Hinweis:

In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zur Strecke auf Geraden.

Aufgabe A1

Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(2|3)$ $B(5|10)$ b) $A(-4|-7)$ $B(9|-12)$

c) $A(0|0)$ $B(-3|-8)$

Aufgabe A2

Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{AB}$.

a) $A(1|2)$ $B(4|7)$ b) $A(3|-4)$ $B(-1|12)$

c) $A(-4|5)$ $B(0|-3)$

Aufgabe A3

M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Berechne die fehlenden Koordinaten.

a) $A(1|2)$ $B(4|7)$ $M(?|?)$

b) $A(?|-7)$ $B(1|-1)$ $M(5|?)$

Aufgabe A4

Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit $A(-3|1{,}5)$, $B(0|0)$, $C(2|4)$ und $D(0|7{,}5)$.

a) Zeige: das Viereck ist ein Trapez.

b) Bestimme den Flächeninhalt des Trapezes.

Aufgabe A5

Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$. Der Punkt $A(1|\ldots.)$ liegt auf g.

a) Bestimme die Geradenpunkte als auch die Orthogonalenpunkte, die von A eine Entfernung von $\sqrt{10}$ haben.

b) Berechne den Flächeninhalt des Quadrats, welches aus den vier ermittelten Punkten von a) gebildet wird.

Aufgabe A6

Gegeben sind die Punkte $P(4|2{,}5)$ und $Q(-1{,}5|-1{,}25)$.

a) Welche Gerade mit der Steigung $m = -\frac{2}{3}$ verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$?

b) Gib eine Gleichung für die Strecke $\overline{PQ}$ an.

Aufgabe A7

Gegeben ist eine Gerade g mit $6x + 10y - 51 = 0$. Bestimme die Koordinaten des Geradenpunktes auf g, der vom Ursprung die kürzeste Entfernung hat.

Aufgabe A8

Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ mit $P(0|-\frac{3}{2}t)$ und $Q\left(\frac{3}{t}\middle|\frac{3}{4}t\right); t > 0$.

Aufgabe A9

Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = -1{,}5x + 2$.

a) Die auf g senkrecht stehende Gerade h schneidet g im Punkt $S(2|g(2))$. Stelle die Gleichung von h auf. Zeichne g und h in ein Achsenkreuz ein.

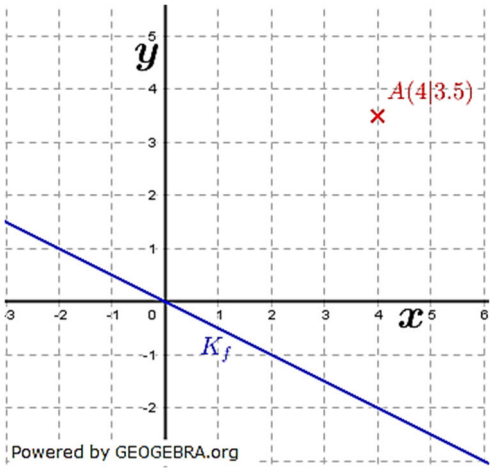
b) Die Gerade h schneidet die y–Achse in S_{y_h}. Berechne den Abstand von S_{y_h} zur Geraden g.

Aufgabe A10

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-1|3)$ und $B(2|1{,}2)$. Die Geraden g, sowie k mit $y = 3$ und h mit $h(x) = x - 4$ bilden ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt.

Aufgabe A11

Welcher Punkt der Geraden K_f hat vom Punkt $A(4|3{,}5)$ die geringste Entfernung?



Aufgabe A12

Gegeben sind die Punkte $A(-2|2)$, $B(2|-1)$ und $C(1|4)$.

a) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

b) Bestimme den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

c) Beschreibe die Strecke $\overline{AC}$ mit einer Gleichung.

d) A, B und C sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeichne das Dreieck in ein Koordinatensystem ein. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung A1

a) $d = \sqrt{(5-2)^2 + (10-3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7{,}62\ LE$

b) $d = 7{,}07\ LE$ c) $d = 8{,}54\ LE$

Lösung A2

a) $x_M = \frac{4+1}{2} = 2{,}5;\quad y_M = \frac{7+2}{2} = 4{,}5 \quad => \quad (2{,}5|4{,}5)$

b) $M(1|4)$ c) $M(-2|1)$

Lösung A3

a) $A(1|2)\ \ B(4|7)\ \ M(2{,}5|4{,}5)$ b) $A(9|-7)\ \ B(1|-1)\ \ M(5|-4)$

Lösung A4

a) Wenn $ABCD$ ein Trapez sein soll, müssen zwei Seiten parallel zueinander verlaufen. Somit gilt: $m_{\overline{AB}} || m_{\overline{CD}} \vee m_{\overline{BC}} || m_{\overline{AD}}$.

