Funktionsklassen
Lineare Funktionen
(Geraden)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Inhaltsverzeichnis

Lineare Funktionen (Geraden)

© by Fit-in-Mathe-Online.de

Kapitel mit 209 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(16 Aufgaben)*	13
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	14
Aufgabenblatt 2 *(41 Aufgaben)*	16
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	18
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 *(15 Aufgaben)*	21
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	23
Aufgabenblatt 2 *(24 Aufgaben)*	26
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	28
Aufgabenblatt 3 *(20 Aufgaben)*	32
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	34
Aufgabenblatt 4 *(13 Aufgaben)*	38
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	41
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(14 Aufgaben)*	44
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	46
Aufgabenblatt 2 *(20 Aufgaben)*	49
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	52
Aufgabenblatt 3 *(16 Aufgaben)*	55
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	57
Aufgabenblatt 4 *(19 Aufgaben)*	60
Lösungen zum Aufgabenblatt 4	61
Aufgabenblatt 5 *(11 Aufgaben)*	63
Lösungen zum Aufgabenblatt 5	65

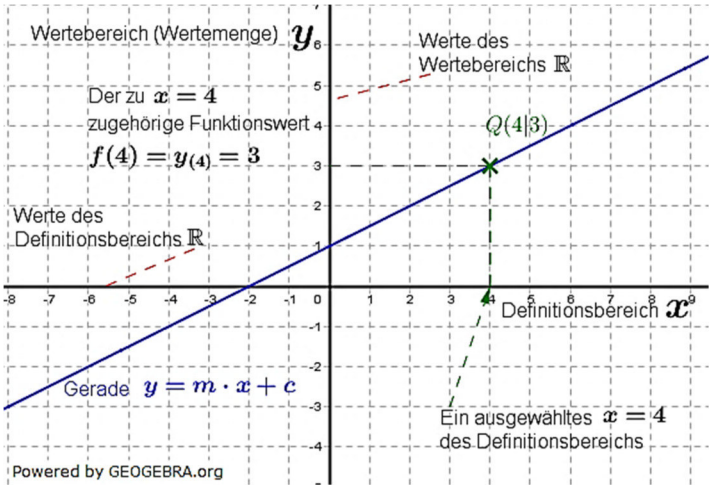
© *by Fit-in-Mathe-Online,* mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de
© by Fit-in-Mathe-Online.de

Definition des Begriffs „Funktion"

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, *x*-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, *y*-Wert) zuordnet.

Die lineare Funktion

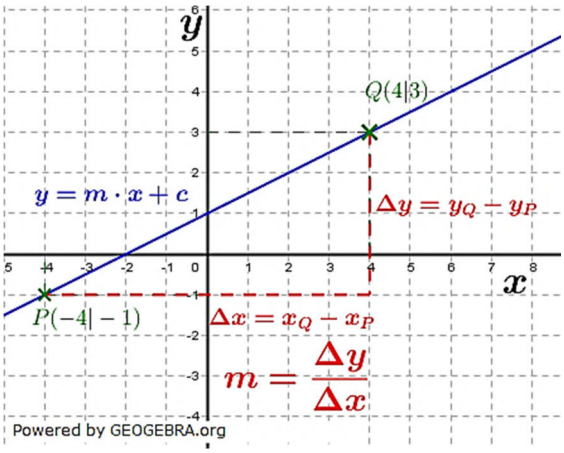
Den angeführten Definitionsbegriff einer Funktion verdeutlicht die nebenstehende Graphik. Jedem einzelnen *x* ist durch die Funktionsvorschrift $y = m \cdot x + c$ genau ein und nur ein *y*-Wert zugeordnet.



In der allgemeinen Geradengleichung $g(x) = y = m \cdot x + c$ haben die Variablen m und c die nachfolgende Bedeutung:
m steht für die „Steigung" der Geraden.
c steht für den „y-Achsenabschnitt" der Geraden.

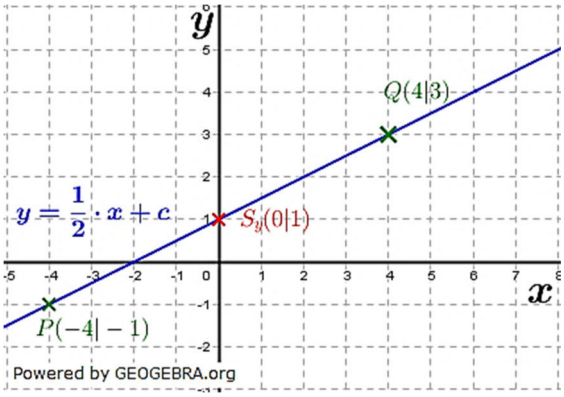
Die Steigung m einer linearen Funktion

Die Steigung m einer linearen Funktion lässt sich berechnen, wenn die Koordinaten zweier Punkte, durch die die lineare Funktion verläuft, bekannt sind.
Sie wird berechnet über den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
In nebenstehender Graphik sind die beiden Punkte $P(-4|-1)$ und $Q(4|3)$ bekannt.
Δy ergibt sich aus $y_Q - y_P = 3 - (-1) = 4$.
Δx ergibt sich aus $x_Q - x_P = 4 - (-4) = 8$.
Somit ergibt sich $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
Die Funktionsgleichung lautet somit $y = \frac{1}{2}x + c$. Es fehlt noch die Bestimmung von c.



Die y-Achsenabschnitt c einer linearen Funktion

Unter dem y-Achsenabschnitt einer linearen Funktion verstehen wir den Schnittpunkt des Graphen der linearen Funktion mit der y-Achse. In nebenstehender Graphik ist dieser Punkt S_y benannt.



Der Wert von c kann rechnerisch ermittelt werden, nachdem die Steigung m bekannt ist. Wir machen mit einem der beiden Punkte P bzw. Q eine Punktprobe und errechnen daraus den Wert von c. Welchen Punkt wir dabei auswählen, ist egal.
Wir führen die Rechnung mit dem Punkt $Q(4|3)$ durch:

$3 = \frac{1}{2} \cdot 4 + c \qquad | \quad -2$

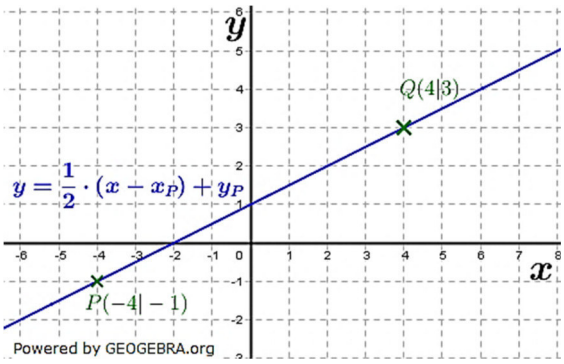
$c = 3 - 2 = 1$

Damit lautet die endgültige Funktionsgleichung des Beispiels

$$f(x) = y = \frac{1}{2}x + 1$$

Die Punkt-Steigungsform einer linearen Funktion

Neben der allgemeinen Funktionsgleichung einer linearen Funktion $f(x) = y = m \cdot x + c$ existieren noch weitere Gleichungsarten. Eine dieser weiteren Gleichungsarten ist die Punkt-Steigungsformel mit
$f(x) = y = m \cdot (x - x_P) + y_P$.



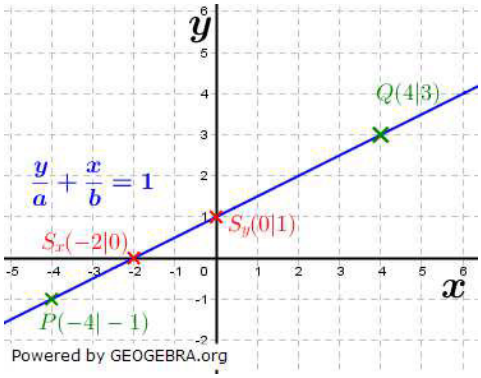
Hierin sind x_P und y_P die Koordinaten eines bekannten Punktes der Geraden.
Neben dem bekannten Punkt muss auch noch die Steigung der Geraden bekannt sein, damit die Punkt-Steigungsformel aufgestellt werden kann.
Wir stellen die Gleichung auf mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$ und dem Punkt $P(-4|-1)$.

$f(x) = y = \frac{1}{2} \cdot \big(x - (-4)\big) - 1$

$f(x) = y = \frac{1}{2}x + 2 - 1 = \frac{1}{2}x + 1$

Achsenabschnittsform einer linearen Funktionsgleichung

Eine weitere Gleichungsart ist die Achsenabschnittsform mit
$\frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1.$
Hierin ist a die y-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse und b die x-Koordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse.

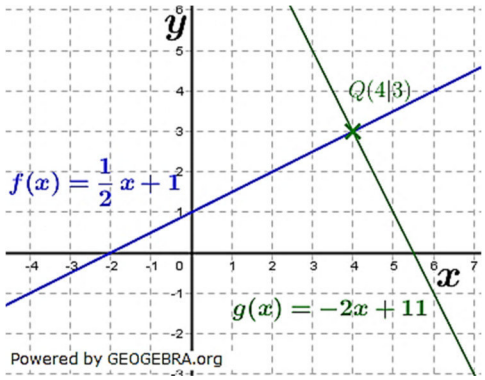


Wir stellen die Funktionsgleichung auf mit $a=1$ und $b=-2$ (Siehe Graphik).

$\frac{y}{1}-\frac{x}{2}=1$ | $\cdot 2$
$2y-x=2$ | $+x;\ :2$
$y=\frac{1}{2}x+1$

Orthogonalität zweier Geraden

Stehen zwei Geraden f und g senkrecht aufeinander, so gilt die Beziehung
$m_f \cdot m_g=-1.$
Hierin sind m_f und m_g die Steigungen der beiden Geraden.



Wir stellen die Funktionsgleichung einer Geraden g auf, die orthogonal zur Geraden f mit $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ist und zusätzlich durch den Punkt $Q(4|3)$ geht.

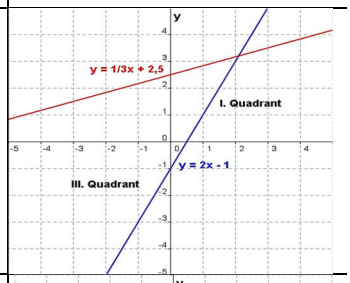
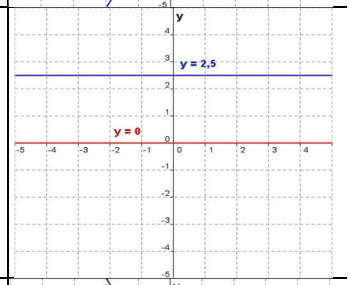
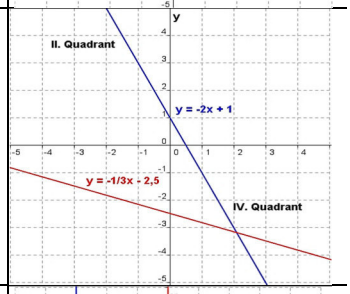
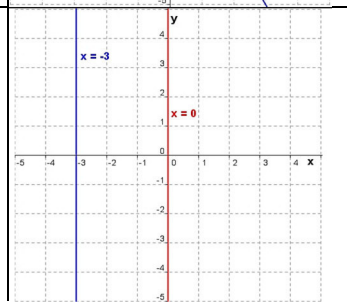
$m_f=\frac{1}{2}$
$m_g=-\frac{1}{m_f}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$
$g(x)=m_g\cdot(x-x_Q)+y_Q$ | Punkt-Steigungsformel
$g(x)=-2\cdot(x-4)+3$
$g(x)=y_g=-2x+11$

Auffrischung Mittelstufenwissen

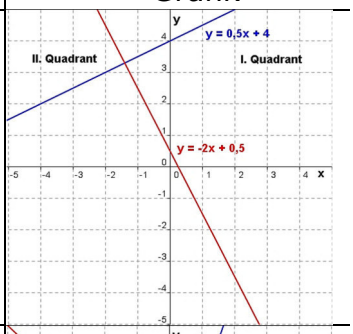
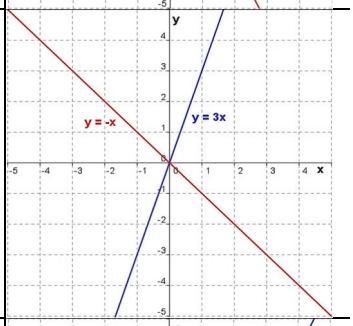
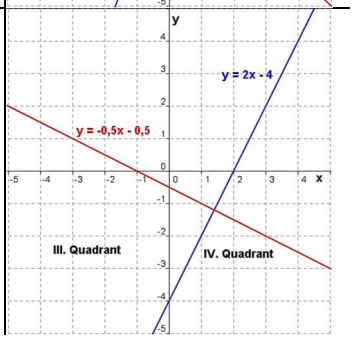
Graphen linearer Funktionen haben einen eigenen Namen – Gerade. Die allgemeine Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = m \cdot x + c$$

Der Parameter $m \in \mathbb{R}$ bestimmt die Steigung der Geraden. Es gilt:

Wert von m	Auswirkung	Grafik
$m > 0$	Gerade mit positiver Steigung verläuft vom III. Quadranten in den I. Quadranten.	
$m = 0$	Beschreibt eine Parallele zur x–Achse, falls zusätzlich $c = 0$, die x–Achse selbst.	
$m < 0$	Gerade mit negativer Steigung verläuft vom II. Quadranten in den IV. Quadranten.	
$x = c$	Beschreibt eine Parallele zur y–Achse im Abstand c, falls zusätzlich $c = 0$, die y–Achse selbst.	

Der Parameter $c \in \mathbb{R}$ bestimmt den y-Achsenabschnitt. Es gilt:

Wert von c	Auswirkung	Grafik
$c > 0$	Die Gerade schneidet die y–Achse bei c zwischen dem II. und I. Quadranten.	
$c = 0$	Die Gerade schneidet die y–Achse im Ursprung. Eine solche Gerade heißt Ursprungsgerade.	
$c < 0$	Die Gerade schneidet die y–Achse bei c zwischen dem III. und IV. Quadranten.	

Erweitertes Wissen lineare Funktionen

Zum erweiterten Wissen zu linearen Funktionen gehören die Themenkreise

- Besondere Lage von Geraden;
- Länge einer Strecke zwischen zwei Geradenpunkten;
- Schnittwinkel einer Geraden mit der x-Achse;
- Schnittwinkel zwischen zwei Geraden.

Nachfolgend werden die einzelnen Themenkreise behandelt.

Besondere Lage von Geraden

Beispiel 1: Gegeben sind die Geraden g mit $y = 0{,}5(x+3)$ und h mit $y = 0{,}5x - 1$. Mache eine Aussage über die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

Lösung 1: Nach Auflösung der Klammer $0{,}5(x+3)$ stellen wir fest, dass sowohl g als auch h die gleiche Steigung haben. Beide Geraden haben aber einen unterschiedlichen y–Achsenabschnitt mit $c_g = 1{,}5$ und $c_h = -1$. Die beiden Geraden verlaufen somit parallel zu einander und haben keine gemeinsamen Punkte.

Beispiel 2: Gegeben ist die Gerade g mit $y = 2x - 1$. Eine Gerade h schneidet die Gerade g senkrecht. Bestimmen die Steigung von h.

Lösung 2: Wenn zwei Geraden (oder auch sonstige Kurven) senkrecht aufeinander stehen, so schließen sie einen Winkel von $90°$ ein. Die Gerade, die auf einer anderen Geraden senkrecht steht, trägt auch den Namen Orthogonale. Für eine Orthogonale gilt $m_g = -\frac{1}{m_h}$ bzw. $m_h = -\frac{1}{m_g}$.

$m_h = -\frac{1}{2} = -0{,}5$. Die Steigung der Geraden h beträgt $-0{,}5$.

Beispiel 3: Gegeben sind die Geraden g mit $y = 0{,}3(x + 4)$ und h mit $y = \frac{3}{10}x + 1{,}2$. Mache eine Aussage über die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

Lösung 3: Nach Auflösung der Klammer $0{,}3(x + 4)$ stellen wir fest, dass sowohl g als auch h die gleiche Steigung haben. Beide Geraden haben zusätzlich noch denselben y–Achsenabschnitt mit $c_g = c_h = 1{,}2$. Die beiden Geraden liegen somit auf sich selbst und haben unendlich viele gemeinsame Punkte.

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz besondere Lage von Geraden

Haben zwei Geraden g und h die gleiche Steigung m und einen unterschiedlichen y–Achsenabschnitt c, so liegen sie parallel zueinander.

Haben zwei Geraden g und h die gleiche Steigung m und denselben y–Achsenabschnitt c, so liegen sie aufeinander.

Ist das Produkt der Steigungen zweier Geraden g und h gleich -1, so stehen sie aufeinander senkrecht. ($m_g \cdot m_h = -1$).

Länge einer Strecke

Unter der Länge einer Strecke z. B. $\overline{AB}$ verstehen wir den linearen Abstand zwischen zwei Punkten A und B, Länge der Strecke in LE (= Längeneinheit).

Beispiel 4: Gegeben sind die Punkte $A(-2|2)$, $B(2|-1)$ und $C(1|4)$.

a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.
b) Bestimme den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.
c) Beschreibe die Strecke $\overline{AC}$ mit einer Gleichung.
d) A, B und C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem ein. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung 4:

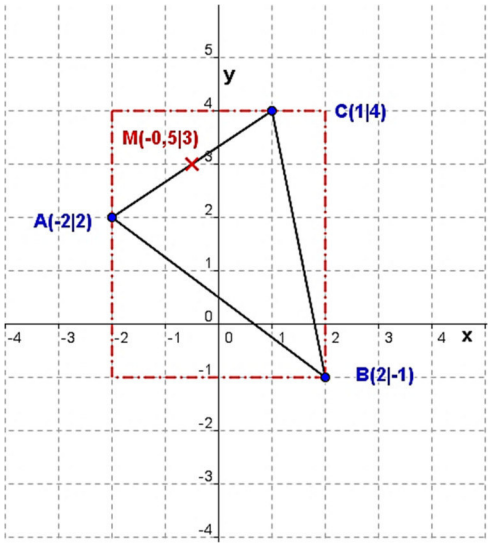
zu a) Wir wählen $B(x_2|y_2)$ und $A(x_1|y_1)$. Der Abstand einer Strecke ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras mit $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$d = \sqrt{(2 - (-2))^2 + ((-1) - 2)^2}$

$d = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$

$d = 5\ LE$

zu b) Wir wählen $A(x_1|y_1)$ und $C(x_2|y_2)$.
Der Mittelpunkt einer Strecke ergibt sich aus $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$.
$x_M = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5 \quad y_M = \frac{2+4}{2} = 3$
Die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AC}$ lauten $M(-0{,}5|3)$.



zu c) Über die Punktsteigungsformel
$y = m(x - x_A) + y_A$ erhalten wir
$y = \frac{2}{3}(x+2) + 2$
$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

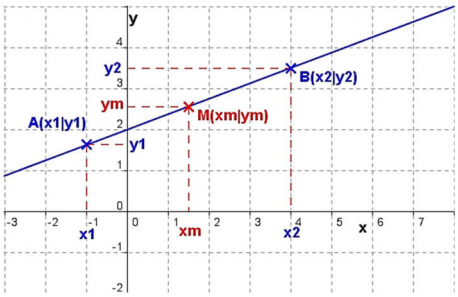
zu d) Die Fläche des Dreiecks ABC bestimmt sich aus der Fläche des (rot umrandeten) Rechtecks abzüglich der 3 äußeren Dreiecke über den Seiten des inneren Dreiecks.
$A_{Rechteck} = 4 \cdot 5 = 20\ FE$
$A_{Dreieck über \overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ FE$
$A_{Dreieck über \overline{AC}} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ FE$
$A_{Dreieck über \overline{CB}} = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2{,}5\ FE$
$A_{ABC} = 20 - 6 - 3 - 2{,}5 = 8{,}5\ FE$

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz Länge von Strecken

Die Länge einer Strecke $\overline{AB}$ ***mit*** $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ errechnet sich über:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Der Mittelpunkt $M(x_m|y_m)$ einer Strecke $\overline{AB}$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ errechnet sich über:
$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ *und* $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$



Schnittwinkel einer Geraden mit der *x*-Achse

Wir unterscheiden zwei Arten von Winkeln bei Geraden, dem Steigungswinkel und dem Schnittwinkel.

Beispiel 5: K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1;\ x \in \mathbb{R}$. Unter welchem Winkel schneidet f die x-Achse?

Lösung 5: Aus $x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$ folgt für den gesuchten Winkel:
$tan(\alpha) = 0{,}5 \quad => \quad a = arctan(0{,}5) = 26{,}57°$
Hinweis: Zur korrekten Ermittlung des Winkels in **°** muss der Modus des GTR/WTR auf **GRAD** eingestellt sein (Gegebenenfalls Änderung im Menu **MODE** durchführen).

Beispiel 6: K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1;\ x \in \mathbb{R}$. Unter welchem Winkel schneidet f die x-Achse?

Lösung 5: $tan(\alpha) = -\frac{1}{3}\ \ => \ \ a = arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -18{,}43°$

$180° - 18{,}43° = 161{,}57°$

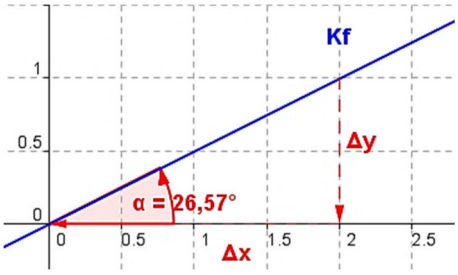
<u>Hinweis:</u> Bei negativen Steigungen zeigt der GTR/WTR einen negativen Winkel an. Im Beispiel den Wert $-18{,}43°$. Dies ist der Winkel, den die x–Achse im Uhrzeigersinn gesehen mit der Gerade K_f einschließt. Um den Schnittwinkel, den die x–Achse gegen den Uhrzeigersinn gesehen mit der Geraden K_f einschließt, muss der Betrag des GTR/WTR-Wertes von $180°$ abgezogen werden.

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz Schnittwinkel mit der x-Achse

Unter dem Steigungswinkel α einer Geraden g verstehen wir den Winkel zwischen $0°$ und $180°$, den die Gerade g mit der x–Achse gegen den Uhrzeigersinn gesehen bildet.

$\alpha = \sphericalangle(x - Achse; g)$



Schnittwinkel zweier Geraden

Zwei nicht parallele Geraden und schneiden sich unter einem Winkel. Als Schnittwinkel ist dabei der spitze Winkel definiert, den die beiden Geraden einschließen.

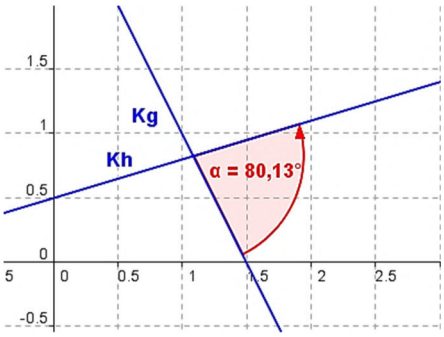
Beispiel 7: Gegeben sind die Geraden $g: y = -2x + 3$ und $h: y = 0{,}3x + 0{,}5$. Bestimme den Schnittwinkel den die Geraden g und h einschließen.

