeige, dass es nur ein positives m gibt, sodass g und K_3 genau zwei gemeinsame Punkte besitzen. Gib deren Koordinaten an.

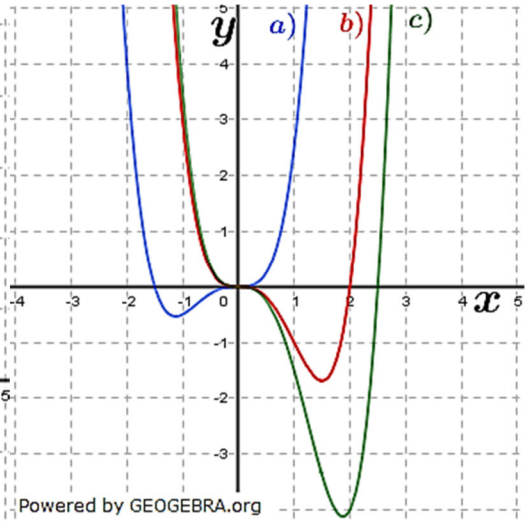
Aufgabe A3

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ die Funktion f_t. Die Abbildung zeigt das Schaubild K_t für einige Werte von t. Ordne jeder Kurve einen Parameterwert zu.

I) $f_t(x) = \frac{3}{t^2}x^3 - \frac{3}{2t}x^2 + 2$

II) $f_t(x) = x^4 - \frac{t}{2}x^3$





Aufgabe A4

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Funktion f_t mit

$$f_t(x) = (x - t)(x^2 - 5x - t);\ x \in \mathbb{R}.$$

Wie muss t gewählt werden, damit das Schaubild K_t von f_t mit der x–Achse genau zwei gemeinsame Punkte hat.

Aufgabe A5

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ die Funktion f_t mit

$$f_t(x) = \frac{1}{16t}x^4 - x^2 + t + 6;\ x \in \mathbb{R}.$$

K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Für welchen Wert von t verläuft K_t durch den Punkt $D(-1|4{,}5)$?

b) Zeichne K_3.
Die Punkte $P(u|f_3(u))$, $Q(-u|f_3(-u))$ und $O(0|0)$ sind für $0 < u < 3$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimme den Flächeninhalt $A(u)$ und den u–Wert, sodass $A(u) = 10$ ist.

c) Die Parabel G ist das Schaubild von g mit $g(x) = 6 - 0{,}5x^2;\ x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass sich K_t und G für alle $t > 0$ berühren. Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.

Aufgabe A6

K_t ist für jedes $t > 0$ das Schaubild von f_t mit

$$f_t(x) = \frac{1}{4}(x-t)(x+t)(x-2t);\ x \in \mathbb{R}.$$

Welche Eigenschaften von K_t kann man dem Funktionsterm entnehmen?

Aufgabe A7

Gegeben ist für jedes $t > 0$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 - 2x^2 + t;\ x \in \mathbb{R}$.

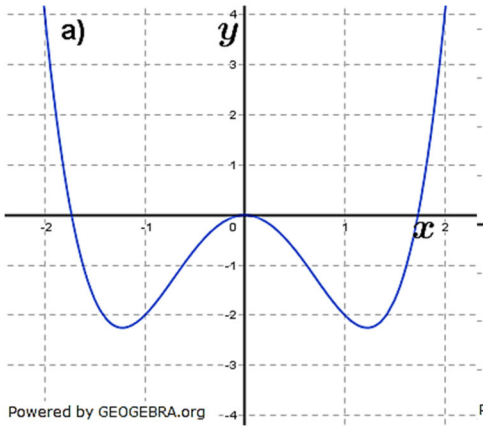
K_t ist das Schaubild von f_t.

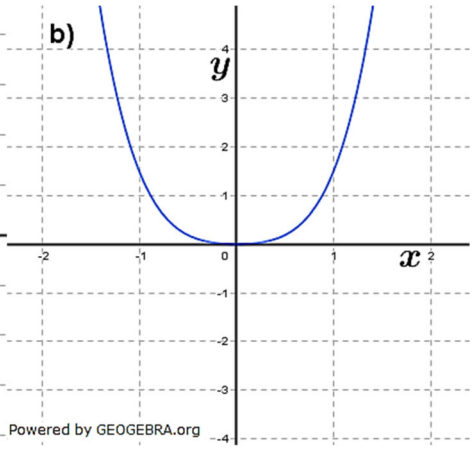
a) Untersuchen Sie K_t auf Achsenschnittpunkte. Geben Sie gemeinsame Eigenschaften an. Zeichnen Sie K_3.