$m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2} \quad m_{\overline{CD}} = -\frac{3{,}5}{2} \quad m_{\overline{BC}} = \frac{4}{2} = 2 \quad m_{\overline{AD}} = \frac{6}{3} = 2$

$m_{\overline{BC}} || m_{\overline{AD}}$, das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

b) Flächeninhalt eines Trapezes $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten sind. In unserem Falle ist dies die Strecke $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}\ LE$

$d_{\overline{AD}} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (7{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{45}\ LE$

Die Höhe h ist die senkrechte Strecke zwischen den beiden Parallelen. Da wegen $m_{\overline{AB}} = -\frac{1}{2}$ und $m_{\overline{AD}} = 2$ die Strecke $\overline{AB}$ senkrecht auf $\overline{AD}$ steht, ist $h = \overline{AB}$.

$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (0-1{,}5)^2} = \sqrt{11{,}25}\ LE$

$A_{ABCD} = \frac{\sqrt{20}+\sqrt{45}}{2} \cdot \sqrt{11{,}25}\ FE = 18{,}75\ FE$

Lösung A5

a) $g(1) = y_A = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3};\quad A(1|-\frac{2}{3})$

Geradenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ von A:

$A'(x_A'|y_A') \implies y_A' = \frac{1}{3}x_A' - 1$

$d_{\overline{AA'}} = \sqrt{(x_A'-1)^2 + \left(y_A' - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{10} \quad | \quad ^2$

$10 = (x_A'-1)^2 + \left(y_A' + \frac{2}{3}\right)^2 = (x_A'-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x_A' - 1 + \frac{2}{3}\right)^2$

$10 = (x_A'-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x_A' - \frac{1}{3}\right)^2$

$10 = x_A'^2 - 2x_A' + 1 + \frac{1}{9}x_A'^2 - \frac{2}{9}x_A' + \frac{1}{9}$

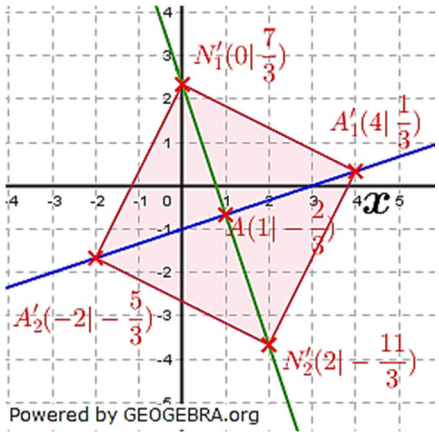
$10 = \frac{10}{9}x_A'^2 - \frac{20}{9}x_A' + \frac{10}{9}$

$\frac{10}{9}x_A'^2 - \frac{20}{9}x_A' + \frac{10}{9} - 10 = 0 \quad | \quad \cdot 9$

$10x_A'^2 - 20x_A' + 10 - 90 = 0 \quad | \quad :10$

$x_A'^2 - 2x_A' - 8 = 0 \implies x_{A_1}' = 4;\quad x_{A_2}' = -2$

$y_{A_1}' = \frac{1}{3};\quad y_{A_2}' = -\frac{5}{3}$



Die beiden Geradenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ zu A haben die Koordinaten $A_1'\left(4\middle|\frac{1}{3}\right)$ und $A_2'\left(-2\middle|-\frac{5}{3}\right)$.

Normalenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ von A:

$n(x) = -3(x-1) - \frac{2}{3} = -3x + 3 - \frac{2}{3} = -3x + \frac{7}{3}$

$N'(x_N'|y_N') \implies y_N' = -3x_N' + \frac{7}{3}$

$d_{\overline{AN'}} = \sqrt{(x_N'-1)^2 + \left(y_N' - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{10} \qquad | \quad ^2$

$10 = (x_N'-1)^2 + \left(y_N' + \frac{2}{3}\right)^2 = (x_N'-1)^2 + \left(-3x_N' + \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right)^2$