Lösung 7: Die Geraden K_g und K_h schließen zwei Winkel ein. Den kleineren der beiden Winkel, der zwischen $0°$ und $90°$ liegt, bezeichnen wir mit **Schnittwinkel** von K_g und K_h.

$tan(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

$tan(\alpha) = \left|\frac{-2 - 0{,}3}{1 + (-2) \cdot 0{,}3}\right| = 5{,}75$

$\alpha = arctan(5{,}75) = 80{,}13°$



Das Lösungsergebnis führt uns zu folgendem

Merksatz Schnittwinkel zweier Geraden

Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden g und h ist immer der Winkel, der zwischen $0°$ und $90°$ liegt. Die Formel zur Berechnung des Schnittwinkels lautet $\alpha = arctan\left(\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1 \cdot m_2}\right|\right)$. Dabei ist es unerheblich, welche der beiden Steigungen mit m_1 und m_2 gewählt wird. Wichtig für die korrekte Berechnung ist das Einhalten der Betragszeichen | |.

Lineare Funktionen der Anwendungsorientierung

Viele Themen des Alltags lassen sich über lineare Funktionen mathematisch beschreiben, wie etwa die Strom- und Wasserrechnung eines Energielieferanten, die Handyrechnung des Mobilfunkanbieters, aber auch Angebotskalkulation, Nachfrageermittlung und Marktgleichgewichtsrechnungen. Wir machen uns das an zwei Beispielen klar.

Beispiel 8: Ein Energieversorger bietet seinen Kunden Stromlieferung zu folgenden Bedingungen an:
Eine *kWh* kostet *0,14 €* bei einer monatlichen Grundgebühr von *7,50 €*.

a) Erstelle einen Funktionsterm (y € für $x\ kWh$). Stelle die Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

b) Die Stromrechnung für *4* Monate beläuft sich auf *150,40 €*. Wie hoch war der Stromverbrauch in *kWh*?

c) Eine Kaufhauskette verkauft Strom für *0,10 €* pro *kWh* bei einer monatlichen Grundgebühr von *10 €*. Ab welcher monatlichen Verbrauchsmenge lohnt sich ein Wechsel des Stromanbieters?

Lösung 8:

zu a) Die unabhängige Variable x beschreibt die Anzahl der verbrauchten *kWh*. $y = f(x)$ sind die monatlichen Stromkosten in Abhängigkeit vom Verbrauch, zu denen noch die verbrauchsunabhängige Grundgebühr pro Monat hinzukommt.
Funktionsterm: $f(x) = 0{,}14x + 7{,}50$.

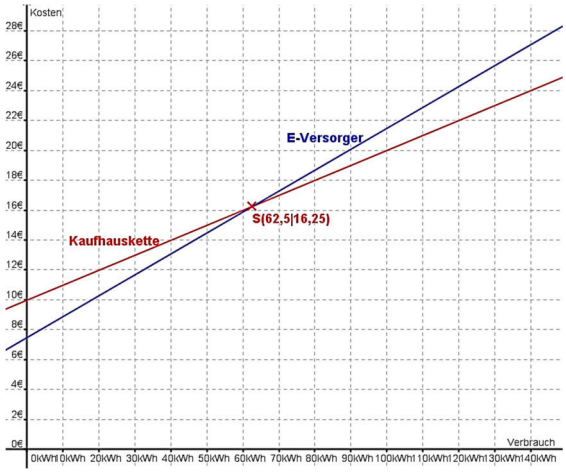
zu b) $f(x) = 150{,}40$ in 4 Monaten.

$150{,}40 = 0{,}14x + 4 \cdot 7{,}50 \quad \Rightarrow \quad x = 860$

Der Stromverbrauch in *4* Monaten betrug $860\ kWh$.

zu c) Der Funktionsterm für das Angebot der Kaufhauskette lautet $h(x) = 0{,}10x + 10$.

Der „Break-Even Point" ist der Schnittpunkt der beiden Kostenfunktionen.
$f(x) = g(x)$
$0{,}14x + 7{,}50 = 0.1x + 10$
$x = 62{,}5$
Ab einem monatlichen Verbrauch von $62{,}5\ kWh$ lohnt sich der Wechsel des Stromanbieters.



Beispiel 9: Gegeben sind die Angebotsfunktion mit $p_A(x) = 0{,}5x + 4$ und die Nachfragefunktion mit $p_N(x) = 12 - 1{,}5x; 1 \leq x \leq 5{,}5$.
Bestimme Gleichgewichtsmenge und Gleichgewichtspreis.

Lösung 9: Gleichsetzen von $p_A(x) = p_N(x)$

$0{,}5x + 4 = 12 - 1{,}5x \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Gleichgewichtsmenge $x_G = 4 \quad \Rightarrow \quad p_A(4) = 6$
Gleichgewichtspreis $\quad p_G = 6$
Marktgleichgewicht: $M_G(4|6)$

Aufgabe A1

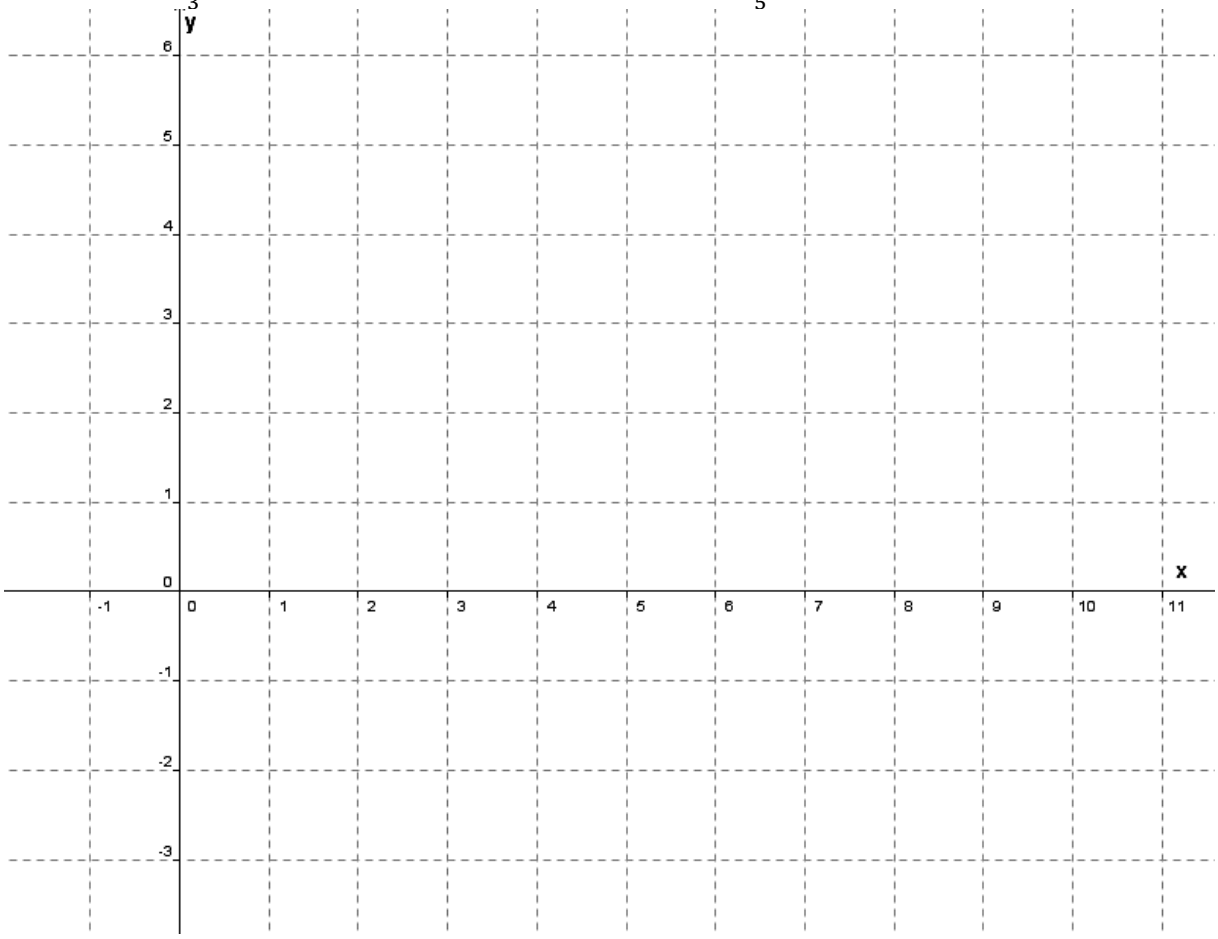
Prüfe rechnerisch nach, ob die Punkte $A(2|3)$, $B(1{,}5|4)$, $C(-3|0)$ und $D(-6|-4)$ zum Schaubild der Funktionsgleichung gehören.

a) $g(x) = 2x + 1$
b) $g(x) = -x + 1{,}5$
c) $f(x) = x^2 - 9$
d) $g(x) = \frac{3}{4}x + 0{,}5$
e) $g(x) = -0{,}6x - 0{,}6$
f) $g(x) = x + 3$
g) $f(x) = x^2 - 1$
h) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Aufgabe A2

Zeichne die Schaubilder der nachfolgenden Geraden in das Koordinatensystem.

a) $g(x) = \frac{9}{2}\,x + 1$
b) $g(x) = \frac{7}{2}x + 2$
c) $g(x) = \frac{2}{3}\,x + 1{,}5$
d) $g(x) = \frac{5}{7}x + 2{,}5$
e) $g(x) = \frac{9}{5}\,x - 1$
f) $g(x) = \frac{4}{11}\,x - 2$
g) $g(x) = \frac{3}{3}\,x - 1{,}5$
h) $g(x) = \frac{7}{5}\,x$



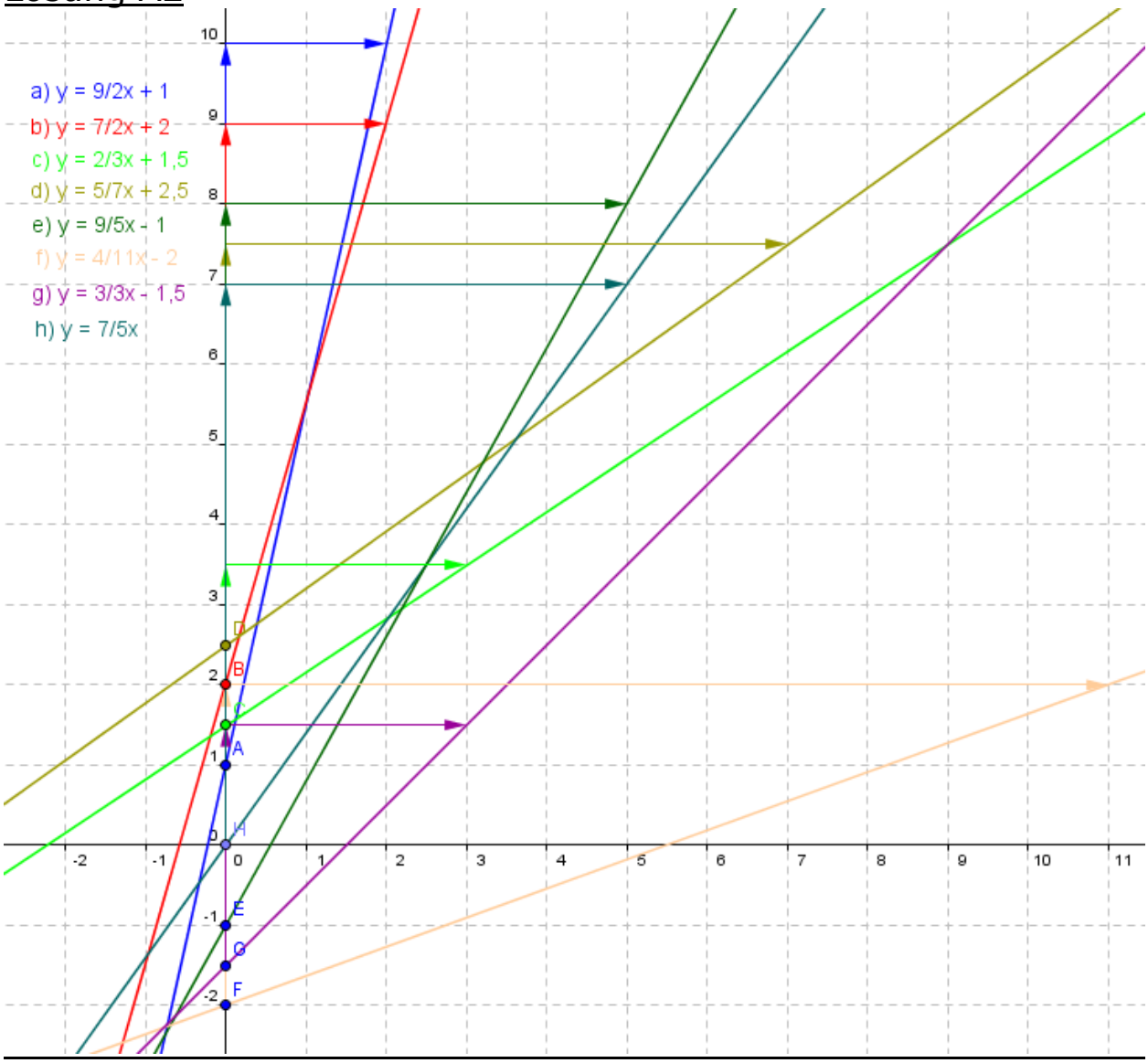
Lösung A1

Detaillierte Lösung für

a) $g(x) = 2x + 1;\ \ A(2|3)$
$g(2) = 3$
$3 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 2 + 1$
$3 \neq 5$ => Punkt liegt nicht auf g $(A \notin g)$
$g(x) = 2x + 1;\ \ B(1{,}5|4)$
$g(1{,}5) = 4$
$4 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 1{,}5 + 1$
$4 = 4$ => Punkt liegt auf g $(B \in g)$
$g(x) = 2x + 1;\ \ C(-3|0)$
$g(-3) = 0$
$0 \stackrel{?}{=} 2 \cdot (-3) + 1$
$0 \neq -5$ => $C \notin g$
$g(x) = 2x + 1;\ \ D(-6|-4)$
$g(-4) = -6$
$-6 \stackrel{?}{=} 2 \cdot (-4) + 1$
$-6 \neq -7$ => $D \notin g$

	Funktion	$A(2\|3)$	$B(1{,}5\|4)$	$C(-3\|0)$	$D(-6\|-4)$
b)	$g(x) = -x + 1{,}5$	$A \notin g$	$B \notin g$	$C \notin g$	$D \notin g$
c)	$f(x) = x^2 - 9$	$A \notin f$	$B \notin f$	$C \in f$	$D \notin f$
d)	$g(x) = \frac{3}{4}x + 0{,}5$	$A \notin g$	$B \notin g$	$C \notin g$	$D \in g$
e)	$g(x) = -0{,}6x - 0{,}6$	$A \notin g$	$B \notin g$	$C \notin g$	$D \notin g$
f)	$g(x) = x + 3$	$A \notin g$	$B \notin g$	$C \in g$	$D \notin g$
g)	$f(x) = x^2 - 1$	$A \in f$	$B \notin f$	$C \notin f$	$D \notin f$
h)	$f(x) = x^2 - 2x + 3$	$A \in f$	$B \notin f$	$C \notin f$	$D \notin f$

Lösung A2


a) y = 9/2x + 1
b) y = 7/2x + 2
c) y = 2/3x + 1,5
d) y = 5/7x + 2,5
e) y = 9/5x - 1
f) y = 4/11x - 2
g) y = 3/3x - 1,5
h) y = 7/5x
A
B
C
D
E
F
G
H

Aufgabe A1

Bestimme jeweils die Gleichung der Geraden, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 verläuft.

a) $P_1(1|2);\ P_2(2|3)$ b) $P_1(-1|2);\ P_2(1|2)$

c) $P_1(2|2);\ P_2(3|-2)$

Aufgabe A2

Prüfe im Folgenden, ob der Punkt P_3 auf der Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 liegt.

a) $P_1(0|1),\ P_2(1|1),\ P_3(2|2)$ b) $P_1(-1|-17),\ P_2(2|0),\ P_3(1|17)$

Aufgabe A3

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Drei verschiedene Punkte liegen immer auf einer gemeinsamen Geraden.

b) Drei verschiedene Punkte liegen niemals auf einer gemeinsamen Geraden.

c) Haben drei Punkte dieselbe y-Koordinate y_1, so liegen sie stets auf einer gemeinsamen Geraden.

d) Gilt für drei Punkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ und $P_3(x_3|y_3)$, dass

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

ist, so liegen sie auf einer gemeinsamen Geraden. Diese hat die Steigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Aufgabe A4

Mache eine Aussage über die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

a) $g\colon\ y = 0{,}75x - 3$
$h\colon\ y = -\frac{4}{3}x - 3$

b) $g\colon\ y = -\frac{9}{20}x + 4$
$h\colon\ y = -0{,}45x - 1$

Aufgabe A5

Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(2|3)\quad B(5|10)$ b) $A(-4|-7)\quad B(9|-12)$

c) $A(0|0)\quad B(-3|-8)$

Aufgabe A6

Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(1|2)\quad B(4|7)$ b) $A(3|-4)\quad B(-1|12)$

c) $A(-4|5)\quad B(0|-3)$

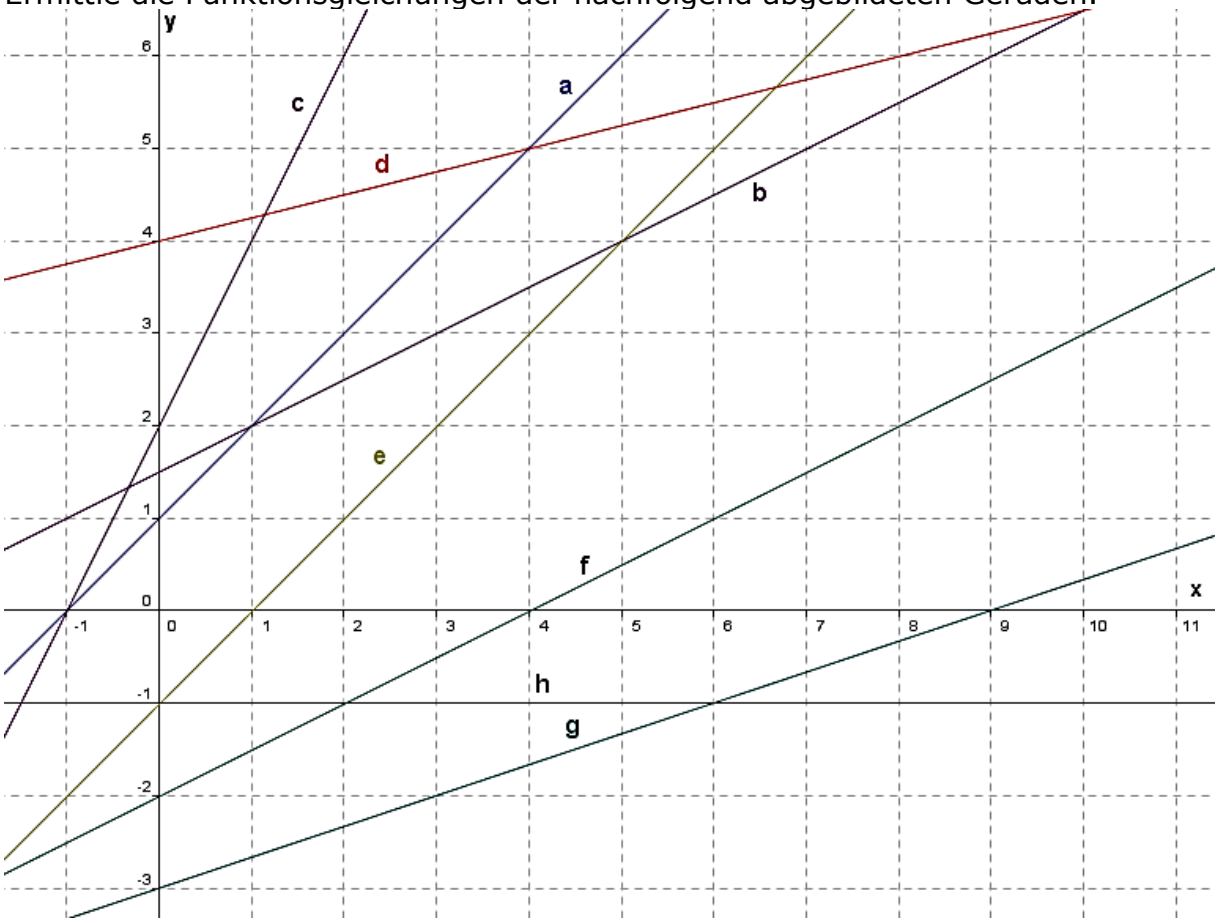
Aufgabe A7

M ist der Mittrelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Berechne die fehlenden Koordinaten.

a) $A(1|2)\quad B(4|7)\quad M(?|?)$ b) $A(?|-7)\quad B(1|-1)\quad M(5|?)$

Aufgabe A8

Ermittle die Funktionsgleichungen der nachfolgend abgebildeten Geraden.



a) _____ b) _____

c) _____ d) _____

e) _____ f) _____

g) _____ h) _____

Aufgabe A9

Ermittle die Nullstellen der nachfolgend gegebenen Funktionsgleichungen von Geraden.

a) $y = 4{,}5x + 2$ b) $y = 3{,}5x - 5$

c) $y = 2{,}5x + 1$ d) $y = x - 5$

e) $y = 0{,}75x + 15$ f) $y = 0{,}5x - 20$

g) $y = 0{,}25x + \frac{2}{3}$ h) $y = 0{,}1x - \frac{5}{9}$

i) $y = \frac{9}{2}x + 1$ j) $y = \frac{7}{2}x + 2$

k) $y = \frac{2}{3}x + 1{,}5$ l) $y = \frac{5}{7}x + 2{,}5$

m) $y = \frac{9}{5}x - 1$ n) $y = \frac{4}{11}x - 2$

Lösung A1

a) Aufstellen der Funktionsgleichung:

I) Bestimmung der Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{3-2}{2-1} = 1$

$y = 1 \cdot x + c$

II) Punktprobe mit P_1 (alternativ P_2):

$2 = 1 \cdot 1 + c \quad | \quad -1$

$c = 1$

Die Funktionsgleichung lautet $y = x + 1$

b) Aufstellen der Funktionsgleichung:

I) Bestimmung der Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{2-2}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0$

$y = 0 \cdot x + c$

II) Punktprobe mit P_1 (alternativ P_2):

$2 = 0 \cdot 1 + c$

$c = 2$

Die Funktionsgleichung lautet $y = 2$

c) Aufstellen der Funktionsgleichung:

I) Bestimmung der Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{-2-2}{3-2} = -4$

$y = -4 \cdot x + c$

II) Punktprobe mit P_1 (alternativ P_2):

$2 = -4 \cdot 2 + c \quad | \quad +8$

$c = 10$

Die Funktionsgleichung lautet $y = -4x + 10$

Lösung A2

a) Aufstellen der Funktionsgleichung durch P_1 und P_2:

I) Bestimmung der Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{1-1}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$

$y = 0 \cdot x + c$

II) Punktprobe mit P_1 (alternativ P_2):

$1 = 0 \cdot 1 + c \quad | \quad -1$

$c = 1$

Die Funktionsgleichung lautet $y = 1$.