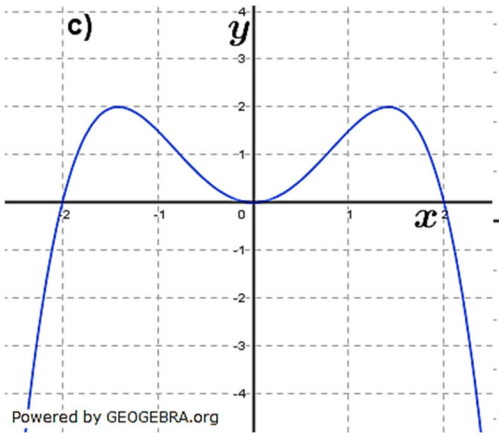
b) Die Parallel zur x–Achse durch den Schnittpunkt von K_t mit der y–Achse schneidet K_t in zwei weiteren Punkten. Berechnen Sie deren Koordinaten.

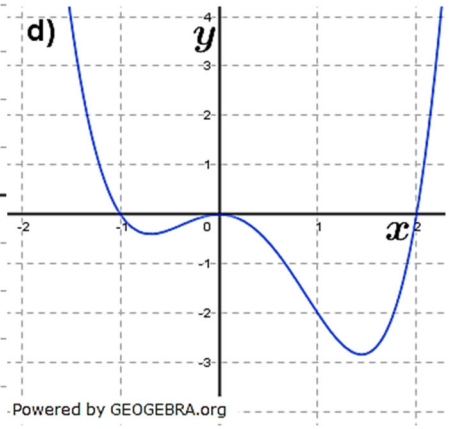
Aufgabe A8

Die vier Abbildungen zeigen drei Schaubilder von Funktinen, die zum Typ $f(x) = ax^4 + bx^2$ gehören. Machen Sie Aussagen über a und b $(a, b \neq 0)$. Welches Schaubild lässt sich nicht zuordnen? Begründe.



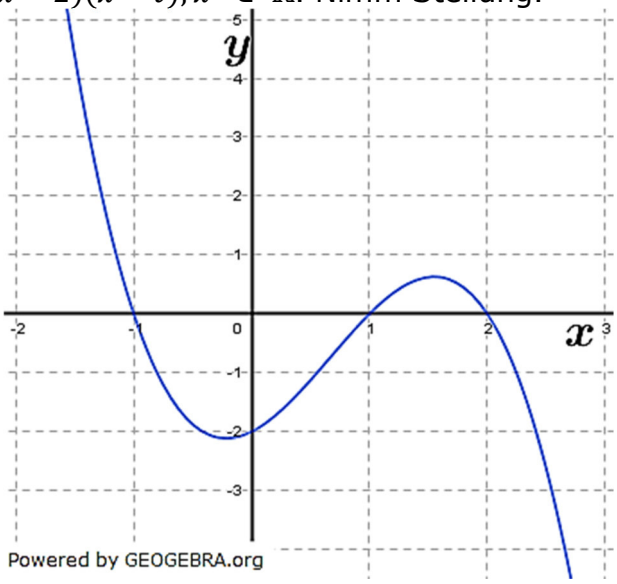






Aufgabe A9

Die nachfolgende Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = 0{,}1(x^2 - 1)(x - 2)(x - t); x \in \mathbb{R}$. Nimm Stellung.



