## Hinweis:

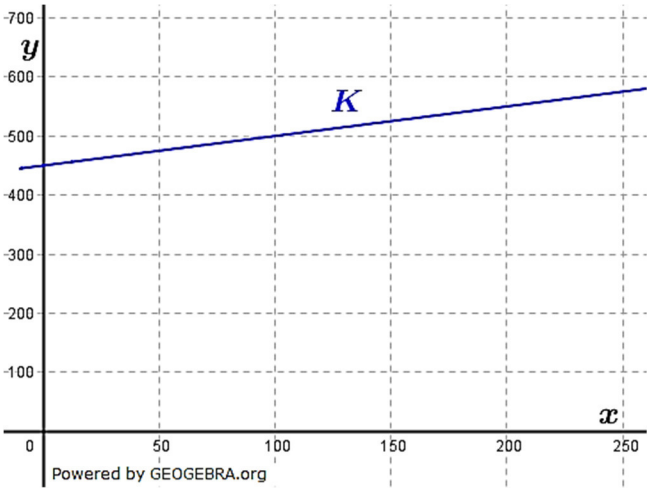
In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu anwendungsorientierten Themen.

## Aufgabe A1

Die Abbildung zeigt das Schaubild der linearen Kostenfunktion $K$.

a) Entnimm dem Schaubild die fixen Kosten und die variablen Stückkosten in €. Gib die Gesamtkosten $K$ bei einer Produktion von $x$ ME an.

b) Welcher Verkaufspreis je ME ist zu erzielen, wenn 175 ME erzeugt werden und kein Verlust entstehen soll?



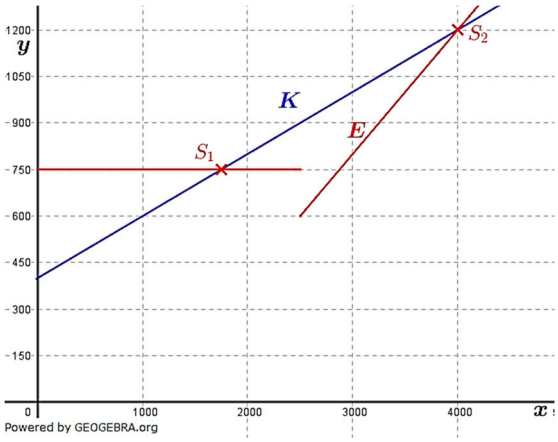

## Aufgabe A2

Die Kosten $K$ für die Herstellung von Tennisbällen hängen linear von der produzierten Menge ab.

a) Wie viel kosten 1000 bzw. 3000 Bälle? Gib einen Term für die Kostenfunktion $K$ an. Wie hoch sind die fixen Kosten und die variablen Stückkosten?

Für den Erlös gilt bis 2500 Stück ein Pauschalbetrag. Ab 2500 Stück steigt der Erlös linear mit der Anzahl der verkauften Bälle.

b) Bestimme die Erlösfunktion für $x > 2500$ und die Schnittpunkte $S_1$ und $S_2$. Kommentiere die $x$–Werte zwischen $S_1$ und $S_2$.




## Aufgabe A3

Ein Eisenträger hat eine Länge $l_0 = 85\,m$ und einen Ausdehnungskoeffizienten $\rho = 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{K}$ ($K \triangleq$ Kelvin).

Ein Funktionsterm $l(\Delta t) = l_0 + \rho \cdot l_0 \cdot \Delta t$ beschreibt die Länge des Eisenträgers in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz $\Delta t$ in $K$. Gib den Funktionsterm für die Länge dieses Eisenträgers an. Berechne $l(30)$, $l(40)$ und $l(60)$. Wie lang muss ein Eisenträger sein, wenn er bei einer Temperaturerhöhung um $25\,°K$ 25 mm länger wird?

## Aufgabe A4

In einem Betrieb entstehen Kosten $K$ in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl $x$.

| $x$ (Stück) | 50 | 100 | 140 | 200 |
|---|---|---|---|---|
| $K$ (in €) | 370 | 382 | 390 | 404 |

a) Zeichne die gegebenen Punkte in ein Koordinatensystem ein.

b) Zeichne eine Gerade ein, die den Verlauf der Kosten möglichst genau beschreibt.
Bestimme eine Geradengleichung mit dem WTR (Regression).

c) Wie hoch sind die Stückkosten bei einer Produktion von 140 Stück?
Gegen welchen Wert streben die Stückkosten für sehr hohe Stückzahlen?

d) Bei welcher Menge liegt die Gewinnschwelle, wenn ein Verkaufspreis von 5,20 € pro Stück erzielt wird?