III) Punktprobe mit P_3:

$2 \stackrel{?}{=} 1$

$2 \neq 1$

Der Punkt $P_3(2|2)$ liegt nicht auf der Geraden $y = 1$.

b) Aufstellen der Funktionsgleichung durch P_1 und P_2:

I) Bestimmung der Steigung über $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{0-(-17)}{2-(-1)} = \frac{17}{3}$

$y = \frac{17}{3} \cdot x + c$

II) Punktprobe mit P_1 (alternativ P_2):

$0 = \frac{17}{3} \cdot 2 + c \quad | \quad -\frac{34}{3}$

$c = -\frac{34}{3}$

Die Funktionsgleichung lautet $y = \frac{17}{3} \cdot x - \frac{34}{3}$.

III) Punktprobe mit P_3:

$17 \stackrel{?}{=} \frac{17}{3} \cdot 1 - \frac{34}{3}$

$17 \neq -\frac{17}{3}$

Der Punkt $P_3(1|17)$ liegt nicht auf der Geraden $y = \frac{17}{3} \cdot x - \frac{34}{3}$.

Lösung A3

a) Drei verschiedene Punkte liegen immer auf einer gemeinsamen Geraden.
Die Aussage ist falsch.
Drei verschiedene Punkte liegen nur dann auf einer gemeinsamen Geraden, wenn die Steigung durch die Punkte P_1 und P_2 gleich der Steigung durch die Punkte P_2 und P_3 (alternativ P_1 und P_3) ist.

b) Drei verschiedene Punkte liegen niemals auf einer gemeinsamen Geraden.
Die Aussage ist falsch.
Drei verschiedene Punkte liegen immer dann auf einer gemeinsamen Geraden, wenn die Steigung durch die Punkte P_1 und P_2 gleich der Steigung durch die Punkte P_2 und P_3 (alternativ P_1 und P_3) ist.

c) Haben drei Punkte dieselbe y-Koordinate y_1, so liegen sie stets auf einer gemeinsamen Geraden.
Die Aussage ist richtig.
Drei Punkte mit derselben y-Koordinate y_1 liegen auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand y_1.

d) Die Aussage ist richtig.
Dies folgt aus der Beantwortung der Teilaufgaben a) bzw. b) heraus.

Lösung A4

a) $m_g = 0{,}75; \; m_h = -\frac{4}{3}$

$m_g \cdot m_H = 0{,}75 \cdot -\frac{4}{3} = -1$

Die Geraden g und h stehen senkrecht aufeinander.

b) $m_g = -\frac{9}{20}; \; m_h = -0{,}45$

$m_g = m_h$

Wegen $c_g = 4$ und $c_h = -1$ sind die beiden Geraden echt parallel.

Lösung A5

Länge von Strecken über den Satz des Pythagoras mit:

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

a) $\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (10-3)^2} = \sqrt{9+49} \approx 7{,}62 \; LE$

b) $\overline{AB} = \sqrt{(9-(-4))^2 + (-12-(-7))^2} = \sqrt{169+25} \approx 13{,}93 \; LE$

c) $\overline{AB} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{9+64} \approx 8{,}54 \; LE$

Lösung A6

Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ über $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$.

a) $x_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$; $y_M = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$; $M\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{9}{2}\right)$

b) $x_M = \frac{3+(-1)}{2} = 1$; $y_M = \frac{-4+12}{2} = 4$; $M(1|4)$

c) $x_M = \frac{0+(-4)}{2} = -2$; $y_M = \frac{-3+5}{2} = 1$; $M(-2|1)$

Lösung A7

Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ über $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$.

a) $x_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$; $y_M = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$; $M\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{9}{2}\right)$

b) $x_M = \frac{x_1+1}{2} = 5$; $y_M = \frac{-7-1}{2} = -4$; $M(5|-4)$

$x_1 + 1 = 10$; => $x_1 = 9$; $A(9|-7)$

Lösung A8

a) $y = x + 1$ b) $y = \frac{1}{2}x + 1{,}5$ c) $y = 2x + 2$ d) $y = \frac{1}{4}x + 4$

e) $y = x - 1$ f) $y = \frac{1}{2}x - 2$ g) $y = \frac{1}{3}x - 3$ h) $y = -1$

Lösung A9

Nullstellen ermitteln wir, indem wir y auf null setzen.

a) $4{,}5x + 2 = 0$; $x = -\frac{4}{9}$; $N\left(-\frac{4}{9}\middle|0\right)$

b) $3{,}5x - 5 = 0$; $x = \frac{10}{7}$; $N\left(\frac{10}{7}\middle|0\right)$

c) $2{,}5x + 1 = 0$; $x = -\frac{2}{5}$; $N\left(-\frac{2}{5}\middle|0\right)$

d) $x - 5 = 0$; $x = 5$; $N(5|0)$

e) $0{,}75x + 15 = 0$; $x = -20$; $N(-20|0)$

f) $0{,}5x - 20 = 0$; $x = 40$; $N(40|0)$

g) $0{,}25x + \frac{2}{3} = 0$; $x = -\frac{8}{3}$; $N\left(-\frac{8}{3}\middle|0\right)$

h) $0{,}1x - \frac{5}{9} = 0$; $x = \frac{50}{9}$; $N\left(\frac{50}{9}\middle|0\right)$

i) $\frac{9}{2}x + 1 = 0$; $x = -\frac{2}{9}$; $N\left(-\frac{2}{9}\middle|0\right)$

j) $\frac{7}{2}x + 2 = 0$; $x = -\frac{4}{7}$; $N\left(\frac{4}{k}\middle|0\right)$

k) $\frac{2}{3}x + 1{,}5 = 0$; $x = -\frac{9}{4}$; $N\left(-\frac{9}{4}\middle|0\right)$

l) $\frac{5}{7}x + 2{,}5 = 0$; $x = -\frac{7}{2}$; $N\left(\frac{7}{2}\middle|0\right)$

m) $\frac{9}{5}x - 1 = 0$; $x = \frac{5}{9}$; $N\left(\frac{5}{9}\middle|0\right)$

h) $\frac{4}{11}x - 2 = 0$; $x = \frac{11}{2}$; $N\left(\frac{11}{2}\middle|0\right)$

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zur besonderen Lage von Geraden.

Aufgabe A1

Wie liegen die Geraden g und h zueinander?

a) $g(x) = 0{,}75x - 3$
$h(x) = -\frac{4}{3}x - 3$

b) $g(x) = -\frac{9}{20}x + 4$
$h(x) = -0{,}45x - 1$

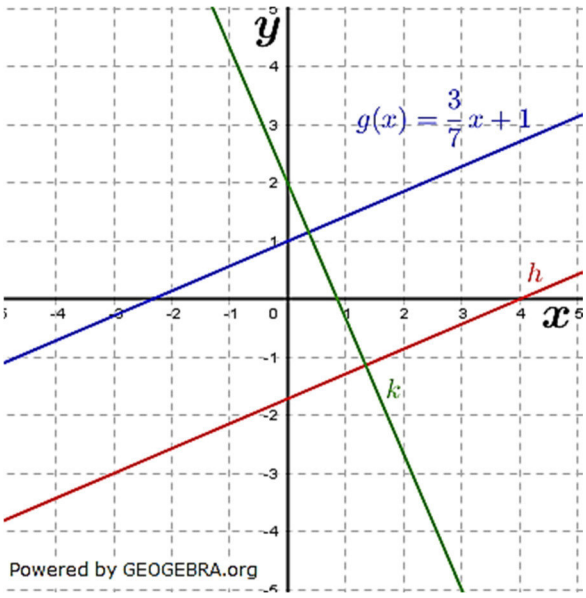
Aufgabe A2

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.

a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen.
b) Eine zweite Gerade h steht senkrecht auf g und verläuft durch den Punkt $P(-2|5{,}5)$. Bestimme die Gleichung der Geraden h.
c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h.
d) In welchem Bereich verläuft die Gerade g oberhalb der Geraden h?

Aufgabe A3

Die Gerade g in nebenstehender Abbildung hat die Gleichung $g(x) = \frac{3}{7}x + 1$.
Bestimme die exakten Gleichungen der Geraden h und k.
Begründe deine Antwort.



Aufgabe A4

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = 1{,}75x + 8;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne das Schaubild K von f in ein geeignetes Kooridnatensystm ein.
b) Eine Gerade G schneidet die y–Achse in $S_y(0|1{,}5)$. Die Gerade wird um S_y gedreht, bis sie die Gerade f senkrecht schneidet. Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K und G exakt.
c) K wird um 2 nach rechts verschoben und es entsteht die Gerade H. Wo schneidet H die y–Achse?

Aufgabe A5

Die Gerade g steht senkrecht auf der Geraden h. Bestimmen Sie m_h.

a) $m_g = 0{,}5\pi$ b) $m_g = \sqrt{2}$

c) $m_g = -\frac{2}{t}; t \neq 0$

Aufgabe A6

$A(-\sqrt{3t}|\frac{t}{3})$, $B(\sqrt{3t}|\frac{t}{3})$ und $C(0|t)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Für welchen Wert von t ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe A7

Zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden schneiden sich in $A(-2|-1)$. Gib vier mögliche Geradengleichungen an.

Lösung A1

a) $g(x) = 0{,}75x - 3 \;\; => \;\; m_g = 0{,}75$

$h(x) = -\frac{4}{3}x - 3 \;\; => \;\; m_h = -\frac{4}{3}$

$m_g \cdot m_h = 0{,}75 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \;\; => \;\; m_g \perp m_h$

$g(x) \cap h(x)$

$0{,}75x - 3 = -\frac{4}{3}x - 3$

$\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x = 0$

$x_S = 0$

$g(0) = -3$

g und h stehen senkrecht aufeinander und schneiden sich im Punkt $S_y(0|-3)$.

b) $g(x) = -\frac{9}{20}x + 4 \;\; => \;\; m_g = -\frac{9}{20}$

$h(x) = -0{,}45x - 1 \;\; => \;\; m_h = -0{,}45 = -\frac{9}{20}$

$m_g = m_h \;\; => \;\; m_g \parallel m_h$

$g(0) = 4 \;\; => \;\; P_g(0|4)$

$h(0) = -1 \;\; => \;\; P_h(0|-1)$

Wegen $m_g = m_h \wedge P_h \notin g$ ist $m_g \parallel m_h$ und verschieden.

Lösung A2

$g(x) = -\frac{2}{3}x + 2.$

a) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \;\; => \;\; x = 3$

$g(0) = 2$

$N(3|0); \;\; S_y(0|2)$

b) $m_g \cdot m_h = -1$

$-\frac{2}{3} \cdot m_h = -1 \;\; => \;\; m_h = \frac{3}{2}$

$h(x) = \frac{3}{2}(x + 2) + 5{,}5 \;\; \Rightarrow \;\; h(x) = \frac{3}{2}x + 8{,}5$

c) $g(x) \cap h(x)$

$-\frac{2}{3}x + 2 = \frac{3}{2}x + 8{,}5$

$-\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x = 6{,}5 \;\; => \;\; x_S = -3$

$g(-3) = 4$

$g \cap h$ in $S(-3|4)$.

d) *Wegen $m_g < 0$ verläuft die Gerade g oberhalb der Geraden h im Intervall $I =]-\infty; -3[$.*

Lösung A3

Die Gerade h verläuft parallel zu g und geht durch den Punkt $P(4|0)$. Sie ist gegenüber g um 4 Stellen nach rechts verschoben.

$h(x) = \frac{3}{7}(x - 4) \;\; \Rightarrow \;\; h(x) = \frac{3}{7}x - \frac{12}{7}$

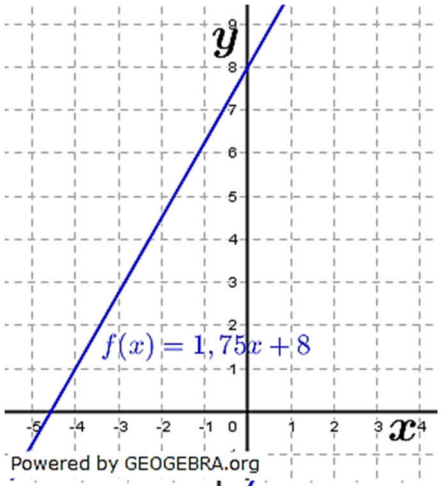
Die Gerade k steht senkrecht auf g und geht durch den Punkt $P(0|2)$.

$m_g \cdot m_k = -1 \;\; => \;\; m_k = -\frac{7}{3}.$

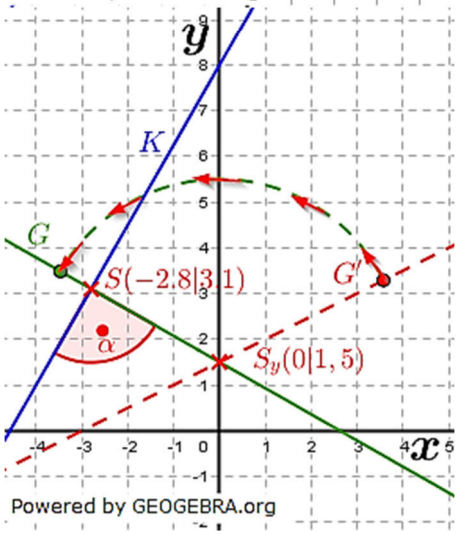
$k(x) = -\frac{7}{3}x + 2$

Lösung A4

a) Siehe Graphik rechts.



b) Die Gerade G' mit beliebiger Steigung durch den Punkt $S_y(0|1{,}5)$ wird um denselben gedreht, bis die Gerade G senkrecht auf K steht.
Für die Steigung muss gelten:
$m_K \cdot m_G = -1$
$1{,}75 \cdot m_G = -1 \;\; => \;\; m_G = -\frac{4}{7}$
Diese Gerade hat die Gleichung $g(x) = -\frac{4}{7}x + 1{,}5$.
$K \cap G$
$1{,}75x + 8 = -\frac{4}{7}x + 1{,}5$
$\frac{7}{4}x + \frac{4}{7}x = -6{,}5$
$\frac{65}{28}x = -\frac{13}{2}$
$x = -\frac{13 \cdot 28}{2 \cdot 65} = -\frac{14}{5}$
$g\left(-\frac{14}{5}\right) = \frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 5} + \frac{3}{2} = \frac{31}{10}$
$K \cap G$ in $S(-2{,}8|3{,}1)$



c) Gerade H aus K:
$h(x) = f(x-2)$
$h(x) = 1{,}75(x-2) + 8 \;\; \Rightarrow \;\; h(x) = 1{,}75x + 4{,}5$
H schneidet die y–Achse in $S_{y_H}(0|4{,}5)$.

Lösung A5

a) $m_h = -\frac{1}{0{,}5\pi} = -\frac{2}{\pi}$

b) $m_h = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $m_h = \frac{t}{2} = 0{,}5t;\; t \neq 0$

Lösung A6

Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Grundseite, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind die beiden Schenkel. Wegen $x_A = -\sqrt{3t}$ und $x_B = \sqrt{3t}$ ist das Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck. Ist das Dreieck rechtwinklig, so muss $m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1$ sein.

$m_{\overline{AC}} = \frac{t - \frac{t}{3}}{0 - (-\sqrt{3t})} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3t}}$

$m_{\overline{BC}} = \frac{t - \frac{t}{3}}{0 - \sqrt{3t}} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3t}}$

$m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{BC}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3t}} \cdot \left(-\frac{2}{3 \cdot \sqrt{3t}}\right) = -\frac{4}{27t} = -1 \;\; \Rightarrow \;\; t = \frac{4}{27}$

Für $t = \frac{4}{27}$ ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

Lösung A7

$f \perp g$ mit Schnittpunkt $A(-2|-1)$:

z. B.:

$f(x) = 0{,}5x$	$g(x) - 2(x+2) - 1 = -2x - 5$
$f(x) = x + 2 - 1$	$g(x) = -(x+2) - 1 = -x - 3$
$f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$	$g(x) = 4(x+2) - 1 = 4x + 7$
$f(x) = 2x + 3$	$g(x) = -\frac{1}{2}(x+2) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2$ usw.

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zur Strecke auf Geraden.

Aufgabe A1

Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(2|3)$ $B(5|10)$ b) $A(-4|-7)$ $B(9|-12)$

c) $A(0|0)$ $B(-3|-8)$

Aufgabe A2

Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(1|2)$ $B(4|7)$ b) $A(3|-4)$ $B(-1|12)$

c) $A(-4|5)$ $B(0|-3)$

Aufgabe A3

M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Berechne die fehlenden Koordinaten.

a) $A(1|2)$ $B(4|7)$ $M(?|?)$

b) $A(?|-7)$ $B(1|-1)$ $M(5|?)$

Aufgabe A4

Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit $A(-3|1{,}5)$, $B(0|0)$, $C(2|4)$ und $D(0|7{,}5)$.

a) Zeige: das Viereck ist ein Trapez.

b) Bestimme den Flächeninhalt des Trapezes.

Aufgabe A5

Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$. Der Punkt $A(1|\ldots.)$ liegt auf g.

a) Bestimme die Geradenpunkte als auch die Orthogonalenpunkte, die von A eine Entfernung von $\sqrt{10}$ haben.

b) Berechne den Flächeninhalt des Quadrats, welches aus den vier ermittelten Punkten von a) gebildet wird.

Aufgabe A6

Gegeben sind die Punkte $P(4|2{,}5)$ und $Q(-1{,}5|-1{,}25)$.

a) Welche Gerade mit der Steigung $m = -\frac{2}{3}$ verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$?

b) Gib eine Gleichung für die Strecke $\overline{PQ}$ an.

Aufgabe A7

Gegeben ist eine Gerade g mit $6x + 10y - 51 = 0$. Bestimme die Koordinaten des Geradenpunktes auf g, der vom Ursprung die kürzeste Entfernung hat.

Aufgabe A8

Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ mit $P(0|-\frac{3}{2}t)$ und $Q\left(\frac{3}{t}\middle|\frac{3}{4}t\right); t > 0$.

Aufgabe A9

Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = -1{,}5x + 2$.

a) Die auf g senkrecht stehende Gerade h schneidet g im Punkt $S(2|g(2))$. Stelle die Gleichung von h auf. Zeichne g und h in ein Achsenkreuz ein.

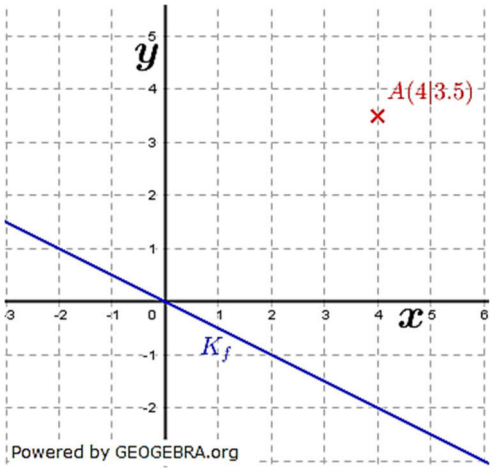
b) Die Gerade h schneidet die y–Achse in S_{y_h}. Berechne den Abstand von S_{y_h} zur Geraden g.

Aufgabe A10

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-1|3)$ und $B(2|1{,}2)$. Die Geraden g, sowie k mit $y = 3$ und h mit $h(x) = x - 4$ bilden ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe A11

Welcher Punkt der Geraden K_f hat vom Punkt $A(4|3{,}5)$ die geringste Entfernung?



Aufgabe A12

Gegeben sind die Punkte $A(-2|2)$, $B(2|-1)$ und $C(1|4)$.

a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

b) Bestimme den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

c) Beschreibe die Strecke $\overline{AC}$ mit einer Gleichung.

d) A, B und C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem ein. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung A1

a) $d = \sqrt{(5-2)^2 + (10-3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7{,}62\ LE$

b) $d = 7{,}07\ LE$ c) $d = 8{,}54\ LE$

Lösung A2

a) $x_M = \frac{4+1}{2} = 2{,}5;\quad y_M = \frac{7+2}{2} = 4{,}5 \quad => \quad (2{,}5|4{,}5)$

b) $M(1|4)$ c) $M(-2|1)$

Lösung A3

a) $A(1|2)\ \ B(4|7)\ \ M(2{,}5|4{,}5)$ b) $A(9|-7)\ \ B(1|-1)\ \ M(5|-4)$

Lösung A4

a) Wenn $ABCD$ ein Trapez sein soll, müssen zwei Seiten parallel zueinander verlaufen. Somit gilt: $m_{\overline{AB}} || m_{\overline{CD}} \vee m_{\overline{BC}} || m_{\overline{AD}}$.

$m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2} \quad m_{\overline{CD}} = -\frac{3{,}5}{2} \quad m_{\overline{BC}} = \frac{4}{2} = 2 \quad m_{\overline{AD}} = \frac{6}{3} = 2$

$m_{\overline{BC}} || m_{\overline{AD}}$, das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

b) Flächeninhalt eines Trapezes $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten sind. In unserem Falle ist dies die Strecke $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}\ LE$

$d_{\overline{AD}} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (7{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{45}\ LE$

Die Höhe h ist die senkrechte Strecke zwischen den beiden Parallelen. Da wegen $m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2}$ und $m_{\overline{AD}} = 2$ die Strecke $\overline{AB}$ senkrecht auf $\overline{AD}$ steht, ist $h = \overline{AB}$.

$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (0-1{,}5)^2} = \sqrt{11{,}25}\ LE$

$A_{ABCD} = \frac{\sqrt{20}+\sqrt{45}}{2} \cdot \sqrt{11{,}25}\ FE = 18{,}75\ FE$

Lösung A5

a) $g(1) = y_A = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3};\quad A(1|-\frac{2}{3})$

Geradenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ von A:

$A'(x_A'|y_A') \implies y_A' = \frac{1}{3}x_A' - 1$

$d_{\overline{AA'}} = \sqrt{(x_A'-1)^2 + \left(y_A' - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{10} \quad | \quad ^2$

$10 = (x_A'-1)^2 + \left(y_A' + \frac{2}{3}\right)^2 = (x_A'-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x_A' - 1 + \frac{2}{3}\right)^2$

$10 = (x_A'-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x_A' - \frac{1}{3}\right)^2$

$10 = x_A'^2 - 2x_A' + 1 + \frac{1}{9}x_A'^2 - \frac{2}{9}x_A' + \frac{1}{9}$

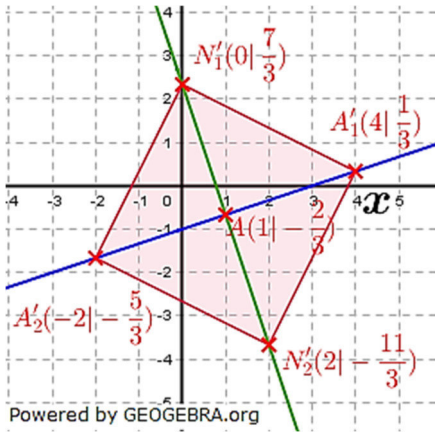
$10 = \frac{10}{9}x_A'^2 - \frac{20}{9}x_A' + \frac{10}{9}$

$\frac{10}{9}x_A'^2 - \frac{20}{9}x_A' + \frac{10}{9} - 10 = 0 \quad | \quad \cdot 9$

$10x_A'^2 - 20x_A' + 10 - 90 = 0 \quad | \quad :10$

$x_A'^2 - 2x_A' - 8 = 0 \implies x_{A_1}' = 4;\quad x_{A_2}' = -2$

$y_{A_1}' = \frac{1}{3};\quad y_{A_2}' = -\frac{5}{3}$



Die beiden Geradenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ zu A haben die Koordinaten $A_1'\left(4\middle|\frac{1}{3}\right)$ und $A_2'\left(-2\middle|-\frac{5}{3}\right)$.

Normalenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ von A:

$n(x) = -3(x-1) - \frac{2}{3} = -3x + 3 - \frac{2}{3} = -3x + \frac{7}{3}$

$N'(x_N'|y_N') \implies y_N' = -3x_N' + \frac{7}{3}$

$d_{\overline{AN'}} = \sqrt{(x_N'-1)^2 + \left(y_N' - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{10} \qquad | \quad ^2$

$10 = (x_N'-1)^2 + \left(y_N' + \frac{2}{3}\right)^2 = (x_N'-1)^2 + \left(-3x_N' + \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right)^2$

$10 = (x_N'-1)^2 + (-3x_N'+3)^2 = {x_N'}^2 - 2x_N' + 1 + 9{x_N'}^2 - 18x_N' + 9$

$10 = 10{x_N'}^2 - 20x_N' + 10$

$10{x_N'}^2 - 20x_N' = 0$

$x_N' \cdot (10x_N' - 20) = 0$

$x_{N_1}' = 0; \quad x_{N_2}' = 2$

$y_{N_1}' = \frac{7}{3}; \quad y_{N_2}' = -6 + \frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$

Die beiden Normalenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ zu A haben die Koordinaten $N_1'\left(0\middle|\frac{7}{3}\right)$ und $N_2'\left(2\middle|-\frac{11}{3}\right)$.

b) Die Strecke $\overline{A_1'A_2'}$ ist die Diagonale des Quadrats. Gemäß Aufgabenstellung hat die Strecke die Länge $2 \cdot \sqrt{10}\,LE$. Die Diagonale eines Quadrates errechnet sich aus $d = a \cdot \sqrt{2}$.

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{5}$

Fläche des Quadrates: $A = a^2 = (2 \cdot \sqrt{5})^2 = 20\,FE$

Lösung A6

a) Mittelpunkt $\overline{PQ}$: $M(x_M|y_m)$

$x_M = \frac{(4+(-1{,}5))}{2} = \frac{5}{4} \qquad y_M = \frac{(2{,}5+(-1{,}25))}{2} = \frac{5}{8}$

$M(\frac{5}{4}|\frac{5}{8})$

Gerade durch M mit $m = -\frac{2}{3}$:

$g(x) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{8} = -\frac{2}{3}x + \frac{35}{24}$

b) Gerade durch P und Q:

$m_{\overline{PQ}} = \frac{2{,}5-(-1{,}25)}{4-(-1{,}5)} = \frac{5}{8}$

$h(x) = \frac{5}{8}(x-4) + 2{,}5 = \frac{5}{8}x$

Lösung A7

Der kürzeste Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist die Strecke vom Schnittpunkt der Orthogonalen der Geraden mit der Geraden und dem Punkt selbst.

Gleichung der Geraden: $g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{51}{10}$

Gleichung der Orthogonalen durch den Ursprung: $n(x) = \frac{5}{3}x$

$g(x) \cap n(x)$:

$\frac{5}{3}x = -\frac{3}{5}x + \frac{51}{10}$
$\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}x = \frac{51}{10}$
$\frac{34}{15}x = \frac{51}{10}$
$x = \frac{15 \cdot 51}{34 \cdot 10} = \frac{9}{4}$
$x_S = \frac{9}{4} \quad y_S = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{4} \quad S\left(\frac{9}{4} \middle| \frac{15}{4}\right)$
Strecke $\overline{OS}$: $d = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} = 4{,}37\ LE$

Lösung A8

$x_M = \frac{0+\frac{3}{t}}{2} = \frac{3}{2t}; \quad y_M = \frac{0{,}75t+(-1{,}5t)}{2} = -\frac{3}{8}t$
$M(\frac{3}{2t} | -\frac{3}{8}t)$

Lösung A9

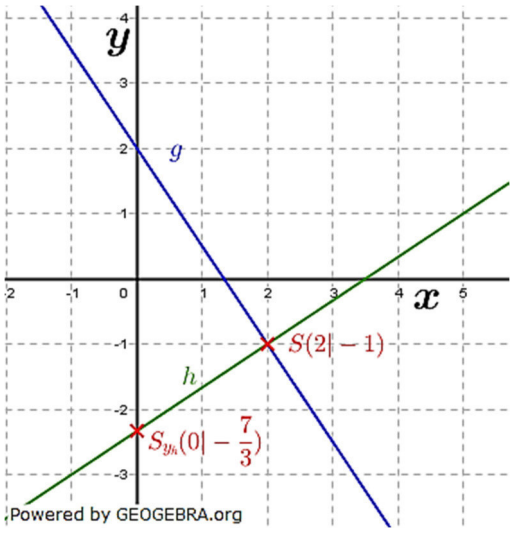
$g(x) = -1{,}5x + 2$

a) $g(2) = -1{,}5 \cdot 2 + 2 = -1$
$S(2|-1)$
$h(x) = \frac{2}{3}(x-2) - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$
$S_{y_h}\left(0 \middle| -\frac{7}{3}\right)$
Zeichnung siehe Graphik rechts.

b) Abstand $\overline{SS_{y_h}}$:

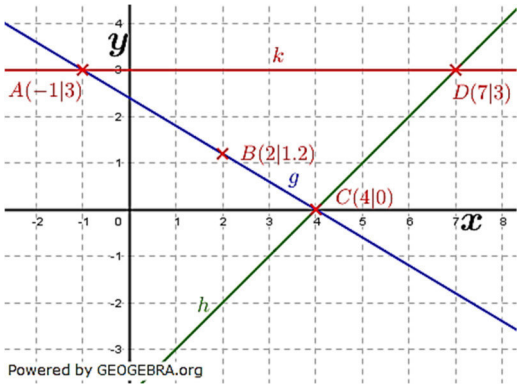
$$\boldsymbol{d = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-1 - \left(-\frac{7}{3}\right)\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{4 + \frac{16}{9}} = 2{,}40}$$



Lösung A10

Gerade g:
$m_g = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1{,}2-3}{2-(-1)} = \frac{-1{,}8}{3} = -\frac{3}{5}$
$g(x) = -\frac{3}{5}(x+1) + 3 = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$
Schnittpunkt $g \cap k$: $A(-1|3)$
Schnittpunkt $g \cap h$: $C(4|0)$
Schnittpunkt $h \cap k$: $D(7|3)$
Das Dreieck hat die Eckpunkte A, C und D.
Strecke $\overline{AD}$ ist Grundseite, Abstand von C zu k ist die Höhe.
Strecke $\overline{AD} = 8\ LE$, Höhe $h = 3\ LE$.
Fläche Dreieck: $A = \frac{\overline{AD}}{2} \cdot h$
$A_{ADC} = \frac{8}{2} \cdot 3 = 12\ FE$



Lösung A11

Gerade K_f: $f(x) = -\frac{1}{2}x$ | Aus Grafik abgelesen

Orthogonale K_n zu K_f durch A:

$n(x) = 2(x-4) + 0{,}5 = 2x - 7{,}5$

Schnittpunkt S von $K_f \cap K_n$:

$2x - 7{,}5 = -\frac{1}{2}x \implies x_S = 3; \quad y_S = -1{,}5; \quad S(3|-1{,}5)$

Abstand $\overline{AS}$:

$$d_{\overline{AS}} = \sqrt{(4-3)^2 + \left(0{,}5-(-1{,}5)\right)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Lösung A12

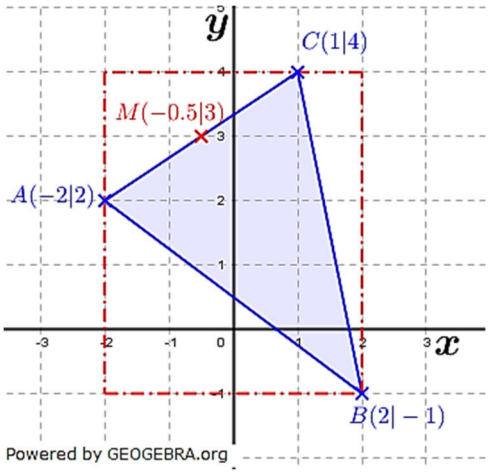
a) Mit $B(x_2|y_2)$ und $A(x_1|y_1)$ ergibt sich der Abstand einer Strecke aus dem Satz des Pythagoras mit

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$d = \sqrt{(2-(-2))^2 + ((-1)-2)^2}$

$d = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{25}$

$d = 5\ LE$



b) Mit $A(x_1|y_1)$ und $C(x_2|y_2)$ ergibt sich der Mittelpunkt einer Strecke aus:

$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$

$x_M = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5; \quad y_M = \frac{2+4}{2} = 3$

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AC}$ sind $M(-0{,}5|3)$.

c) Über die Punktsteigungsformel $g(x) = m(x-x_1) + y_1$ erhalten wir für die Gerade durch A und C:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-2}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$

$g(x) = \frac{2}{3}(x-1) + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

d) Die Fläche des Dreiecks ABC bestimmt sich aus der Fläche des (rot umrandeten) Rechtecks abzüglich der 3 äußeren Dreiecke über den Seiten des inneren Dreiecks.

$A_{Rechteck} = 4 \cdot 5 = 20\ FE$

$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ FE$

$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{AC}} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ FE$

$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{CB}} = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2{,}5\ FE$

$A_{ABC} = 20 - 6 - 3 - 2{,}5 = 8{,}5\ FE$

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zum Winkel bei Geraden.

Aufgabe A1

K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1;\ x \in \mathbb{R}$. Unter welchem Winkel schneidet f die x–Achse?

Aufgabe A2

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B. Bestimme die Steigung von g. Gib die Geradengleichung und den Steigungswinkel in ° an.

a) $A(-1|3)$ $B(2|-2)$

b) $A\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{3}{2}\right)$ $B(3|-1)$

c) $A(-4|-2)$ $B\left(\frac{1}{2}\middle|-\frac{3}{2}\right)$

Aufgabe A3

Die Gerade g schneidet die x–Achse in $x = 3$ und verläuft durch den Punkt $P(4|-1)$. Bestimme die Geradengleichung und den Steigungswinkel.

Aufgabe A4

Bestimme die Geradengleichung.

a) Die Gerade g schneidet die x–Achse unter $45°$ und verläuft durch $Q\left(\frac{4}{5}\middle|-\frac{3}{2}\right)$.

b) $P(-1|-3)$ liegt auf der Geraden g. Diese steigt bezüglich der positiven x–Achse unter dem Winkel $135°$ an.

Aufgabe A5

Gegeben sind die Geraden g mit $g(x) = -x + 2$, h mit $h(x) = -1{,}5x - 3$ und k mit $k(x) = \frac{2}{3}x + 1$.

a) Ermittle den Schnittwinkel der Geraden g und h bzw. h und k.

b) Bestimme den Steigungswinkel der Geraden k.

Aufgabe A6

Gegeben sind die Punkte $A(-1|-2)$, $B(1|-3)$, $C(6|1)$ und $D(3|3)$.

a) Berechne die Länge einer Diagonalen des Vierecks $ABCD$.

b) In welchem Punkt schneiden sich die Diagonalen? Bestimme den Schnittwinkel.

c) Berechne den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Aufgabe A7

Für welche Werte von t verläuft die Gerade g durch $A(3|4t^2)$ und $B(0|0{,}5t)$ parallel zur x–Achse?

Aufgabe A8

K_f ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1;\ x \in \mathbb{R}$. Unter welchem Winkel schneidet f die x–Achse?

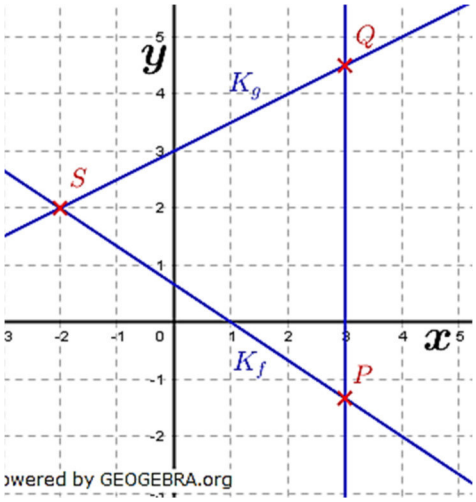
Aufgabe A9

Gegeben sind die Geraden g und h mit $g(x) = -2x + 3$ und $h(x) = 0{,}3x + 0{,}5$. Bestimme den Schnittwinkel der Geraden g und h.

Aufgabe A10

Die Abbildung zeigt die Schaubilder K_f und K_g von linearen Funktionen f und g.

a) Entnimm den jeweiligen Funktionsterm aus der Abbildung.
b) Bestimme den Schnittpunkt S von K_f und K_g.
c) Die drei Punkte S, P und Q sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Berechne den Flächeninhalt.
d) Bestimme den Winkel $\alpha = \sphericalangle PSQ$.
e) Der Punkt $T(x_1 | -3)$ liegt auf K_f. Berechne die x–Koordinate von T.

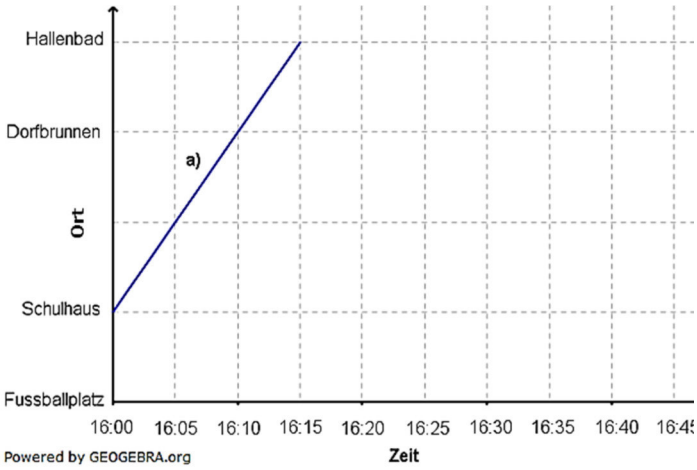


Aufgabe A11

Lies zunächst die ganze Beschreibung und zeichne dann die beschriebenen Bewegungen ins Diagramm ein. Beschrifte die einzelnen Abschnitte deutlich mit den Buchstaben (Bewegung a) ist bereits vorgegeben.

Marion absolviert ihr Lauftraining. Hier die einzelnen Abschnitte ihrer Bewegung:

a) Sie startet um 16:00 Uhr beim Schulhaus und erreicht um 16:15 das Hallenbad.
b) Dort bleibt sie 5 Minuten lang stehen.
c) Dann joggt sie *gleich* schnell wie in Abschnitt a) bis zum Fußballplatz.



Martin fährt mit dem Fahrrad.

d) Er startet nach Hannah und fährt vom Fußballplatz zum Hallenbad.
Dabei ist er *doppelt* so schnell unterwegs wie Marion in den Abschnitten a) und c). Beim Dorfbrunnen überholt er Marion.
Um wieviel Uhr ist Martin abgefahren.

Lösung A1

Aus $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tan(\alpha)$ folgt für den gesuchten Winkel:

$tan(\alpha) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctan(0{,}5) = 26{,}57°$

Hinweis: Zur korrekten Ermittlung des Winkels in ° muss der Modus des GTR/WTR auf DEG eingestellt sein (Gegebenenfalls Änderung im Menu MODE durchführen).
Die mathematische Funktion $arctan$ wird bei den TRs über tan^{-1} aufgerufen.

Lösung A2

a) $m_{\overline{AB}} = \frac{-2-3}{2-(-1)} = -\frac{5}{3}$

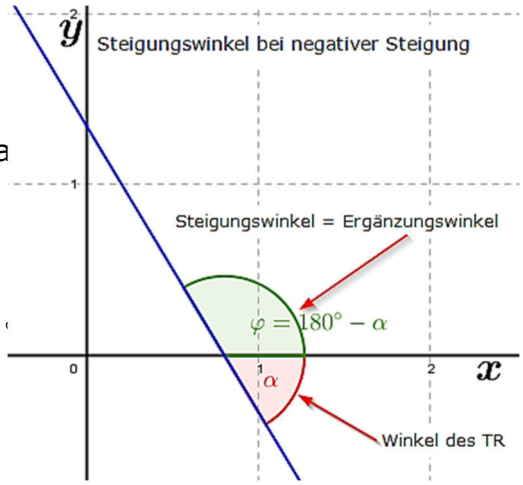
$f(x) = -\frac{5}{3}(x-2) - 2 = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$

$tan(\alpha) = -\frac{5}{3} \quad \alpha = arctan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -59\,°$

Bei einer negative Steigung ist der Ergänzungswinkel zu $180\,°$ zu bestimmen, da als Steigungswinkel (Schnittwinkel mit der x-Achse) stets der Winkel gilt, den die x-Achse mit der Geraden **gegen** den Uhrzeigersinn bildet.

Ergänzungswinkel zu $180\,°$: $180\,° - 59\,° = 121\,°$

Der Steigungswinkel beträgt $121\,°$.



b) $m_{\overline{AB}} = \frac{-1-1{,}5}{3-(-\frac{2}{3})} = -\frac{15}{22}$

$f(x) = -\frac{15}{22}(x-3) - 1 = -\frac{15}{22}x + \frac{23}{22}$

$tan(\alpha) = -\frac{15}{22} \quad \alpha = arctan^{-1}\left(-\frac{15}{22}\right) = -34{,}3\,°$

Ergänzungswinkel zu $180°$: $180\,° - 34{,}3\,° = 145{,}7\,°$

Der Steigungswinkel beträgt $145{,}7°$.

c) $m_{\overline{AB}} = \frac{-1{,}5-(-2)}{0{,}5-(-4)} = \frac{1}{9} \quad f(x) = \frac{1}{9}(x+4) - 2 = \frac{1}{9}x - \frac{14}{9}$

$tan(\alpha) = \frac{1}{9} \quad \alpha = arctan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = 6{,}3\,°$

Der Steigungswinkel beträgt $6{,}3\,°$.

Lösung A3

Geradengleichung:

$g(x) = -(x+1) + 4$ | Punkt-Steigungsform

$g(x) = -x + 3$

$m = tan(\alpha) = -1 \quad \alpha = arctan^{-1}(-1) = -45\,°$

Ergänzungswinkel zu $180\,°$: $180\,° - 45\,° = 135\,°$

Der Steigungswinkel beträgt $135\,°$.

Lösung A4

a) $\alpha = 45°; \quad tan(45°) = 1 = m_g$

Gerade: $g(x) = x - \frac{4}{5} - \frac{3}{2} = x - \frac{23}{10}$

b) $\alpha = 135°; \quad tan(135°) = -1 = m_g$

Gerade: $g(x) = -(x+1) - 3 = -x - 4$

Lösung A5

a) Geraden g und h:

$tan(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{-1{,}5-(-1)}{1+(-1{,}5)\cdot(-1)}\right| = \left|\frac{-0{,}5}{2{,}5}\right| = \frac{1}{5}$

$\alpha = arctan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 11{,}3°$

Gerade $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{k}$:

$1 + (-1{,}5) \cdot \frac{2}{3} = 0 \Longrightarrow m_h \cdot m_k = -1$

Die Geraden h und k stehen senkrecht aufeinander. Der Schnittwinkel beträgt $90\,°$.

b) $tan(\alpha_k) = \frac{2}{3} \quad \alpha_k = arctan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}69°$

Der Steigungswinkel beträgt $33{,}69\,°$.

Lösung A6

a) Eine Diagonale ist entweder die Strecke $\overline{AC}$ oder $\overline{BD}$.

$d_{\overline{AC}} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{49+9} = 7{,}6\ LE$

$d_{\overline{BD}} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{4+36} = 6{,}3\ LE$

b) Gerade $\overline{AC}$: $m_{\overline{AC}} = \frac{1-(-2)}{6-(-1)} = \frac{3}{7} \quad f(x) = \frac{3}{7}(x-6) + 1 = \frac{3}{7}x - \frac{11}{7}$

Gerade $\overline{BD}$: $m_{\overline{BD}} = \frac{3-(-3)}{3-1} = 3 \quad g(x) = 3(x-3) + 3 = 3x - 6$

Schnittpunkt S:

$f(x) \cap g(x)$

$\frac{3}{7}x_S - \frac{11}{7} = 3x_S - 6 \Longrightarrow \ x_S = \frac{31}{18}; \ \ y_S = -\frac{5}{6}$

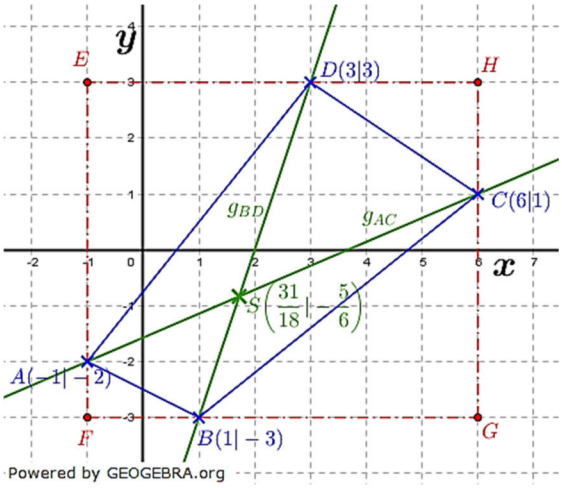
Die Diagonalen schneiden sich in $S\left(\frac{31}{18}\middle|-\frac{5}{6}\right)$.

$tan(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{3-\frac{3}{7}}{1+3\cdot\frac{3}{7}}\right| = \left|\frac{\frac{18}{7}}{\frac{16}{7}}\right| = \frac{9}{8}$

$\alpha = arctan^{-1}\left(\frac{9}{8}\right) = 48{,}1\,°$

Ihr Schnittwinkel beträgt $48{,}1\,°$.

Hinweis: Als Schnittwinkel zweier Geraden zählt ***immer*** der ***spitze Winkel***.



c) Fläche des Vierecks $ABCD$ ist die Fläche des Rechtecks $EFGH$ abzgl. der Flächen der vier Außendreiecke AFB, BGC, CHD und DEA.

$A_{EFGH} = 7 \cdot 6 = 42\ FE$

$A_{AFB} = 1\ FE$

$A_{BGC} = 10\ FE$

$A_{CHD} = 3\ FE$

$A_{DEA} = 10\ FE$

$A_{ABCD} = 42 - 1 - 10 - 3 - 10 = 18\ FE$

Das Viereck $ABCD$ *ist* $18\ FE$ *groß.*

Lösung A7

$m_g = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4t^2 - 0{,}5t}{3-0}$

Eine Parallele zur x-Achse hat die Steigung $m_g = 0$.

$\frac{4t^2 - 0{,}5t}{3} = 0 \quad => \quad 4t^2 - 0{,}5t = 0$

$t \cdot (4t - 0{,}5) = 0$

$t_1 = 0; \quad t_2 = \frac{1}{8}$

Für $t_1 = 0$ bzw. $t_2 = \frac{1}{8}$ verläuft die Gerade durch A und B parallel zur x-Achse.