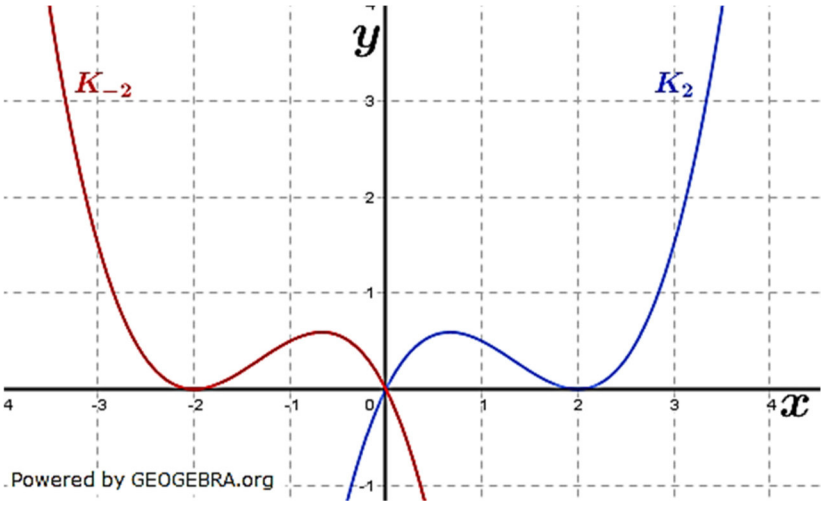
Lösung A1

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2x^2 + tx$

Für positive t verläuft der Graph der Funktion aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten. Der Graph hat eine einfache Nullstelle im Ursprung und eine doppelte Nullstelle mit positivem x-Wert.

Für negative t verläuft der Graph der Funktion aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten. Der Graph hat eine einfache Nullstelle im Ursprung und eine doppelte Nullstelle mit negativem x-Wert.

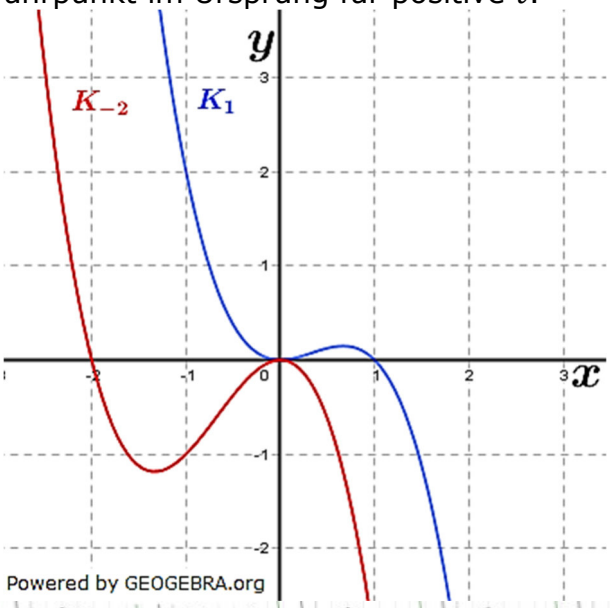
K_{-t} ist die Spiegelung von K_t an der y-Achse.



Lösung A2

$f_t(x) = -x^3 + tx^2;\ x \in \mathbb{R}$

a) Jedes Schaubild verläuft aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten, hat für $t \neq 0$ einen Berührpunkt mit der x–Achse im Ursprung und einen weiteren Schnittunkt in $x = t$. Für $t = 0$ hat das Schaubild eine dreifache Nullstelle ím Ursprung. Der Hochpunkt ist Berührpunkt im Ursprung für negative t. Der Tiefpunkt ist Berührpunkt im Ursprung für positive t.



b) Schnittpunkte mit $g(x) \cap f_3(x)$

$-x^3 + 3x^2 = mx \Longrightarrow -x(x^2 - 3x + m) = 0$

$x_1 = 0 \ \vee (x^2 - 3x + m) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - m}$ | p/q-Formel

Wenn neben dem Schnittpunkt im Ursprung nur noch ein einziger gemeinsamer Punkt vorhanden sein soll, so muss der Ausdruck unter der Wurzel 0 werden. Damit ist $m = \frac{9}{4}$ die gesuchte Steigung. Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_1(0|0)$ und $S_1\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{27}{8}\right)$.

Lösung A3

a) Graph a): Punktprobe mit $(1|2)$ ergibt $t = 2$
Graph b): Punktprobe mit $(2|2)$ ergibt $t = 4$
Graph c): Punktprobe mit $(3|2)$ ergibt $t = 6$

b) Bestimmung von t nur über die Nullstellen möglich.