$10 = (x_N'-1)^2 + (-3x_N'+3)^2 = {x_N'}^2 - 2x_N' + 1 + 9{x_N'}^2 - 18x_N' + 9$

$10 = 10{x_N'}^2 - 20x_N' + 10$

$10{x_N'}^2 - 20x_N' = 0$

$x_N' \cdot (10x_N' - 20) = 0$

$x_{N_1}' = 0; \quad x_{N_2}' = 2$

$y_{N_1}' = \frac{7}{3}; \quad y_{N_2}' = -6 + \frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$

Die beiden Normalenpunkte mit Abstand $\sqrt{10}$ zu A haben die Koordinaten $N_1'\left(0\middle|\frac{7}{3}\right)$ und $N_2'\left(2\middle|-\frac{11}{3}\right)$.

b) Die Strecke $\overline{A_1'A_2'}$ ist die Diagonale des Quadrats. Gemäß Aufgabenstellung hat die Strecke die Länge $2 \cdot \sqrt{10}\,LE$. Die Diagonale eines Quadrates errechnet sich aus $d = a \cdot \sqrt{2}$.

$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{5}$

Fläche des Quadrates: $A = a^2 = (2 \cdot \sqrt{5})^2 = 20\,FE$

Lösung A6

a) Mittelpunkt $\overline{PQ}$: $M(x_M|y_m)$

$x_M = \frac{(4+(-1{,}5))}{2} = \frac{5}{4} \qquad y_M = \frac{(2{,}5+(-1{,}25))}{2} = \frac{5}{8}$

$M(\frac{5}{4}|\frac{5}{8})$

Gerade durch M mit $m = -\frac{2}{3}$:

$g(x) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{8} = -\frac{2}{3}x + \frac{35}{24}$

b) Gerade durch P und Q:

$m_{\overline{PQ}} = \frac{2{,}5-(-1{,}25)}{4-(-1{,}5)} = \frac{5}{8}$

$h(x) = \frac{5}{8}(x-4) + 2{,}5 = \frac{5}{8}x$

Lösung A7

Der kürzeste Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist die Strecke vom Schnittpunkt der Orthogonalen der Geraden mit der Geraden und dem Punkt selbst.

Gleichung der Geraden: $g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{51}{10}$

Gleichung der Orthogonalen durch den Ursprung: $n(x) = \frac{5}{3}x$

$g(x) \cap n(x)$:

$\frac{5}{3}x = -\frac{3}{5}x + \frac{51}{10}$
$\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}x = \frac{51}{10}$
$\frac{34}{15}x = \frac{51}{10}$
$x = \frac{15 \cdot 51}{34 \cdot 10} = \frac{9}{4}$
$x_S = \frac{9}{4} \quad y_S = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{4} \quad S\left(\frac{9}{4} \middle| \frac{15}{4}\right)$
Strecke $\overline{OS}$: $d = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} = 4{,}37\ LE$

Lösung A8

$x_M = \frac{0+\frac{3}{t}}{2} = \frac{3}{2t}; \quad y_M = \frac{0{,}75t+(-1{,}5t)}{2} = -\frac{3}{8}t$
$M(\frac{3}{2t} | -\frac{3}{8}t)$

Lösung A9

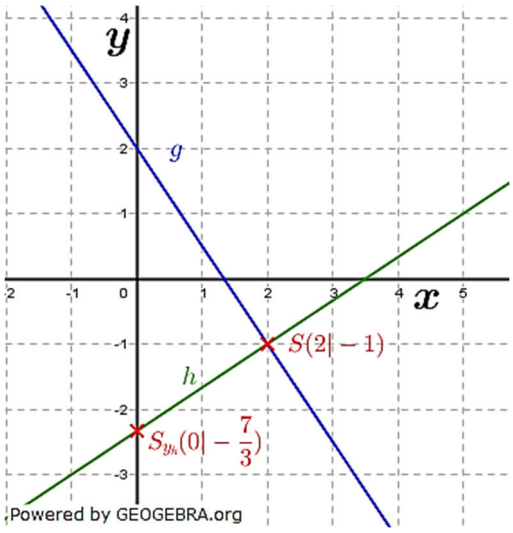
$g(x) = -1{,}5x + 2$

a) $g(2) = -1{,}5 \cdot 2 + 2 = -1$
$S(2|-1)$
$h(x) = \frac{2}{3}(x-2) - 1 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$
$S_{y_h}\left(0 \middle| -\frac{7}{3}\right)$
Zeichnung siehe Graphik rechts.

b) Abstand $\overline{SS_{y_h}}$:

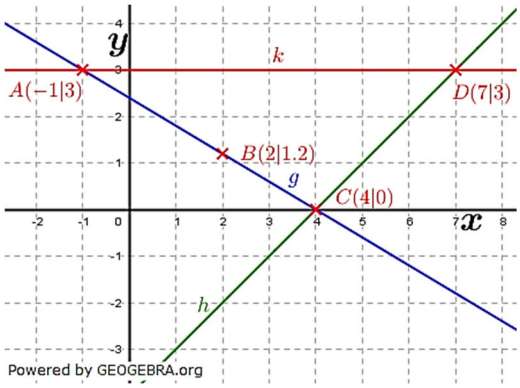
$$\boldsymbol{d = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-1 - \left(-\frac{7}{3}\right)\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{4 + \frac{16}{9}} = 2{,}40}$$



Lösung A10

Gerade g:
$m_g = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1{,}2-3}{2-(-1)} = \frac{-1{,}8}{3} = -\frac{3}{5}$
$g(x) = -\frac{3}{5}(x+1) + 3 = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$
Schnittpunkt $g \cap k$: $A(-1|3)$
Schnittpunkt $g \cap h$: $C(4|0)$
Schnittpunkt $h \cap k$: $D(7|3)$
Das Dreieck hat die Eckpunkte A, C und D.
Strecke $\overline{AD}$ ist Grundseite, Abstand von C zu k ist die Höhe.
Strecke $\overline{AD} = 8\ LE$, Höhe $h = 3\ LE$.
Fläche Dreieck: $A = \frac{\overline{AD}}{2} \cdot h$
$A_{ADC} = \frac{8}{2} \cdot 3 = 12\ FE$



Lösung A11

Gerade K_f: $f(x) = -\frac{1}{2}x$ | Aus Grafik abgelesen

Orthogonale K_n zu K_f durch A:

$n(x) = 2(x-4) + 0{,}5 = 2x - 7{,}5$

Schnittpunkt S von $K_f \cap K_n$:

$2x - 7{,}5 = -\frac{1}{2}x \implies x_S = 3; \quad y_S = -1{,}5; \quad S(3|-1{,}5)$

Abstand $\overline{AS}$:

$$d_{\overline{AS}} = \sqrt{(4-3)^2 + \left(0{,}5-(-1{,}5)\right)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Lösung A12

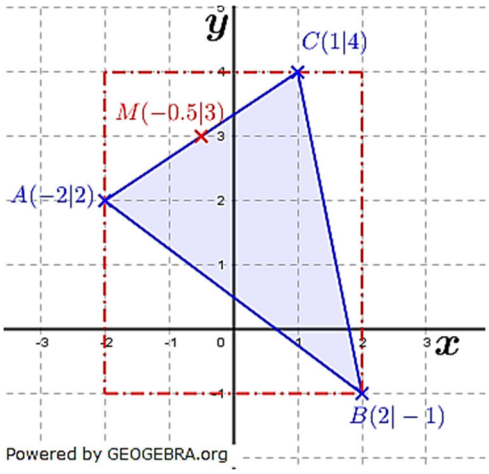
a) Mit $B(x_2|y_2)$ und $A(x_1|y_1)$ ergibt sich der Abstand einer Strecke aus dem Satz des Pythagoras mit

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$d = \sqrt{(2-(-2))^2 + ((-1)-2)^2}$

$d = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{25}$

$d = 5\ LE$



b) Mit $A(x_1|y_1)$ und $C(x_2|y_2)$ ergibt sich der Mittelpunkt einer Strecke aus:

$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$

$x_M = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5; \quad y_M = \frac{2+4}{2} = 3$

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AC}$ sind $M(-0{,}5|3)$.

c) Über die Punktsteigungsformel $g(x) = m(x-x_1) + y_1$ erhalten wir für die Gerade durch A und C:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-2}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$

$g(x) = \frac{2}{3}(x-1) + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

d) Die Fläche des Dreiecks ABC bestimmt sich aus der Fläche des (rot umrandeten) Rechtecks abzüglich der 3 äußeren Dreiecke über den Seiten des inneren Dreiecks.

$A_{Rechteck} = 4 \cdot 5 = 20\ FE$

$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ FE$

$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{AC}} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3\ FE$

$A_{Dreieck\ddot{u}ber\overline{CB}} = \frac{1 \cdot 5}{2} = 2{,}5\ FE$

$A_{ABC} = 20 - 6 - 3 - 2{,}5 = 8{,}5\ FE$