Lösung A8

$tan(\alpha) = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -18{,}43°$

Hinweis: Bei negativen Steigungen zeigt der WTR/GTR einen negativen Winkel an. Im Beispiel den Wert $-18{,}43°$. Dies ist der Winkel, den die x–Achse ***im Uhrzeigersinn*** gesehen mit der Gerade K_f einschließt. Um den Schnittwinkel, den die x–Achse ***gegen den Uhrzeigersinn*** gesehen mit der Geraden K_f einschließt, muss der WTR/GTR-Wert von $180°$ abgezogen werden.

Ergänzungswinkel : $\varphi = 180° - 18{,}43° = 161{,}57°$

Der Schnittwinkel von K_f mit der x-Achse beträgt $\varphi = 161{,}57°$.

Lösung A9

$m_g = -2; \quad m_h = 0{,}3:$

$tan(\varphi) = \left|\frac{m_g - m_h}{1 + m_g \cdot m_h}\right| = \left|\frac{-2-0{,}3}{1+(-2)\cdot 0{,}3}\right| = \left|\frac{-2{,}3}{0{,}4}\right| = \frac{23}{4}$

$\varphi = arctan^{-1}\left(\frac{23}{4}\right) = 80{,}1342°$

Der Schnittwinkel zwischen g und h beträgt etwa $80{,}1°$.

Lösung A10

a) Gerade K_f: $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Gerade K_g: $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

b) $K_f \cap K_g$:

$\frac{1}{2}x + 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Longrightarrow x_S = -\frac{15}{7}; \quad y_S = \frac{27}{14}$

$S(-\frac{15}{7} | \frac{27}{14})$

c) $y_Q = f(3) = \frac{9}{2}; \quad Q\left(3 \middle| \frac{9}{2}\right)$

$y_P = g(3) = -\frac{3}{2}; \quad P\left(3 \middle| -\frac{3}{2}\right)$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) \cdot \left(3 - \left(-\frac{15}{7}\right)\right) = \frac{108}{7} = 15{,}4\ FE$

d) $tan(\alpha_1) = m_g = -\frac{2}{3}$ $\qquad \alpha_1 = arctan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = 33{,}69°$

$tan(\alpha_2) = m_f = \frac{1}{2}$ $\qquad \alpha_1 = arctan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}57°$

Schnittwinkel: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 33{,}69° + 26{,}57° = 60{,}26°$

Alternativ über $tan(\alpha) = \left|\frac{m_f - m_g}{1 + m_f \cdot m_g}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}\right| = \left|\frac{\frac{7}{6}}{\frac{4}{6}}\right| = \frac{7}{4}$

$\alpha = arctan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right) = 60{,}26°$

e) $g(x) = -3$

$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = -3$

$-\frac{2}{3}x = -3{,}5$

$x = \frac{21}{4}$

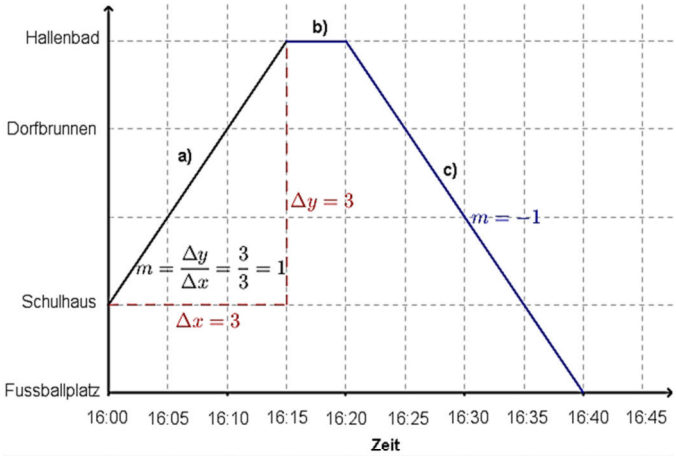
Der Punkt hat die Koordinaten $T\left(\frac{21}{4}\middle|-3\right)$.

Lösung A11

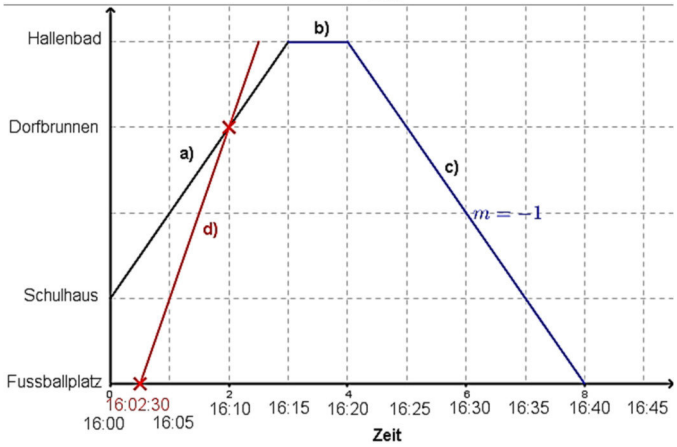
Da bei dieser Aufgabe nur die x-Achse skaliert ist, müssen für die weitere Lösung der Aufgabe „Kästchen gezählt" werden.

a) Bereits eingetragen.

b)-c) Die weiteren Eintragungen siehe Grafik rechts.



d) Um die „Martin"-Aufgabe lösen zu können, benötigen wir zunächst die Gleichung der Geraden von Marion. Wir ermitteln aus der Grafik des Weges von a) die Steigung mit $m = 1$, der y-Achsenabschnitt ist $c = 1$. Marions Bewegungsgerade hat somit die Gleichung $g(x) = x + 1$.



Gemäß Aufgabenstellung überholt Martin Marion beim Dorfbrunnen. Dies ist in nebenstehender Grafik durch den roten x-Punkt gekennzeichnet. Martin ist doppelt so schnell wir Marion, also hat Martin die Steigung $m = 2$. Die Gerade geht durch den x-Punkt $P(2|3)$, seine Bewegungsgerade hat somit die Gleichung:

$h(x) = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1$

Um festzustellen, wann Martin losgefahren ist, benötigen wir nun die Nullstelle seiner Bewegungsgeraden, also $2x - 1 = 0$. Dies führt zu $x = \frac{1}{2}$. Martin ist also ein halbes Kästchen nach $16{:}00$ losgefahren, das war um $16{:}02{:}30$.

Aufgabe A1

Die Geraden g_1, g_2 und g_3 sind durch folgende Gleichungen festgelegt:

$g_1(x) = 2x - 2$ $\qquad$ $g_2(x) = -\frac{2}{3}x + 8$ $\qquad$ $g_3(x) = 3$

Die Geraden bilden mit der x–Achse ein Trapez mit Inhalt $A = 24\,FE$.
Überprüfe diese Behauptung.

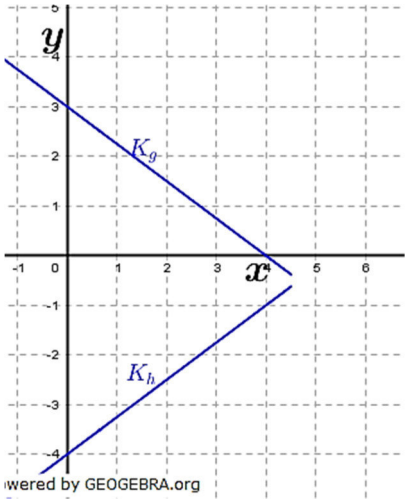
Aufgabe A2

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen K_g und K_h zweier Funktionen g und h.

a) K_g und K_h schneiden sich in S. Berechne die exakten Koordinaten von S.

b) Die Geraden bilden mit der x–Achse und der y–Achse jeweils ein Dreieck. Untersuche, ob folgende Behauptung stimmt:
Der eine Flächeninhalt ist 49-mal so groß wie der andere.

c) Berechne $g(1{,}5) - h(1{,}5)$. Interpretiere das Ergebnis.



Aufgabe A3

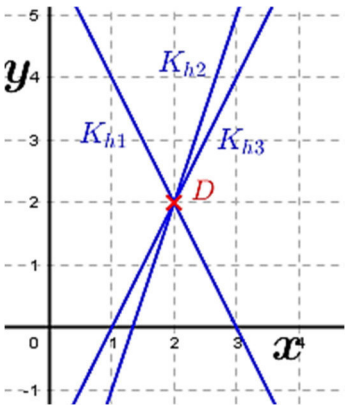
K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0{,}3x - 1{,}5;\ x \in \mathbb{R}$. Skizziere den Graph der Funktion g und beschreibe den Zusammenhang der beiden Graphen.

a) $g(x) = f(x) + 2$ $\qquad$ b) $g(x) = 2f(x)$

c) $g(x) = -f(x)$ $\qquad$ d) $g(x) = f(-x)$

Aufgabe A4

Gegeben ist die Gerade g durch die Gleichung $g(x) = 2x + 8{,}2$. Bestimme aus der Abbildung die Gerade, die parallel zu g durch den Punkt D verläuft. Bestimme die Gleichung der gesuchten Geraden. Begründe deine Wahl.



Aufgabe A5

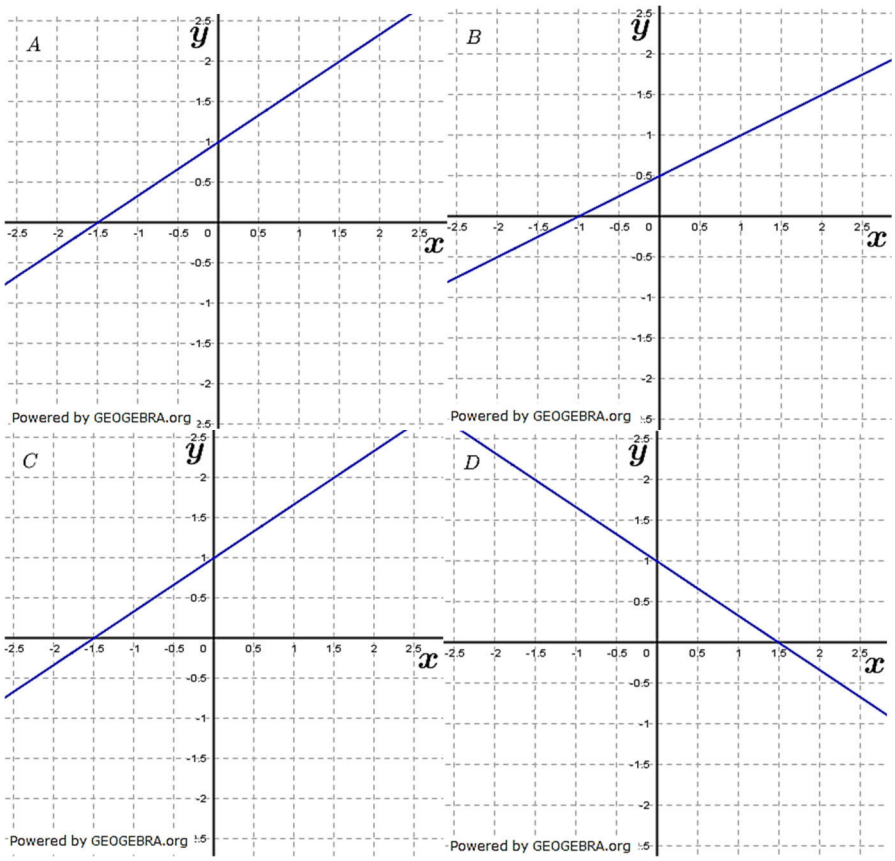
Die Wertetabelle zeigt eine lineare Funktion $f(Y1 \triangleq f(x))$. Begründe diese Aussage. Beschreibe den Verlauf des Graphen von f. Wo liegt die Nullstelle von f?

x	-1	0	1	2
$Y1$	12,5	10	7,5	5

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 4

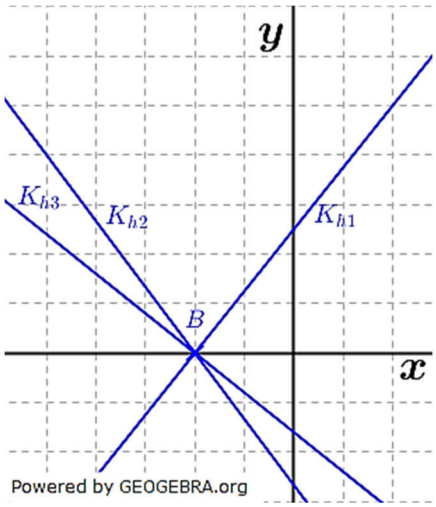
Aufgabe A6

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x + 1;\ \ x \in \mathbb{R}$. Eines der dargestellten Schaubilder gehört zu f. Welche Schaubilder können nicht zu f gehören? Begründe deine Entscheidung, indem du bei jedem nichtzutreffenden Schaubild mindestens eine Eigenschaft nennst, die mit den Funktionseigenschaften von f nicht vereinbar ist.



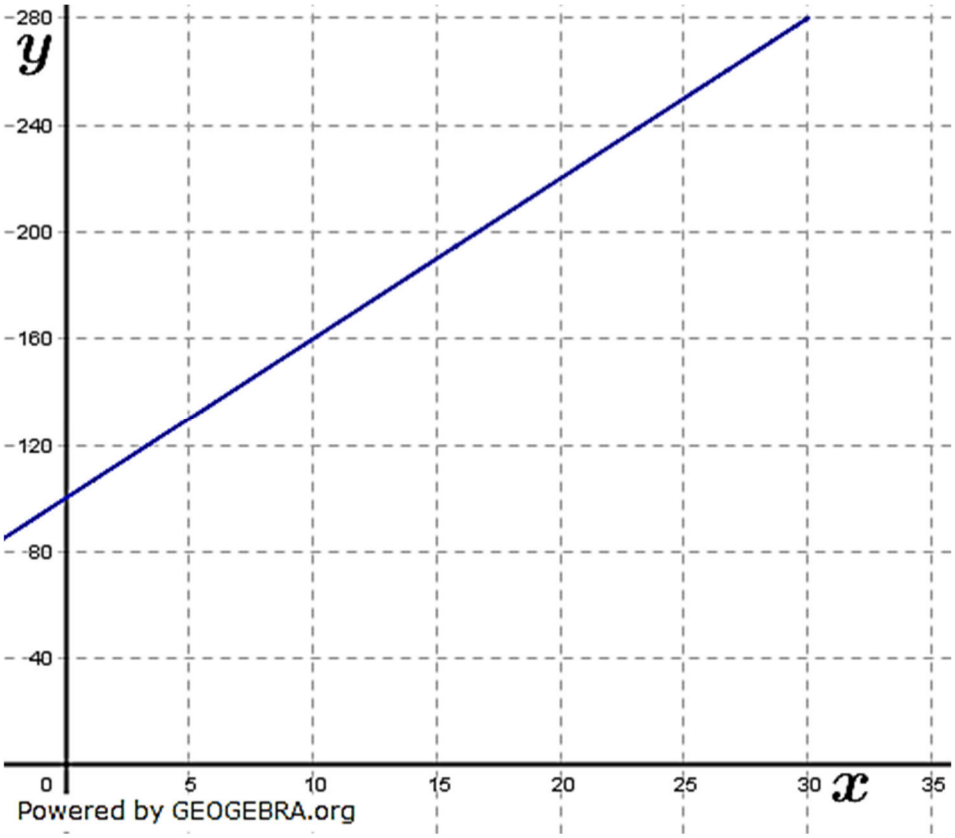
Aufgabe A7

Eine Gerade g hat die Gleichung $g(x) = \frac{3}{4}x - 12$.
Wähle eine geeignete Achseneinteilung und bestimme aus der Abbildung die Gerade, die durch den Punkt B verläuft und g senkrecht schneidet. Begründe deine Wahl.

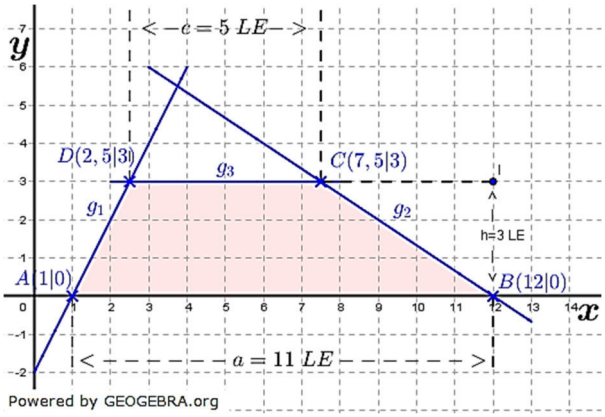


Aufgabe A8

Herr Bär bindet Bücher in Heimarbeit. Die Abbildung zeigt seine monatlichen Kosten in € bei der Herstellung von x Büchern. Stelle für Herrn Bär einen Term zur Berechnung seiner Kosten auf. Welchen Preis muss er festlegen, damit die Kosten bei einem monatlichen Absatz von 10 Büchern gedeckt sind?
Wie groß wäre sein Gewinn, wenn er 25 Bücher im Monat verkaufen würde?



Lösung A1



Wenn die drei Geraden mit der x–Achse ein Trapez bilden sollen, müssen entweder zwei der Geraden parallel sei, sprich dieselbe Steigung haben oder aber eine der Geraden ist parallel zur x–Achse.

$m_{g_1} = 2;\quad m_{g_2} = -\frac{2}{3};\quad m_{g_3} = 0.$

Somit ist $g_1 \nparallel g_2 \nparallel g_3$, $g_3 \parallel x$-Achse.

Flächenformel Trapez: $A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h.$

h ist der Abstand der beiden parallelen Seiten, also $h = 3$. a ist die Grundseite, also die Strecke zwischen den Nullstellen von g_1 und g_2. c ist der Abstand zwischen den Schnittpunkten von g_1 und g_2 mit g_3.

Nullstelle g_1: $N_{g_1}(1|0)$ Nullstelle g_2: $N_{g_2}(12|0) \Rightarrow a = 11$

$g_1 \cap g_3$: $S_{g_1g_3}(2{,}5|3)$ $g_2 \cap g_3$: $S_{g_2g_3}(7{,}5|3) \Rightarrow c = 7{,}5 - 2{,}5 = 5$

$A_{Trapez} = \frac{11+5}{2} \cdot 3 = 24$ **q.e.d.**

Lösung A2

a) $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

$h(x) = \frac{3}{4}x - 4$

$g \cap h$:

$-\frac{3}{4}x + 3 = +\frac{3}{4}x - 4$

$\frac{3}{2}x = 7;\quad x_S = \frac{14}{3}$

$g\left(\frac{14}{3}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{3} + 3 = -\frac{1}{2}$

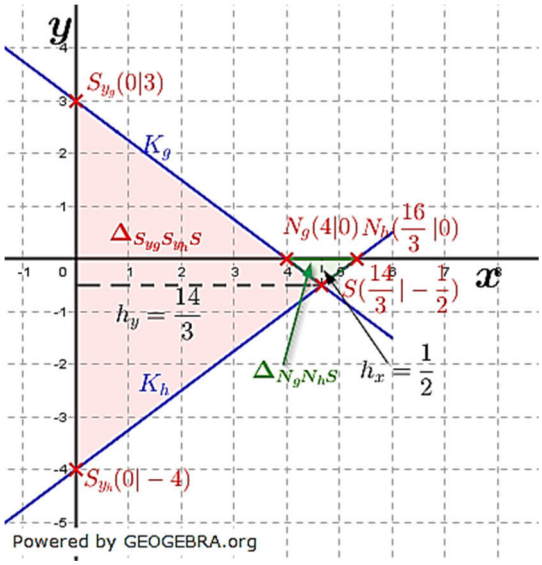
$S\left(\frac{14}{3}\middle|-\frac{1}{2}\right)$

b) $N_g(4|0);\ S_{y_g}(0|3);$

$N_h\left(\frac{16}{3}\middle|0\right);\ S_{y_h}(0|-4)$

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation:



Fläche des Dreiecks mit der x–Achse:

$g = \overline{N_gN_h} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3};\ g_h = h_x = \frac{1}{2}$

$A_{N_gN_hS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Fläche des Dreiecks mit der y–Achse:

$g = \overline{S_{y_g}S_{y_h}} = 3 - (-4) = 7;\ g_h = h_y\ \frac{14}{3}$

$A_{S_{y_g}S_{y_h}S} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{14}{3} = \frac{49}{3}$

Die Behauptung stimmt.

c) $g(1{,}5) - h(1{,}5) = 1{,}875 - (-2{,}875) = 4{,}75$

Der Abstand der Punkte P und Q beträgt $4{,}75\ LE$.

$g(1{,}5) - h(1{,}5) > 0$

G verläuft in $x = 1{,}5$ oberhalb von H.

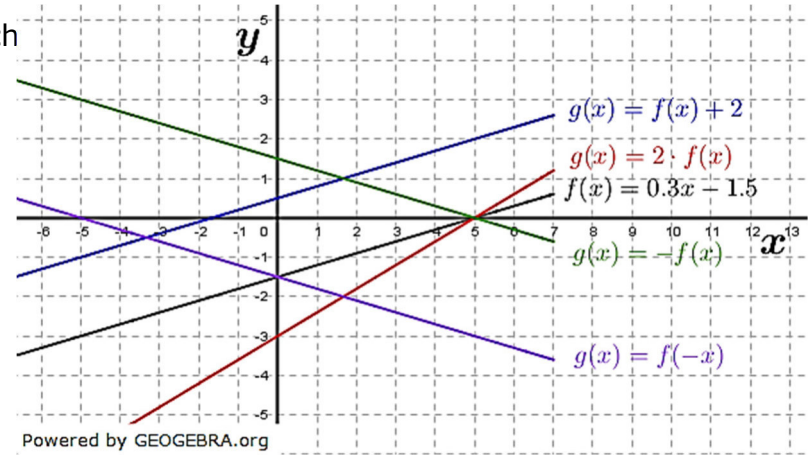
Lösung A3

a) $g(x) = 0{,}3x + 0{,}5$
Gerade um 2 Stellen nach oben verschoben.

b) $g(x) = 0{,}6x - 3$
Gerade mit Faktor $k = 2$ in y-Richtung gestreckt.

c) $g(x) = -0{,}3x + 1{,}5$
Gerade an x–Achse gespiegelt.

d) $g(x) = -0{,}3x - 1{,}5$
Gerade an y–Achse gespiegelt.



Lösung A4

Die gesucht Gerade ist die Gerade h_2. h_1 hat eine Steigung $m < 2$. h_3 ist eine fallende Gerade mit $\boldsymbol{m < 0}$.

Lösung A5

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist konstant mit $-2{,}5$. Die Gerade verläuft aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten.
$f(x) = -2{,}5x + 10$
Nullstelle mit $f(x) = 0$:
$-2{,}5x + 10 = 0 \;\; => \;\; x = 4$
f schneidet die x–Achse in $N(4|0)$.

Lösung A6

Schaubild A gehört zur Funktion f, denn:

1) Schaubild B schneidet die y–Achse nicht in $S_y(0|1)$;
2) Die Steigung von Schaubild D ist negativ;
3) Die Steigung von Schaubild C ist nicht $\frac{2}{3}$.

Lösung A7

Die senkrechte Gerade zu g hat die Steigung $m = -\frac{4}{3}$. Eine solche Gerade durch $B(-x_B|0)$ hat die Gleichung $h(x) = -\frac{4}{3}(x + x_B) = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}x_B$.
Wählt man eine 1-er Schritteinteilung, so lautet der Punkt $B(-1|0)$ und die Geradengleichung $h(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$. Dies ist für K_{h_2} der Fall.
Wählt man eine 2-er Schritteinteilung, so lautet der Punkt $B(-4|0)$ und die Geradengleichung $h(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$. Auch dies ist nur für K_{h_2} der Fall.