$f_t(x) = x^4 - \frac{t}{2}x^3 = x^3(x - \frac{t}{2})$

Dreifache Nullstelle in $x_{1,2,3} = 0$ und einfache Nullstelle in $x_4 = \frac{t}{2}$.

Graph a): Nullstelle in $(-1{,}5|0)$ ergibt $t = -3$
Graph b): Nullstelle in $(2|0)$ ergibt $t = 4$
Graph c): Nullstelle in $(2{,}5|0)$ ergibt $t = 5$

Lösung A4

$f_t(x) = (x - t)(x^2 - 5x - t);\ x \in \mathbb{R}$

$(x - t) = 0 \ \vee (x^2 - 5x - t) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = t$

$x_{2,3} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + t}$ | p/q-Formel

1. Fall: $t = 0$ ergibt zwei gemeinsame Punkte in $x_{1,2} = 0$ und $x_2 = 5$.
2. Fall: $t = -6{,}25$ ergibt zwei gemeinsame Punkte in $x_1 = -6{,}25$ und $x_{2,3} = 2{,}5$.
3. Fall: $t = 6$ ergibt zwei gemeinsame Punkte in $x_1 = -1$ und $x_{2,3} = 6$.

Für $t \in \{-6{,}25; 0; 6\}$ hat das Schaubild K_t von f_t mit der x–Achse genau zwei gemeinsame Punkte.

Lösung A5

$f_t(x) = \frac{1}{16t}x^4 - x^2 + t + 6;\ x \in \mathbb{R}$

a) Punktprobe mit $D(-1|4{,}5)$ liefert:

$4{,}5 = \frac{1}{16t} - 1 + t + 6$ | $\cdot 16t$

$72t = 1 - 16t + 16t^2 + 96t$ | $-72t$

$16t^2 - 8t + 1 = 0$ | $:16$

$t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{16} = 0$

$t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{16}}$ | p/q-Formel

Es gibt nur eine Lösung mit $t = \frac{1}{4}$.

b) Flächeninhalt eines Dreiecks:

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$c = 2u \quad h_c = f_3(u)$

$A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot f_3(u)$

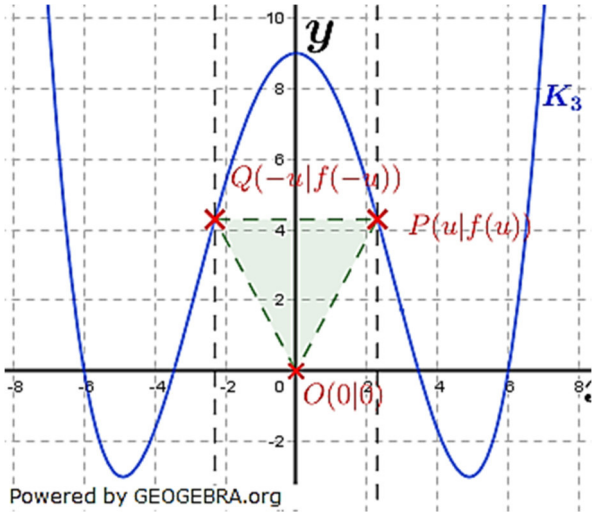
$A(u) = u(\frac{1}{48}u^4 - u^2 + 9)$

$A(u) = \frac{1}{48}u^5 - u^3 + 9u$

$A(u) = 10$

$\frac{1}{48}u^5 - u^3 + 9u - 10 = 0$

Per WTR ermitteln wir $u_1 = 1{,}41$ und $u_2 = 2{,}27$.



c) Berührpunkte mit $g(x) \cap f_t(x)$.

$\frac{1}{16t}x^4 - x^2 + t + 6 = 6 - 0{,}5x^2$

$\frac{1}{16t}x^4 - 0{,}5x^2 + t = 0$

$\frac{1}{16t}z^2 - 0{,}5z + t = 0$ | Substitution: $z = x^2$

$z^2 - 8tz + 16t^2 = 0$

$z_{1,2} = 4t \pm \sqrt{16t^2 - 16t^2}$

$z_1 = 4t$ | Wegen $D = 0$ Berührpunkte

$x^2 = 4t \implies x_{1,2} = \pm 2 \cdot \sqrt{t}$ | Resubstitution

Berührpunkte sind $B_1(2 \cdot \sqrt{t}|6 - 2t)$ und $B_1(-2 \cdot \sqrt{t}|6 - 2t)$.