Lösung A8

Aus der Grafik lesen wir ab, dass die Fixkosten bei 100 € liegen (Schnittpunkt mit der y–Achse). Bei Herstellung von 10 Büchern entstehen laut Grafik 160 € Kosten. Die Kostenfunktion K lautet somit $K(x) = 6x + 100$.

Der Preis, der bei einem monatlichen Absatz von 10 Büchern die Kosten deckt ist $K(10) = 16\,€$.

Die Erlösfunktion E lautet bei einem Preis von 16 €/Buch $E(x) = 16x$. Die Gewinnfunktion G ist die Differenzfunktion aus Erlösfunktion minus Kostenfunktion.
$G(x) = E(x) - K(x) = 16x - 6x - 100 = 10x - 100$.
Der Gewinn bei einem Absatz von 25 Büchern/Monat ist $E(25) = 150\,€$.

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu anwendungsorientierten Themen.

Aufgabe A1

Da das Gasvolumen von der Temperatur anhängt, kann man ideale Gase (z.B. Helium) zu Temperaturmessungen verwenden. Eine Messung von Temperatur und Volumen hat folgende Werte ergeben:

t in °C	0	50	100	150
V in cm^3	5	5,91	6,83	7,74

a) Leiten Sie aus den Messwerten einen Term ab, der einen linearen Zusammenhang von Gasvolumen und Temperatur bestätigt.

b) Bestimme die Volumina für die Temperaturen $-50\,°C$; $-120\,°C$; $-200\,°C$.

c) Wo schneidet die zugehörige Gerade die t–Achse? Welche Bedeutung hat dieser Schnittpunkt?

d) Die allgemeine Gasgleichung lautet: $V = V_0 + \frac{V_0}{273{,}14} \cdot t$.
Um wie viel Prozent weicht der ermittelte Steigungswert vom Literaturwert ab?

Aufgabe A2

Ein Obstbauer liefert Äpfel der Sorte Boskop (B) und Jonathan (J) an den Großmarkt. Die Lieferungen der letzten beiden Wochen lassen sich aus der Tabelle ablesen.

	B	J
W1	400	360
W2	500	175

Der Großhändler überweist für die Lieferung der 1. Woche (*W1*) *294,00 €*, für die Lieferung der 2. Woche (*W2*) *257,50 €*.
Wie hoch ist jeweils der Preis pro kg für die einzelnen Apfelsorten?

Aufgabe A3

Eine Brauerei berechnet für die Auslieferung ihrer Getränkekisten mit dem eigenen Verkaufsfahrzeug *0,80 €* pro Kiste bei monatlichen Fixkosten von *840 €*.

a) Erstelle einen Term für die Kosten der Auslieferung von x Kisten.

b) Ein Logistikunternehmen bietet die Auslieferung von Getränkekisten für *1,15 €* pro Kiste an.
Um welchen Betrag lassen sich dadurch die Kosten bei einem monatlichen Absatz von *2500* Kisten senken?
Bis zu welcher Kistenzahl sollte das Logistikunternehmen die Auslieferung übernehmen?

c) Unterbreite der Brauerei zwei Angebote, sodass sich die Kosten bei einem Absatz von *4000* Kisten um *680 €* reduzieren.

Aufgabe A4

Eine Bergbahn verlangt für eine Bergfahrt *4,50 €*, für eine Talfahrt *3,50 €*.

a) Am Pfingstwochenende nimmt die Betreibergesellschaft *8100 €* ein. Wie viele Berg- und Talfahrten wurden verkauft, wenn insgesamt *2100* Personen die Bergbahn benutzen?

b) In der *36.* Kalenderwoche betragen die Einnahmen *9400 €*. Wie viele Berg- und Talfahrten wurden unter der Woche verkauft, wenn bekannt ist, dass die Zahl der Bergfahrten doppelt so groß ist wie die Zahl der Talfahrten.

Aufgabe A5

Eine Wochenzeitschrift hat eine verkaufte Auflage von *120000* Exemplaren. Der Verkaufspreis für eine Zeitschrift beträgt *2,20 €*. Mit Hilfe der Marktforschung stellt der Verlag fest, dass sich bei einer Preissenkung von *0,20 €* die Auflage um *5000* Exemplare erhöhen lässt. Bei einer Preiserhöhung von *0,20 €* verliert man *5000* Käufer.

a) Berechne den Preis bei einer Auflage von *140000* Exemplaren. Welcher Stückpreis ergibt sich bei einer Auflage von x Exemplaren?

b) Welche Auflage kann der Verlag erwarten, wenn er den Preis der Zeitschrift auf *1,50 €* senkt?

Aufgabe A6

In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen *R1* und *R2* die Endprodukte *E1* und *E2* hergestellt. Die Tabelle beschreibt den Materialfluss pro Mengeneinheit (ME).

	E1	*E2*
R1	*5*	*1*
R2	*2*	*3*

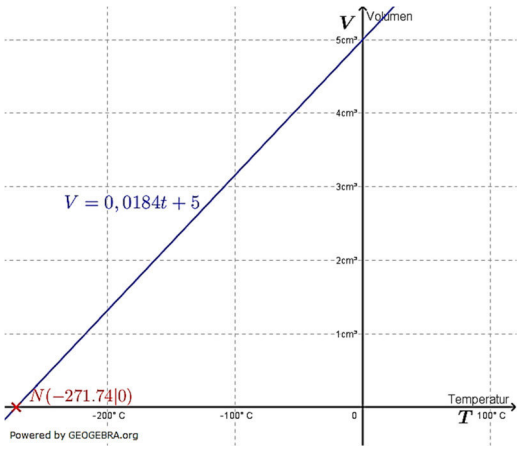
Der Betrieb hat zur Zeit jeweils *780 ME* von *R1* und *R2* auf Lager. Wie viele Endprodukte kann man davon produzieren?

Aufgabe A7

Die Schüler der Jahrgangsstufe 1 und 2 feiern ein Fest. Die Kosten betragen *1050 €*. Auf grund des unterschiedlichen Einsatzes bei der Vorbereitung werden die Kosten unterschiedlich verteilt. Zahlt jeder Schüler der Stufe 1 einen Betrag von *6,25 €*, jeder Schüler der Stufe 2 einen Betrag von *7,50 €*, ergibt sich ein Fehlbetrag von *191,25 €*. Erhöht man die zu bezahlenden Beträge auf *7,50 €* und *10 €*, so entsteht ein Überschuss von *32,50 €*.
Wie viele Schüler sind in der Stufe 1 und in der Stufe 2?

Lösung A1

a) Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Volumen ergibt sich aus der Messtabelle mit
$m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{6{,}83-5{,}91}{100-50} = 0{,}0184.$
Mit $V(0) = 5 = V_0$ erhalten wir den Funktionsterm $V(t) = 0{,}0184t + 5$.



b) Über den aufgestellten Funktionsterm lassen sich die angeforderten Werte berechnen zu:

t in °C	-50	-120	-200
V in cm^3	4,08	2,79	1,32

c) Bedingung für die Nullstelle: $V(t) = 0$.
$0 = 0{,}0184t + 5 \quad \Rightarrow \quad t = -273{,}74.$
Die Gerade schneidet die t–Achse bei $-273{,}74$.
Man bezeichnet $-273{,}74\,°C$ als den **absoluten Nullpunkt**.
Im theoretischen absoluten Nullpunkt ($-273{,}14\,°C$) wäre das Volumen gleich null, was in der Praxis jedoch nicht erreichbar ist.

d) Mit dem gegebenen $V_0 = 5$ ergibt sich für die allgemeine Gasgleichung:
$V = V_0 + \frac{V_0}{273{,}14} \cdot t$, die Steigung $m = \frac{V_0}{273{,}14} = \frac{5}{273{,}14} \approx 0{,}01830.$
Der Vergleich der Steigung $m = 0{,}0184$ aus Teilaufgabe a) ergibt eine Abweichung von $0{,}0001$.
Der ermittelte Steigungswert weicht um $0{,}54\%$ vom Literaturwert ab.

Lösung A2

Wir setzen für den Preis von $1\,kg$ Boskop-Äpfeln (B) die Variable x und für $1\,kg$ von Jonathan-Äpfeln (J) die Variable y. Für die einzelnen Überweisungen gilt dann:

(I) $400x + 360y = 294{,}00$ (Woche 1) | $\cdot 5$
(II) $500x + 175y = 257{,}50$ (Woche 2) | $\cdot 4$

(I) $2000x + 1800y = 1470{,}00$
(II) $2000x + 700y = 1030{,}00$
(I)-(II)
$0x + 1100y = 440{,}00$ | $:1100$
$y = 0{,}4$
$y \to (I)$
$400x + 360 \cdot 0{,}4 = 294{,}00$ | -144
$400x = 150$ | $:400$
$x = 0{,}375$

Der Obstbauer erhält für $1\,kg$ Boskop $0{,}375$ €, für $1\,kg$ Jonathan $0{,}40$ €.

Lösung A3

a) *Kostenfunktion der Brauerei:*
Wir setzen für die Anzahl der auszuliefernden Kisten die Variable x. Die Kostenfunktion lautet dann:
$K_B(x) = 0{,}8x + 840$

b) *Kostenfunktion des Logistikunternehmens:*
Wir setzen für die Anzahl der auszuliefernden Kisten die Variable x. Die Kostenfunktion lautet dann:
$K_L(x) = 1{,}15x$
Einsparungspotenzial bei 2500 *Kisten:*
Wir berechnen die Differenz von $K_L(x)$ und $K_B(x)$.
$K_L(x) - K_B(x) = 1{,}15x - 0{,}8x - 840$
$K_L(x) - K_B(x) = 0{,}35x - 840$
Wir berechnen die Differenz für 2500 Kisten:
$K_L(2500) - K_B(2500) = 0{,}35 \cdot 2500 - 840 = 35$
Die Brauerei kann monatlich 35 € sparen, wenn sie die Auslieferung der 2500 Kisten selbst übernimmt.
Grenze der Kistenanzahl für Auslieferung durch Logistikunternehmen:
Hierunter verstehen wir den Break-Even-Point, das ist der Punkt, zu dem die Kosten der Auslieferung durch die Brauerei und durch das Logistik-Unternehmen gleich groß sind. Wir erhalten diesen Punkt über den Schnittpunkt der beiden Kostenfunktionen.
$K_B(x) \cap K_L(x)$
$0{,}8x + 840 = 1{,}15x \quad | \quad -0{,}8x$
$0{,}35x = 840 \quad | \quad :0{,}35$
$x = 2400$
Das Logistikunternehmen sollte die Auslieferung bis zu einer Anzahl von 2400 *Kisten übernehmen.*

c) *Kosten der Brauerei bei* 4000 *Kisten:*
$K_B(4000) = 0{,}8 \cdot 4000\,€ + 840\,€ = 4040\,€$
Kosten bei Vergabe an Fremdunternehmen:
$K_F(4000) = K_B(4000) - 680\,€ = 4040\,€ - 680\,€ = 3360\,€$
Kosten pro Kiste: $\frac{3360\,€}{4000} = 0{,}84\,€$ / Kiste
Angebot 1: $0{,}84\,€$ pro Kiste.
Alternativ z. B. Fixkosten von $560{,}00\,€$:
Kosten pro Kiste: $\frac{3360\,€ - 560{,}00\,€}{4000} = 0{,}70\,€$ / Kiste
Angebot 2: $0{,}70\,€$ pro Kiste zuzüglich Fixkosten von $560{,}00\,€$.

Lösung A4

a) Die Anzahl der Bergfahrten sei x, dann gilt:
Anzahl der Talfahren: $2100 - x$.
Erlös für 2100 Personen: $4{,}5 \cdot x + (2100 - x) \cdot 3{,}50 = 8100$
$x + 7350 = 8100$
$x = 750$
Es wurden 750 *Bergfahrten und 1350 Talfahrten verkauft.*

b) Die Anzahl der Bergfahrten sei x, die der Talfahrten sei y, dann gilt:
$x = 2y$.
Erlös: 94000
$4{,}5 \cdot 2y + 3{,}5 \cdot y = 9400$
$8y = 9400$ | $:9$
$y = 752$
Es wurden 752 *Bergfahrten und 1504 Talfahrten verkauft.*

Lösung A5

a) Zunächst ermitteln wir zwei Punkte von Auflagehöhe und Stückpreis:
$P_1(120000|1{,}20)$ und $P_2(140000|1{,}40)$.
Mit Hilfe dieser beiden Punkte bestimmen wir die Gleichung der Absatzgeraden:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2{,}2 - 1{,}4}{120000 - 140000} = -\frac{0{,}8}{20000} = -\frac{1}{250000}$
$y = -\frac{1}{250000} \cdot (x - 120000) + 2{,}2$ | Punkt-Steigungsformel
$y = -\frac{1}{250000}x + 7$

b) Auflagenhöhe bei Preis von $1{,}5$ €:
$1{,}5 = -\frac{1}{250000}x + 7$ | $-7;\ \cdot -250000$
$x = 137500$
Der Verlag kann mit einer Auflage von 137500 *Exemplaren rechnen.*

Lösung A6

Die Anzahl erzeugter Produkte von $E1$ sei $x\ ME$, die von $E2$ sei $y\ ME$, dann gilt:
$780\ ME$ von $R1$: (1) $5x + y = 780$ | $\cdot 3$
$780\ ME$ von $R2$: (2) $2x + 3y = 780$
(1) $15x + 3y = 2340$
(2) $2x + 3y = 780$
(1)-(2) $13x = 1560$ | $:13$
$x = 120$
$x \to (1)$ $5 \cdot 120 + y = 780$ | -600
$y = 180$
Man kann $120\ ME$ *von* $E1$ *und* $180\ ME$ *von* $E2$ *produzieren.*

Lösung A7

Die Anzahl Schüler Stufe 1 sei x, die von Stufe 2 sei y, dann gilt:
Eingesammelter Geldbetrag Fall 1: $1050 - 191{,}25 = 858{,}75$
Eingesammelter Geldbetrag Fall 1: $1050 + 32{,}5 = 1082{,}50$
Gleichung Fall (1) $6{,}25x + 7{,}5y = 858{,}75$ | $\cdot \frac{4}{3}$
Gleichung Fall (2) $7{,}5x + 10y = 1082{,}50$
(1) $\frac{25}{3}x + 10y = 1145$
(2) $7{,}5x + 10y = 1082{,}50$
(1)-(2) $\frac{5}{6}x = 62{,}50$ | $\cdot \frac{6}{5}$
$x = 75$
$x \to (2)$ $7{,}5 \cdot 75 + 10y = 1082{,}50$ | $-562{,}50;\ :10$
$y = 52$
Die Stufe 1 hat 75 *Schüler, die Stufe 2 hat 52 Schüler.*

Hinweis:

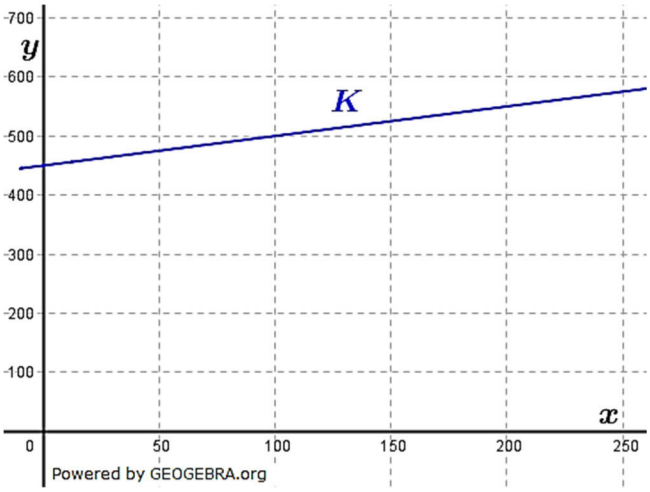
In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu anwendungsorientierten Themen.

Aufgabe A1

Die Abbildung zeigt das Schaubild der linearen Kostenfunktion K.

a) Entnimm dem Schaubild die fixen Kosten und die variablen Stückkosten in €. Gib die Gesamtkosten K bei einer Produktion von x ME an.

b) Welcher Verkaufspreis je ME ist zu erzielen, wenn 175 ME erzeugt werden und kein Verlust entstehen soll?



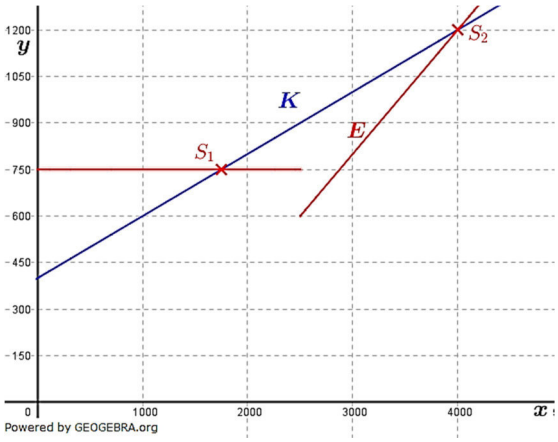
Aufgabe A2

Die Kosten K für die Herstellung von Tennisbällen hängen linear von der produzierten Menge ab.

a) Wie viel kosten 1000 bzw. 3000 Bälle? Gib einen Term für die Kostenfunktion K an. Wie hoch sind die fixen Kosten und die variablen Stückkosten?

Für den Erlös gilt bis 2500 Stück ein Pauschalbetrag. Ab 2500 Stück steigt der Erlös linear mit der Anzahl der verkauften Bälle.

b) Bestimme die Erlösfunktion für $x > 2500$ und die Schnittpunkte S_1 und S_2. Kommentiere die x–Werte zwischen S_1 und S_2.



Aufgabe A3

Ein Eisenträger hat eine Länge $l_0 = 85\,m$ und einen Ausdehnungskoeffizienten $\rho = 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{K}$ ($K \triangleq$ Kelvin).

Ein Funktionsterm $l(\Delta t) = l_0 + \rho \cdot l_0 \cdot \Delta t$ beschreibt die Länge des Eisenträgers in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz Δt in K. Gib den Funktionsterm für die Länge dieses Eisenträgers an. Berechne $l(30)$, $l(40)$ und $l(60)$. Wie lang muss ein Eisenträger sein, wenn er bei einer Temperaturerhöhung um $25\,°K$ 25 mm länger wird?

Aufgabe A4

In einem Betrieb entstehen Kosten K in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.

x (Stück)	50	100	140	200
K (in €)	370	382	390	404

a) Zeichne die gegebenen Punkte in ein Koordinatensystem ein.

b) Zeichne eine Gerade ein, die den Verlauf der Kosten möglichst genau beschreibt.
Bestimme eine Geradengleichung mit dem WTR (Regression).

c) Wie hoch sind die Stückkosten bei einer Produktion von 140 Stück?
Gegen welchen Wert streben die Stückkosten für sehr hohe Stückzahlen?

d) Bei welcher Menge liegt die Gewinnschwelle, wenn ein Verkaufspreis von 5,20 € pro Stück erzielt wird?

Aufgabe A5

In eine zylinderförmige Regentonne mit $1\,m^2$ Grundfläche fließen 80 Liter pro Stunde. Beschreibe die Füllhöhe h in Abhängigkeit von der Zeit t, wenn zu Beginn ($t = 0$) *150* Liter in der Tonne waren.
Ist der Zusammenhang zwischen h und t linear, wenn die Tonne gebaucht oder kegelförmig ist?

Aufgabe A6

In einem volkswirtschaftlichen Modell sind die Konsumausgaben linear vom verfügbaren Einkommen abhängig. Bei einem Einkommen von *1000 €* betragen die Konsumausgaben *900 €*, bei *1800 €* betragen sie *1460 €*.

a) Ermittle einen Funktionsterm für die Konsumfunktion K. Welche Bedeutung hat die Steigung der zugehörigen Geraden?

b) Berechnen Sie die Höhe der Konsumausgaben, wenn das Einkommen *800*; *2500*; bzw. *4000 €* beträgt.

c) Die Konsumquote ist der Anteil des Einkommens, das für den Konsum aufgewendet wird. Bestimme die Konsumquote für die Einkommen aus b).
Welcher Zusammenhang besteht zwischen Konsumquote und Einkommen?

d) Welche Funktion S beschreibt die Sparleistung in Abhängigkeit vom Einkommen? Welche Bedeutung hat die Nullstelle von S?

Aufgabe A7

Der elektrische Widerstand eines Leiters verursacht einen Spannungsabfall. Die Spannung U, die dem Kunden zur Verfügung steht, wird mit der Formel $U(I) = U_0 - R \cdot I$ berechnet. Dabei ist U_0 die Ausgangsspannung (Spannung am Generator, Battewriespannung), R der Ohm'sche Widerstand und I die Stromstärke. Die Spannung U kann als Funktion der Stromstärke I aufgefasst werden: $U(I) = 2000 - 1{,}17 \cdot I$ (Die Einheiten sind weggelassen).

a) Berechne den Spannungsabfall bei einer Stromstärke von 25 Ampere.

b) Welche physikalische Bedeutung hat die Nullstelle von U?

Aufgabe A8

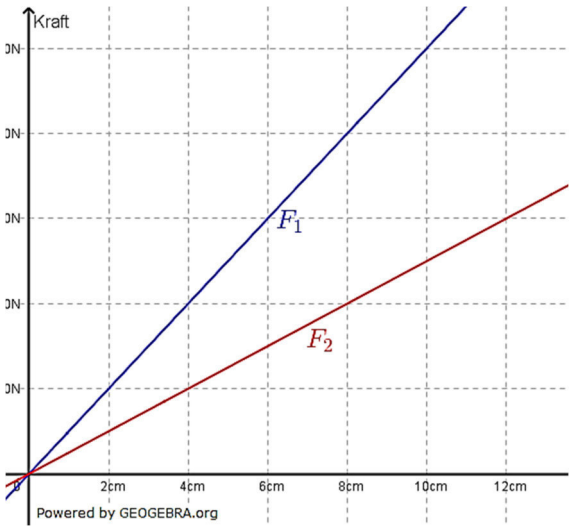
Um eine Schraubenfeder als Federkraftwaage benutzen zu können, wird der Zusammenhang zwischen der an der Feder wirkenden Gewichtskraft F_G (in N) und der Federauslenkung s (in cm) festgestellt.

a) Bestimm die Federkonstante D bei der Feder F_2. Welche Bedeutung hat D?

b) Bestimm einen Term, der die Abhängigkeit der Kraft F_G von der Auslenkung s beschreibt.

c) Ist es möglich, mit dieser Formel die für 1 m Auslenkung benötigte Gewichtskraft F_G zu bestimmen?

d) Was bedeuten die unterschiedlichen Federkonstanten für die Federn F_1 und F_2?