Lösung A6

K_t ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten verläuft und 3 einfache Nullstellen aufweist in $x_1 = t$, $x_2 = -t$ und $x_3 = 2t$.

Lösung A7

a) Schnittpunkt mit der y–Achse in $S_y(0|t)$.

Schnittpunkte mit der x–Achse: $f_t(x) = 0$

$\frac{1}{t}x^4 - 2x^2 + t = 0$ | $\cdot t$

$x^4 - 2tx^2 + t^2 = 0$

$z^2 - 2tz + t^2 = 0$ | Substitution: $z = x^2$

$z_{1,2} = t \pm \sqrt{t^2 - t^2}$ | Wegen $D = 0$ sind dies Berührpunkte

$x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$ | Resubstitution

K_t berührt die x–Achse in $N_1(-t|0)$ und $N_2(t|0)$.

K_t verläuft aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten, ist symmetrisch zur x–Achse, schneidet diese in $S_y(0|t)$ und hat zwei Berührpunkte mit der x–Achse.

b) Die Parallele zur x-Achse durch $S_y(0|t)$ hat die Funktionsgleichung $g(x) = t$. Schnittpunkte mit K_t mit $f_t(x) \cap g(x)$

$\frac{1}{t}x^4 - 2x^2 + t = t \quad | \quad -t$

$\frac{1}{t}x^4 - 2x^2 = 0 \quad | \quad \cdot t$

$x^4 - 2tx^2 = x^2(x^2 - 2t) = 0$

$x_{1,2} = 0 \ \vee (x^2 - 2t) = 0 \quad |$ Satz vom Nullprodukt

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2t}$

$f_t(\sqrt{2t}) = f_t(-\sqrt{2t}) = t$

Die Koordinaten der beiden gesuchten Schnittpunkte sind $S_1(-\sqrt{2t}|t)$ und $S_2(\sqrt{2t}|t)$.

Lösung A8

$f(x) = ax^4 + bx^2 = x^2(ax^2 + b)$

$x_{1,2} = 0 \ \vee (ax^2 + b) = 0 \quad |$ Satz vom Nullprodukt

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$

Das Schaubild hat eine doppelte Schnittstelle mit der x–Achse im Ursprung und zwei einzelne Schnittstellen in $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$. Das Schaubild ist symmetrisch zur y–Achse.

Abbildung 1: Für $a > 0$ verläuft das Schaubild aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten. Es erfüllt die genannten Bedingungen für $b < 0$.

Abbildung 2: Für $a > 0$ verläuft das Schaubild aus dem II. Quadranten in den I. Quadranten. Mit $b > 0$ entsteht bei $\sqrt{\frac{-b}{a}}$ ein $D < 0$, sodass keine weiteren Nullstellen außer $x_{1,2} = 0$ möglich sind. Das Schaubild hat eine vierfache Nullstelle und erfüllt die genannten Bedingungen.

Abbildung 3: Für $a < 0$ verläuft das Schaubild aus dem III. Quadranten in den IV. Quadranten. Es erfüllt die genannten Bedingungen für $b > 0$.

Abbildung 4: Kann nicht zugeordnet werden, da $f(x) = ax^4 + bx^2$ achsensymmetrisch ist, Abbildung 4 jedoch nicht.

Lösung A9

Die Auflösung von $f(x)$ ergibt $f(x) = 0{,}1(x+1)(x-1)(x-2)(x-t)$. Dies führt zu einem Polynom 4. Grades. Zwar sind drei Nullstellen sichtbar in $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$, die vierte Nullstelle muss bei $x_4 = t$ liegen. Nun erhalten wir durch ausmultiplizieren den y-Achsenabschnitt mit $0{,}1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-t) = -0{,}2t$. Das Schaubild schneidet die y–Achse in $S_y(0|-2)$. Dies führt zu $-0{,}2t = -2$ und damit $t = 10$.

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f für $t = 10$.