Lösung A1

a) Fixe Kosten:
Die Fixkosten lesen wir im Schnittpunkt der Kostenfunktion mit der-Achse ab. Sie betragen $450\,€$.
Variable Stückkosten:
Die variablen Stückkosten ergeben sich aus der Steigung der Kostenfunktion. Aus der Graphik lesen wir $m = 0{,}5\,€/Stck.$ ab.
Damit ergibt sich die Kostenfunktion zu $K(x) = 0{,}5x + 450$.

b) Kosten bei 175 Mengeneinheiten ist $K(175)$.
$K(175) = 0{,}5 \cdot 175{,}00 + 450 = 537{,}50$
Damit kein Verlust entsteht, müssen die Erlöse mindestens die Kosten decken. Die Erlösfunktion lautet $E(x) = a \cdot x$ mit a als Verkaufspreis pro Stück.
$E(175) = a \cdot 175 = 537{,}50 \qquad | \quad :175$
$a = 3{,}07$
Der Stückpreis muss mindestens $3{,}07\,€$ betragen.

Lösung A2

a) Aus der Graphik lesen wir ab:
Kosten für 1000 Stück: $K(1000) = 600\,€$
Kosten für 4000 Stück: $K(4000) = 1200\,€$
Variable Kosten / Stück $m = \frac{1200-600}{4000-1000} = \frac{600}{3000} = 0{,}20\,€$ / Stück.
Kostenfunktion (Gesamt): $K(x) = 0{,}2(x - 1000) + 600$
$K(x) = 0{,}2x + 400$
Fixkosten: $400\,€$

b) Aus der Graphik lesen wir ab:
Erlös für 4000 Stück: $E(4000) = 1200\,€$
Erlös für 2500 Stück: $E(2500) = 600\,€$
Erlösfunktion: $E(x) = \frac{1200-600}{4000-2500} \cdot x + c = 0{,}4 \cdot x + c$
$E(x) = 0{,}4(x - 4000) + 1200$
$E(x) = 0{,}4x - 400$
Schnittpunkt $S_1(1750|750)$; $S_2(4000|1200)$
Für $1750 < x < 4000$ entsteht ein Verlust, da $E(x) < K(x)$
Für $2500 < x < 2875$ gilt $E(x) < 750$. Braucht ein Kunde z.B. 2000 Bälle, so wird er mehr als 2500 (bis max. 2875) Bälle zu einem günstigeren Preis erwerben.

Lösung A3

a) *Kostenfunktion der Brauerei:*
Wir setzen für die Anzahl der auszuliefernden Kisten die Variable x. Die Kostenfunktion lautet dann:
$K_B(x) = 0{,}8x + 840$

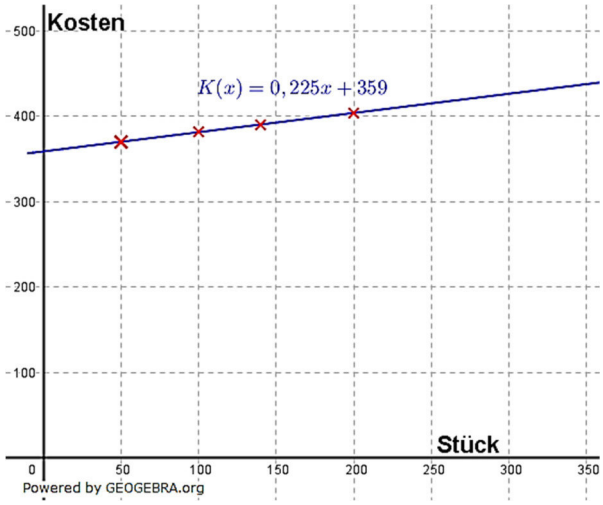
b) *Kostenfunktion des Logistikunternehmens:*
Wir setzen für die Anzahl der auszuliefernden Kisten die Variable x. Die Kostenfunktion lautet dann:
$K_L(x) = 1{,}15x$
Einsparungspotenzial bei 2500 *Kisten:*

Wir berechnen die Differenz von $K_L(x)$ und $K_B(x)$.
$K_L(x) - K_B(x) = 1{,}15x - 0{,}8x - 840$
$K_L(x) - K_B(x) = 0{,}35x - 840$
Wir berechnen die Differenz für 2500 Kisten:
$K_L(2500) - K_B(2500) = 0{,}35 \cdot 2500 - 840 = 35$
Die Brauerei kann monatlich 35 € sparen, wenn sie die Auslieferung der 2500 Kisten selbst übernimmt.
Grenze der Kistenanzahl für Auslieferung durch Logistikunternehmen:
Hierunter verstehen wir den Break-Even-Point, das ist der Punkt, zu dem die Kosten der Auslieferung durch die Brauerei und durch das Logistik-Unternehmen gleich groß sind. Wir erhalten diesen Punkt über den Schnittpunkt der beiden Kostenfunktionen.
$K_B(x) \cap K_L(x)$
$0{,}8x + 840 = 1{,}15x \quad | \quad -0{,}8x$
$0{,}35x = 840 \quad | \quad :0{,}35$
$x = 2400$
Das Logistikunternehmen sollte die Auslieferung bis zu einer Anzahl von 2400 Kisten übernehmen.

c) *Kosten der Brauerei bei 4000 Kisten:*
$K_B(4000) = 0{,}8 \cdot 4000\,€ + 840\,€ = 4040\,€$
Kosten bei Vergabe an Fremdunternehmen:
$K_F(4000) = K_B(4000) - 680\,€ = 4040\,€ - 680\,€ = 3360\,€$
Kosten pro Kiste: $\frac{3360\,€}{4000} = 0{,}84\,€$ / Kiste
Angebot 1: $0{,}84\,€$ pro Kiste.
Alternativ z. B. Fixkosten von $560{,}00\,€$:
Kosten pro Kiste: $\frac{3360\,€ - 560{,}00\,€}{4000} = 0{,}70\,€$ / Kiste
Angebot 2: $0{,}70\,€$ pro Kiste zuzüglich Fixkosten von $560{,}00\,€$.

Lösung A4

a) und b)
Die Regressionsfunktion des WTR liefert $K(x) = 0{,}225x + 359$.



c) Stückkosten bei *140* Stück:
$K(140) = 0{,}225 \cdot 140 + 359$
$= 390{,}50\,€$
1 Stück: $\frac{390{,}50\,€}{140} = 2{,}786\,€$
Stückkosten hohe Stückzahlen:
1 Stück: $\frac{0{,}225\,€ \cdot \infty + 359}{\infty}$
Wegen $lim_{x \to \infty} \frac{359}{\infty} = 0$ streben die Kosten für hohe Stückzahlen gegen die variablen Stückkosten von $0{,}225\,€ \,/\, Stck$.

d) $E(x) = 5{,}2x$
Ansatz: $E(x) = K(x)$
$5{,}2x = 0{,}225x + 359 \implies x = 72{,}16$
Die Gewinnschwelle liegt bei 73 Stück.

Lösung A5

$80\,l = 0{,}08\,m^3$

Füllhöhe: $h = \frac{V}{A} = \frac{0{,}08m^3}{1m^2} = 0{,}08m = 8\,cm$

Die Wasserstand der Tonne steigt um $8\,cm/Std.$

$150\,l = 1{,}5\,m^3$ Anfangsbestand entspricht einer Höhe von $15\,cm$.

t in Stunden; $h(t)$ in cm: $h(t) = 8t + 15$.

Bei gebaucht oder kegelförmig ist der Anstieg nicht mehr linear, da die Erhöhung nicht mehr proportional zur Zeit ist.

Lösung A6

a) Das verfügbare Einkommen sei x.
Die Konsumfunktion sei K.
Zwei Punkte sind gegeben: $P(1000|900)$; $Q(1800|1460)$
$K(x) = mx + c \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1460-900}{1800-1000} = 0{,}7$
$K(x) = 0{,}7(x - 1000) + 900 = 0{,}7x + 200$
$m = 0{,}7 = 70\%$ bedeutet 70% des Zuwachses werden für den Konsum ausgegeben.

b) $K(800) = 750$; $K(2500) = 1950$; $K(4000) = 3000$;

c) Konsumquote bei Einkommen x: $800 \triangleq 95\%$
$2500 \triangleq 78\%$
$4000 \triangleq 75\%$
Je höher das Einkommen, desto mehr nähert sich die Konsumquote 70% an.

d) Sparleistung S in Abhängigkeit vom Einkommen x.
Funktionsterm: $S(x) = x - K(x) = x - 0{,}7x - 200 = 0{,}3x - 200$
Nullstelle von $S(x)$: $0{,}3x - 200 = 0 \implies x = 666{,}60\,€$
D. h. erst ab einem Einkommen von mehr als $666{,}60\,€$, kann ein Individuum etwas sparen (Existenzminimum).

Lösung A7

a) Federkonstante D in $\frac{N}{cm}$ bei der Feder F_2:
$$D = \frac{50}{4} = 12{,}5$$
Mathematisch: D ist die Steigung der Geraden
Physikalisch: D ist die Federkonstante. Wird die Feder um $1\,cm$ ausgedehnt, so ist eine Kraft von $12{,}5\,N$ notwendig.

b) F_G (in N) in Abhängigkeit von der Auslenkung s (in cm).
Für die Feder F_1: $F_G(s) = 25s$
Für die Feder F_2: $F_G(s) = 12{,}5s$

c) Für $1\,m$ ist keine Aussage möglich, da die Feder u. U. überspannt ist.

d) Die unterschiedlichen Federkonstanten für die Federn F_1 und F_2 stehen für die unterschiedlichen Härten der beiden Federn.

Lösung A8

a) $U(25) = 2000 - 1{,}17 \cdot 25 = 1970{,}75$
Der Spannungsabfall beträgt $29{,}25\,V$.

b) Nullstelle von $U(I)$:
$I_0 = 1709$.
Physikalische Bedeutung: Die maximale Stromstärke beträgt $1709\,A$.

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu linearen Funktionen *mit Parameter* (Geradenscharen, Geradenbüschel).

Aufgabe A1

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die lineare Funktion f_t gegeben. Zeichne die Schaubilder von f_t für $t \in \{-2; 0; 0{,}5; 2\}$.

a) $f_t(x) = tx - 1 + 3t$

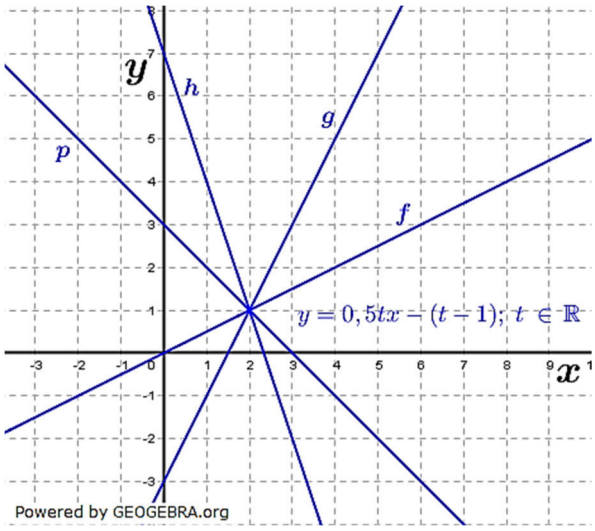
b) $f_t(x) = 0{,}5x - (t+1)^2$

c) $f_t(x) = \frac{2}{3}t(x-4)$

d) $f_t(x) = -2tx + 3t$

Aufgabe A2

Die Abbildung zeigt das Schaubild von f_t mit $f_t(x) = 0{,}5tx - (t-1); x \in \mathbb{R}$ für verschiedene Werte von t. Ordne jeder Geraden einen Parameter zu.



Aufgabe A3

Welche Wirkung hat der Parameter t auf das Schaubild K_t von f_t?
Gibt es Gemerinsamkeiten?

a) $f_t(x) = t(x-2)$

b) $f_t(x) = -4x + t + 2$

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = tx + \frac{3t-9}{2}$; $x \in \mathbb{R}, t \neq 0$.
Finde gemeinsame Eigenschaften aller Schaubilder K_t von f_t.

Aufgabe A5

Eine Ursprungsgerade durch $B(2t|2t^2)$ und eine Gerade durch B mit der Steigung $m = -3t^2$ bilden mit der x–Achse ein Dreieck. Für welche Wahl von t ist das Dreieck rechtwinklig?

Aufgabe A6

K_t ist für $t \neq 0$ das Schaubild der Funktion f_t mit $f_t(x) = tx - \frac{t^2}{2}; x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne K_t für $t \in \{-2; -1; 1; 2\}$.
b) Berechne die Schnittpunkte von K_t mit den Koordinatenachsen.
c) Zeige: Es gibt kein t, sodass K_t durch den Punkt $A(0|2)$ verläuft.

Aufgabe A7

K_t ist das Schaubild von f_t mit $f_t(x) = -3x + \frac{4}{t}; x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^*$.

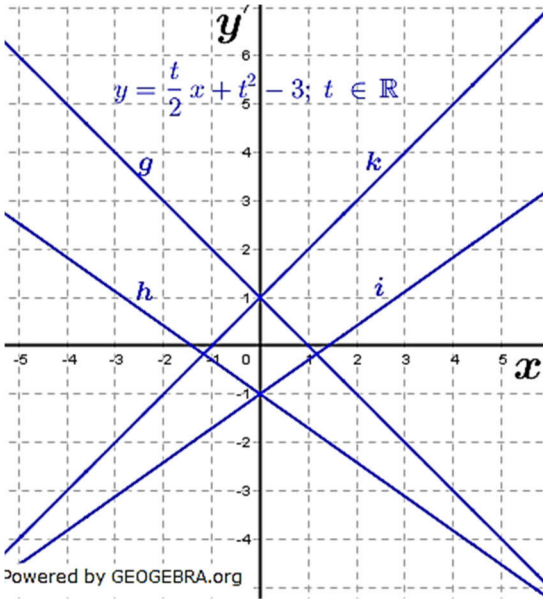
a) Zeichne K_t für $t \in \{-4; -2; \frac{2}{3}; 1\}$.
b) Berechne die Schnittpunkte von K_t mit den Koordinatenachsen.
c) Für welchen Wert von t schneidet K_t die 1. Winkelhalbierende an der Stelle $x = 3$?

Aufgabe A8

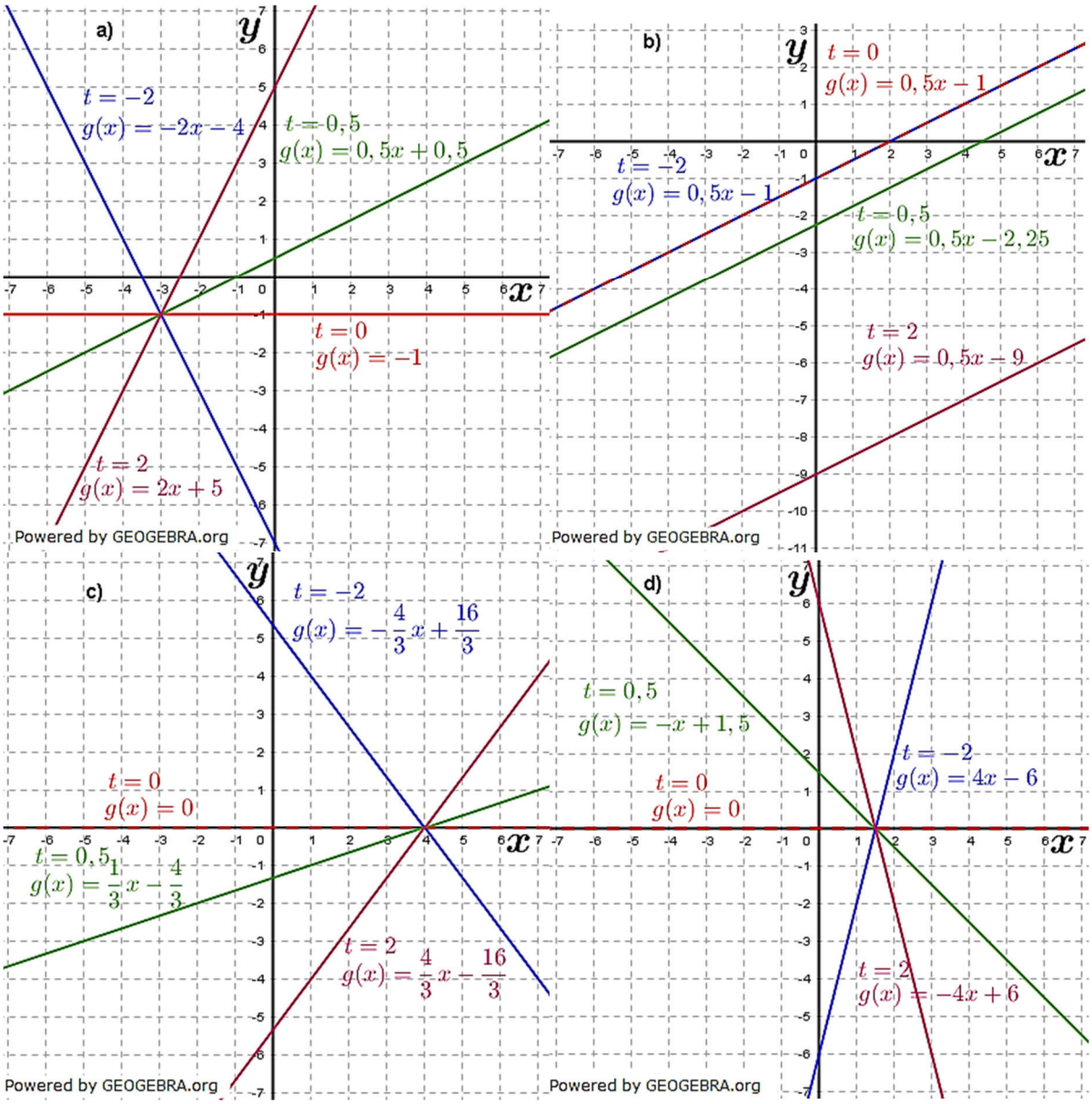
K_t ist das Schaubild von f_t mit.

$$f_t(x) = \frac{t}{2}x + t^2 - 3; x \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Ordne jeder Geraden einen Parameterwert zu. Finde gemeinsame Eigenschaften. Unterscheide $t > 0$ und $t < 0$.



Lösung A1



Lösung A2

f: $m=0{,}5 \Rightarrow 0{,}5t=0{,}5 \Rightarrow t=1 \Rightarrow c=0$
g: $m=2 \Rightarrow 0{,}5t=2 \Rightarrow t=4 \Rightarrow c=-3$
h: $m=-3 \Rightarrow 0{,}5t=-3 \Rightarrow t=-6 \Rightarrow c=7$
p: $m=-1 \Rightarrow 0{,}5t=-1 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow c=3$

Lösung A3

a) Wirkung von t: Streckung von K_t mit dem Faktor $k=t$ in y–Richtung.
Alle Schargeraden K_t laufen durch den Punkt $N(2|0)$.

b) Wirkung von t: Verschiebung von K_t um t Einheiten in y–Richtung.
Alle Schargeraden K_t sind parallel zueinander mit der Steigung $m=-4$. Sie haben keinen Punkt gemeinsam.

Lösung A4

$f_t(x) = tx + \frac{3t-9}{2} = tx + \frac{3t}{2} - \frac{9}{2} = t\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2}$

Gemeinsamer Punkt aller Schargeraden ist $P(-\frac{3}{2}|-\frac{9}{2})$.

Alle Schargeraden verlaufen aus dem III. Quadranten in den I. Quadranten wachsend, für $t > 0$ und aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten fallend für $t < 0$.

Lösung A5

Ursprungsgerade g durch $B(2t|2t^2)$:

$g(x) = \frac{2t^2}{2t}x = tx$

Gerade h durch B mit der Steigung $m = -3t^2$:

$h(x) = -3t^2(x - 2t) + 2t^2$ | Punkt-Steigungsformel

$h(x) = -3t^2x + 6t^3 + 2t^2$

Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn $m_g \cdot m_h = -1$.

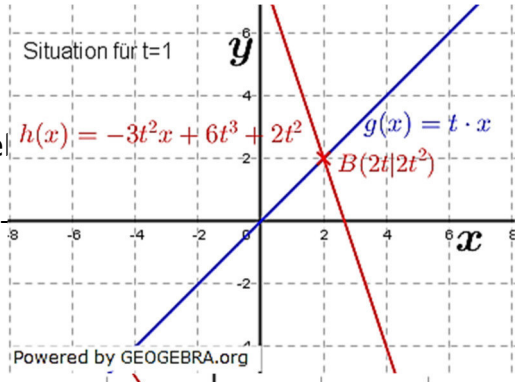
$t \cdot (-3t^2) = -1$

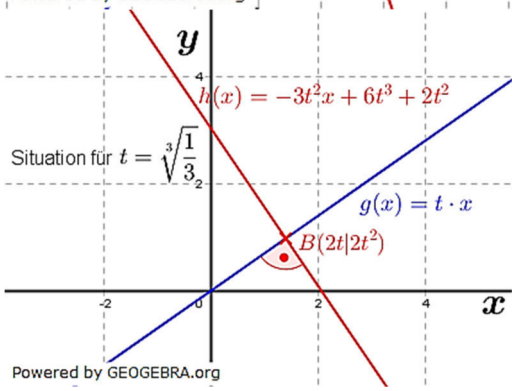
$3t^3 = 1$

$t^3 = \frac{1}{3}$

$t = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Für $t = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ist das Dreieck rechtwinklig.





Lösung A6

a) Siehe Graphik rechts.

b) $t = -2$:

$-2x - 2 = 0 \;=>\; x = -1$

$N_{-2}(-1|0) \quad S_{y_{-2}}(0|-2)$

$t = -1$:

$-x - 0{,}5 = 0 \;=>\; x = -0{,}5$

$N_{-1}(-0{,}5|0) \quad S_{y_{-1}}(0|-0{,}5)$

$t = 1$:

$x - 0{,}5 = 0 \;=>\; x = 0{,}5$

$N_1(0{,}5|0) \quad S_{y_1}(0|-0{,}5)$

$t = 2$:

$2x - 2 = 0 \;=>\; x = 1$

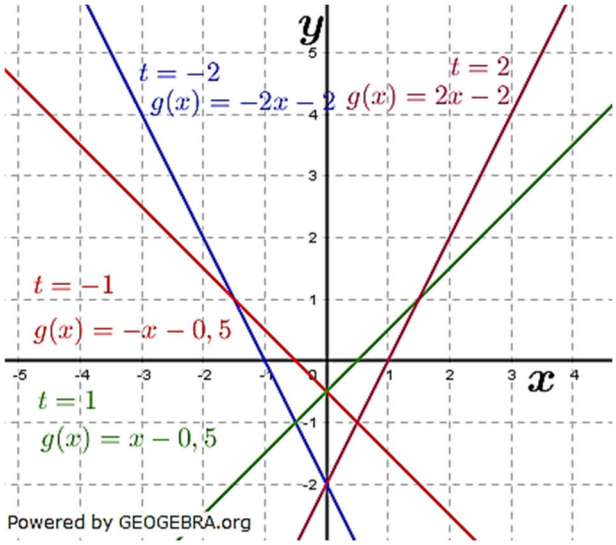
$N_2(1|0) \quad S_{y_2}(0|-2)$

c) $-\frac{t^2}{2} = 2$

$-t^2 = 4$

$t^2 = -4$

$\mathbb{L} = \{\}$



Lösung A7

a) Siehe Graphik rechts.

b) $t = -4$:

$-3x - 1 = 0 \;=>\; x = -\frac{1}{3}$

$N_{-4}\left(-\frac{1}{3}\middle|0\right) \quad S_{y_{-4}}(0|-1)$

$t = -2$:

$-3x - 2 = 0 \;=>\; x = -\frac{2}{3}$

$N_{-2}\left(-\frac{2}{3}\middle|0\right) \quad S_{y_{-2}}(0|-2)$

$t = \frac{2}{3}$:

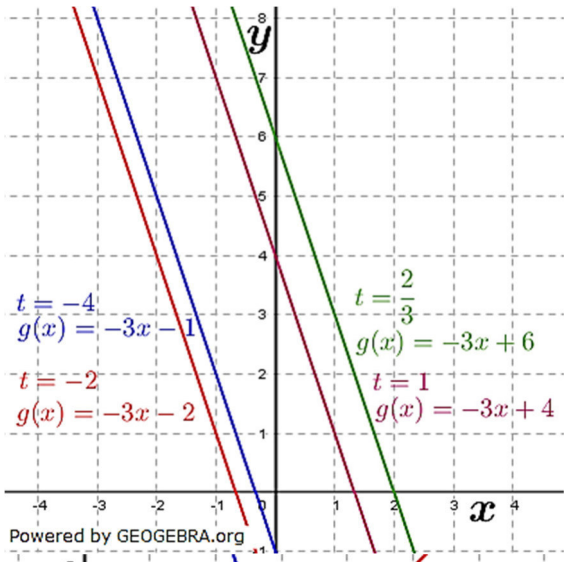
$-3x + 6 = 0 \;=>\; x = 2$

$N_{\frac{2}{3}}(2|0) \quad S_{y_{\frac{2}{3}}}(0|6)$

$t = 1$:

$-3x + 4 = 0 \;=>\; x = \frac{4}{3}$

$N_1\left(\frac{4}{3}\middle|0\right) \quad S_{y_1}(0|4)$



c) 1. Winkelhalbierende:

$w_1(x) = x$

$w_1(3) = 3$

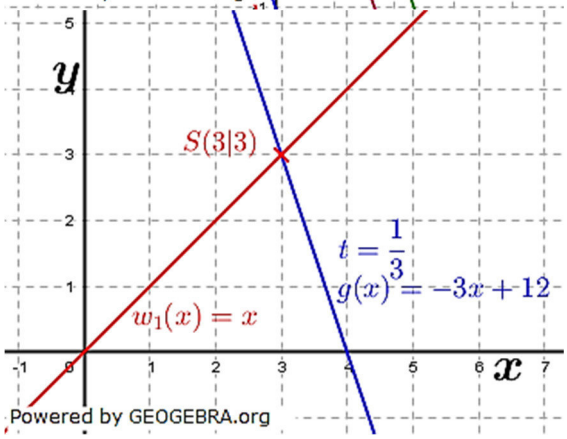
Schnittpunkt von $f_t(x)$ und $w_1(x)$ soll $S(3|3)$ sein.

$f_t(3) \cap w_1(3)$

$-3 \cdot 3 + \frac{4}{t} = 3$

$\frac{4}{t} = 12$

$4 = 12t \;=>\; t = \frac{1}{3}$



Lösung A8

$f_t(x) = \frac{t}{2}x + t^2 - 3$

Steigung der Schargeraden ist $m = \frac{t}{2}$. Der y–Achsenabschnitt ist $c = t^2 - 3$.

g: $\quad m_g = -1 \;\Rightarrow\; 0{,}5t = -1 \;\Rightarrow\; t = -2 \quad S_y(0|1)$

h: $\quad S_y(0|-1) \Rightarrow t^2 - 3 = -1 \;\Rightarrow\; t = \pm\sqrt{2}$. Wegen $m_h < 0$ gilt $t = -\sqrt{2}$.

i: $\quad S_y(0|-1) \Rightarrow t^2 - 3 = -1 \;\Rightarrow\; t = \pm\sqrt{2}$. Wegen $m_i > 0$ gilt $t = +\sqrt{2}$.

k: $\quad m_k = 1 \;\Rightarrow\; 0{,}5t = 1 \;\Rightarrow\; t = 2$

Gemeinsame Eigenschaften:

Schnittpunkte von K_t mit der y–Achse: $\quad S_y(0|t^2 - 3)$

Für den y–Wert des Punktes S_y gilt: $\quad y > -3$

Für $t > 0$: $\quad K_t$ ist steigend.

Für $t < 0$: $\quad K_t$ ist fallend.

Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu linearen Funktionen *mit Parameter* (Geradenscharen, Geradenbüschel).

Aufgabe A1

Gegeben ist für $\boldsymbol{t} > 0$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = tx - 4t - 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Zeige, dass für die Nullstelle x_t von f_t gilt: $x_t > 4$.

Aufgabe A2

K_t ist das Schaubild von f_t mit $f_t(x) = 2tx + 4t - 1;\ x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Koordinaten des gemeinsamen Punktes aller Schargeraden.
b) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
c) Zeichne K_t für $t \in \{1; -0{,}5; 1{,}5\}$.
d) Bestimme t so, dass K_t auf der Geraden h mit $h(x) = \frac{3}{2}x$ senkrecht steht.
e) Für welchen Wert von t schneidet K_t die Gerade g mit $g(x) = -2x + 3$ an der Stelle $x = 1{,}5$?
Bestimme den Schnittpunkt.

Aufgabe A3

K_t ist das Schaubild der linearen Funktion f_t mit $f_t(x) = -\frac{2}{t}x + 4 - \frac{1}{t}; x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*$.

a) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
b) Zeichne K_t für $t \in \{-2; -1; 2\}$.
c) Bestimme t so, dass K_t eine Ursprungsgerade ist.
d) Bestimme den gemeinsamen Punkt aller Schargeraden.

Aufgabe A4

Gegeben ist die lineare Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{t-2}{3}x + t;\ x, t \in \mathbb{R}$. K_t ist das Schaubild von f_t.

a) Zeichne die Schargeraden K_t für $t \in \{0; 1; 3\}$.
b) Berechne die Koordinaten des gemeinsamen Punktes aller Schargeraden.
c) Welche Schargerade steht senkrecht auf der Geraden h mit $h(x) = \frac{4}{3}x$?
d) Zeige: Keine der Schargeraden verläuft durch den Punkt $T(-3|5)$.

Aufgabe A5

Bestimme die Gleichung der Geradenschar,

a) deren Geraden die Steigung $m = -3$ haben.
b) deren Geraden senkrecht auf der Geraden mit $y = -2x + 5$ stehen.
c) deren Geraden durch den Punkt $P(-5|4)$ verlaufen abernicht parallel zur y–Achse sind.
d) deren Geraden parallel zur x–Achse verlaufen.
e) deren Geraden die x–Achse in $x = 2$ schneiden.

Lösung A1

Nullstellen mit $f_t(x) = 0$

$tx - 4t - 1 = 0$

$x_{t_0} = 4 + \frac{1}{t}$

Wegen Aufgabenstellung $t > 0$ ist somit stets $x_{t_0} > 4$.

Lösung A2

a) Wir stellen die gegebene Funktionsgleichung um in die Punkt-Steigungsform $f_t(x) = 2tx + 4t - 1 = 2t(x+2) - 1$.
Aus der Punkt-Steigungsform lesen wir einen gemeinsamen Punkt ab:
Die Geradenschar K_t hat den gemeinsamen Punkt $P(-2|-1)$.

b) Nullstellen mit $f_t(x) = 0$

$2tx + 4t - 1 = 0 \quad | \quad -4t; +1$

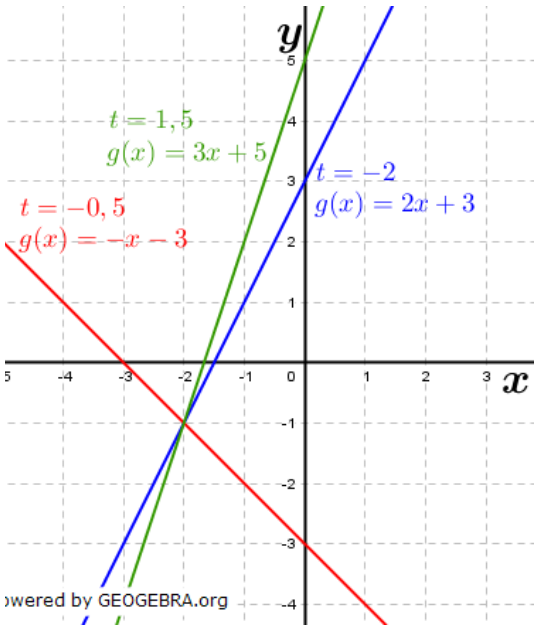
$2tx = -4t + 1 \quad | \quad :2t$

$x_0 = -2 + \frac{1}{2t}$

$N_t\left(-2 + \frac{1}{2t} \middle| 0\right)$

$S_{y_t}(0|4t-1)$

c) Siehe Graphik rechts.



d) Orthogonalitätsbedingung: $m_t \cdot m_h = -1$

$2t \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Für $t = -\frac{1}{3}$ steht f_t auf der Gerden g orthogonal.

e) $g(1{,}5) = -2 \cdot 1{,}5 + 3 = 0$
Schnittpunkt $P(1{,}5|0)$
Punktprobe:
$f_t(1{,}5) = 0 = 2t \cdot 1{,}5 + 4t - 1$
$7t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{7}$
Für $t = \frac{1}{7}$ schneidet $f_{\frac{1}{7}}$ die Gerade g in $P(1{,}5|0)$.

Lösung A3

a) Nullstellen mit $f_t(x) = 0$

$-\frac{2}{t}x + 4 - \frac{1}{t} = 0 \quad | \quad \cdot t$

$-2x + 4t - 1 = 0 \quad | \quad -4t;\ +1$

$-2x = 1 - 4t \quad | \quad :(-2)$

$x_0 = 2t - \frac{1}{2}$

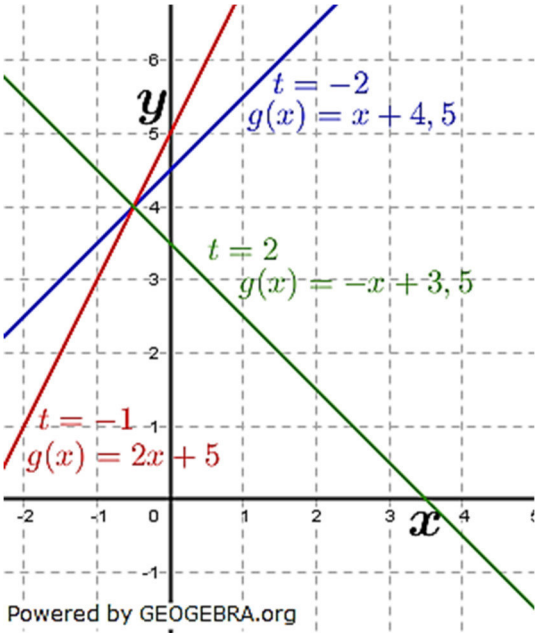
$N_t\left(2t - \frac{1}{2} \middle| 0\right)$

$S_{y_t}\left(0 \middle| 4 - \frac{1}{t}\right)$

b) Siehe Graphik rechts.

c) Eine Ursprungsgerade liegt vor, wenn das absolute Glied c der Funktionsgleichung Null ist.
$4-\frac{1}{t}=0$
$4=\frac{1}{t}$
$t=\frac{1}{4}$
$K_{\frac{1}{4}}$ ist eine Ursprungsgerade.

d) Umstellung von $f_t(x)=-\frac{2}{t}x+4-\frac{1}{t}$ in die Punkt-Steigungsformel:
$f_t(x)=-\frac{2}{t}\left(x+\frac{1}{2}\right)+4$
Der gemeinsame Schnittpunkt aller Schargeraden ist $S\left(-\frac{1}{2}\middle|4\right)$.



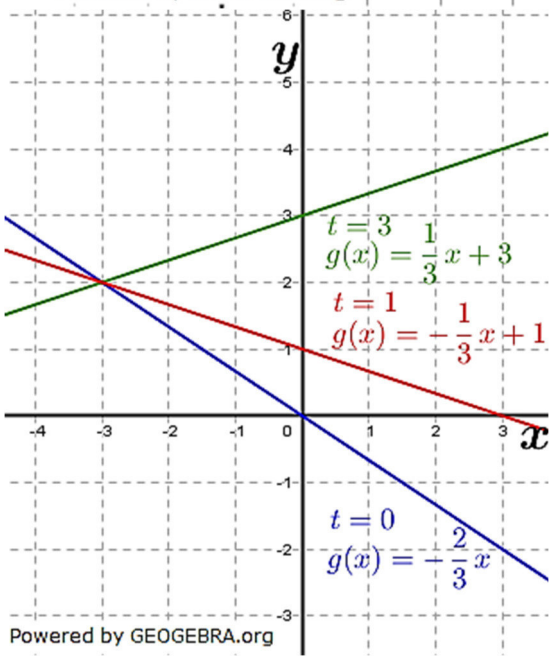
Lösung A4

a) Siehe Graphik rechts.

b) Umstellung von $f_t(x)=\frac{t-2}{3}x+t$ in die Punkt-Steigungsformel:
$f_t(x)=\frac{t-2}{3}(x+3)+2$
Der gemeinsame Punkt ist $P(-3|2)$.

c) Bedingung für Senkrechte:
$m_t\cdot m_h=-1$
$\frac{t-2}{3}\cdot\frac{4}{3}=-1 \Rightarrow t=-\frac{1}{4}$
$f_{-\frac{1}{4}}$ *steht senkrecht auf* h.

d) Keine der Schargeraden verläuft durch den Punkt $T(-3|5)$:
$f_t(-3)=5=\frac{t-2}{3}\cdot(-3)+t$
$\Rightarrow 5=2$ Widerspruch.
Keine der Schargeraden verläuft durch den Punkt $T(-3|5)$.



Lösung A5

a) Geradenschar mit der Steigung $m=-3$:
$g_t(x)=-3x+t$

b) Geradenschar, die senkrecht auf der Geraden mit $y=-2x+5$ steht.
$g_t(x)=\frac{1}{2}x+t$

c) Geradenschar durch den Punkt $P(-5|4)$ verlaufen aber nicht parallel zur y–Achse:
$g_t(x)=\frac{1}{t}\cdot(x+5)+4;\ t\in\mathbb{R}^*$

d) Geradenschar parallel zur x–Achse:
$x=t$

e) Geradenschar, die die x–Achse in $x=2$ schneidet:
$g_t(x)=t(x-2)$

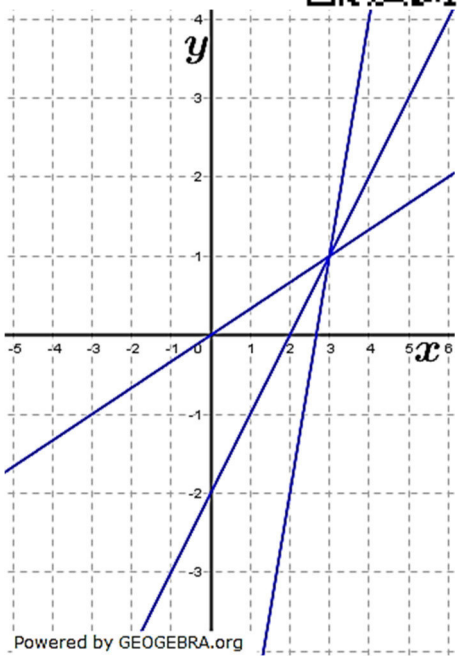
Aufgabe A1

a) Bestimme einen Funktionsterm für die Geradenschar.
(Mögliche Lösung: $f_t(x) = tx - 3t + 1$)

b) Die Gerade g verläuft durch $A(4|1{,}5)$ und $B(-1|-1)$. Ist g eine Schargerade?

c) Für welches t ist der y–Achsenabschnitt der zugehörigen Schargeraden kleiner als -2?

d) Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = -x + 2a^2$. Bestimme a und t so, dass g eine Gerade K_t aus der Geradenschar ist.

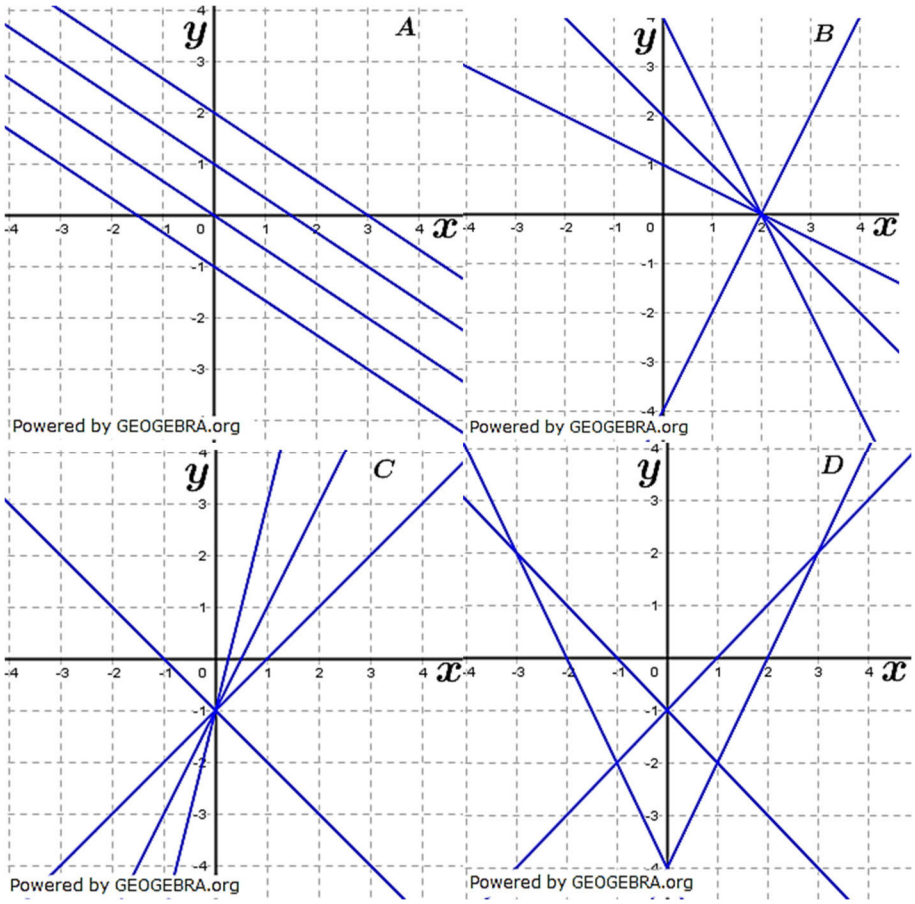


Aufgabe A2

Ordne jeder Abbildung eine Funktionsgleichung zu:

$h_t(x) = t(x - t)$ $\qquad$ $f_t(x) = 2t - tx$

$g_t(x) = tx - 1$ $\qquad$ $k_t(x) = -\frac{1}{2}x + t$



Aufgabe A3

Für jedes $t \in \mathbb{R}^*$ ist die Gerade K_t gegeben durch f_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t}; \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass alle Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

b) Bestimme für $t > 0$ den Flächeninhalt des Dreiecks, das von zwei orthogonalen Schargeraden und der y–Achse gebildet wird.

c) G_t ist das Schaubild der Funktion g_t mit $g_t(x) = 1 - tx; \quad x, t \in \mathbb{R}$. Berechne den Schnittpunkt von K_t und G_t in Abhängigkeit von t. Für welchen t–Wert gibt es keinen Schnittpunkt? Welche geometrische Bedeutung hat dieser Fall?

Lösung A1

a) $f_t(x) = t(x-3)+1 = tx - 3t + 1$

b) Wir bilden m_g mit $m_g = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

$m_g = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1{,}5-(-1)}{4-(-1)} = \frac{2{,}5}{5} = \frac{1}{2}$

$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}(x-3)+1$

$-1 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(-1-3)+1$ | Punktprobe mit $B(-1|-1)$

$-1 = -1$

Die Gerade g ist Schargerade von f_t.

c) y-Achsenabschnitt $c = -3t+1$

$-3t + 1 < -2$

$-3t < -3$ | $:-3$

$t > 1$

Für $t > 1$ ist der y-Achsenabschnitt $c < -2$.

d) $g(x) = -x + 2a^2$ eine Gerade K_t der Geradenschar:

$m_g = -1 \;\; => \;\; t = -1$

$f_{-1}(x) = -x + 3 + 1 = -x + 4$

$2a^2 = 4$

$a^2 = 2$

$a_1 = \sqrt{2}; \;\; a_2 = -\sqrt{2}$

Lösung A2

A ist der Graph der Funktionsschar $k_t(x) = -\frac{1}{2}x + t$.
B ist der Graph der Funktionsschar $f_t(x) = 2t - tx$.
C ist der Graph der Funktionsschar $g_t(x) = tx - 1$.
D ist der Graph der Funktionsschar $h_t(x) = t(x-t)$.

Lösung A3

a) $f_t(x) = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t} = -\frac{1}{t}(x-1)$

Alle Geraden der Geradenschar verlaufen durch den Punkt $P(1|0)$.

b) $f_t(x) = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t}$.

Schnittpunkt mit der y–Achse: $S_y\left(0\middle|\frac{1}{t}\right)$

Senkrechte Schargerade:

$f_{\perp_t}(x) = t(x-1) = tx - t$.

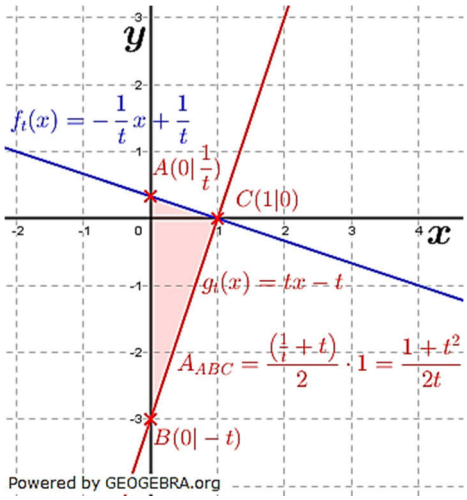
Schnittpunkt mit der y–Achse:

$S_{\perp_{y_t}}(0|-t)$.

Die Grundseite des Dreiecks entspricht dem Abstand der beiden y-Koordinaten der Schnittpunkte.

Die Höhe auf diese Grundseite ist die Strecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt $P(1|0)$.

$A_{Dreieck} = \frac{g \cdot h_g}{2} = \frac{\left(\frac{1}{t}+t\right)\cdot 1}{2} = \frac{1+t^2}{2t}$



c) Schnittpunkt mit $K_t \cap G_t$.

$1 - tx = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t}$

$1 - \frac{1}{t} = tx - \frac{1}{t}x$

$x\left(t - \frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{1}{t}$

$x\left(\frac{t^2-1}{t}\right) = \frac{t-1}{t}$

$x_s = \frac{t-1}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{t+1}$

$y_s = 1 - t \cdot \frac{1}{t+1} = \frac{t+1-t}{t+1} = \frac{1}{t+1}$

$S\left(\frac{1}{t+1} \middle| \frac{1}{t+1}\right)$

Keinen Schnittpunkt gibt es bei Parallelität, also $m_k = m_g$.

$-t = -\frac{1}{t} \quad \Rightarrow t^2 = 1 \quad \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1$

Für $t = -1$: Die Geraden K_{-1} und G_{-1} sind parallel und verschieden. Kein Schnittpunkt.

Für $t = 1$: Die Geraden liegen aufeinander (sind identisch), unendlich viele gemeinsame Punkte.