## Aufgabe A5

In eine zylinderförmige Regentonne mit $1\,m^2$ Grundfläche fließen 80 Liter pro Stunde. Beschreibe die Füllhöhe $h$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$, wenn zu Beginn ($t = 0$) *150* Liter in der Tonne waren.
Ist der Zusammenhang zwischen $h$ und $t$ linear, wenn die Tonne gebaucht oder kegelförmig ist?

## Aufgabe A6

In einem volkswirtschaftlichen Modell sind die Konsumausgaben linear vom verfügbaren Einkommen abhängig. Bei einem Einkommen von *1000 €* betragen die Konsumausgaben *900 €*, bei *1800 €* betragen sie *1460 €*.

a) Ermittle einen Funktionsterm für die Konsumfunktion $K$. Welche Bedeutung hat die Steigung der zugehörigen Geraden?

b) Berechnen Sie die Höhe der Konsumausgaben, wenn das Einkommen *800*; *2500*; bzw. *4000 €* beträgt.

c) Die Konsumquote ist der Anteil des Einkommens, das für den Konsum aufgewendet wird. Bestimme die Konsumquote für die Einkommen aus b).
Welcher Zusammenhang besteht zwischen Konsumquote und Einkommen?

d) Welche Funktion $S$ beschreibt die Sparleistung in Abhängigkeit vom Einkommen? Welche Bedeutung hat die Nullstelle von $S$?

## Aufgabe A7

Der elektrische Widerstand eines Leiters verursacht einen Spannungsabfall. Die Spannung $U$, die dem Kunden zur Verfügung steht, wird mit der Formel $U(I) = U_0 - R \cdot I$ berechnet. Dabei ist $U_0$ die Ausgangsspannung (Spannung am Generator, Battewriespannung), $R$ der Ohm'sche Widerstand und $I$ die Stromstärke. Die Spannung $U$ kann als Funktion der Stromstärke $I$ aufgefasst werden: $U(I) = 2000 - 1{,}17 \cdot I$ (Die Einheiten sind weggelassen).

a) Berechne den Spannungsabfall bei einer Stromstärke von 25 Ampere.

b) Welche physikalische Bedeutung hat die Nullstelle von $U$?

## Aufgabe A8

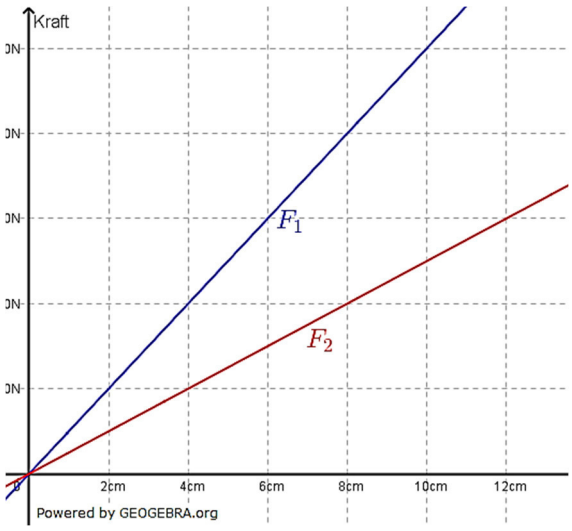
Um eine Schraubenfeder als Federkraftwaage benutzen zu können, wird der Zusammenhang zwischen der an der Feder wirkenden Gewichtskraft $F_G$ (in $N$) und der Federauslenkung $s$ (in cm) festgestellt.

a) Bestimm die Federkonstante $D$ bei der Feder $F_2$. Welche Bedeutung hat $D$?

b) Bestimm einen Term, der die Abhängigkeit der Kraft $F_G$ von der Auslenkung $s$ beschreibt.

c) Ist es möglich, mit dieser Formel die für 1 m Auslenkung benötigte Gewichtskraft $F_G$ zu bestimmen?

d) Was bedeuten die unterschiedlichen Federkonstanten für die Federn $F_1$ und $F_2$?



## Lösung A1

a) Fixe Kosten:
Die Fixkosten lesen wir im Schnittpunkt der Kostenfunktion mit der-Achse ab. Sie betragen $450\,€$.
Variable Stückkosten:
Die variablen Stückkosten ergeben sich aus der Steigung der Kostenfunktion. Aus der Graphik lesen wir $m = 0{,}5\,€/Stck.$ ab.
Damit ergibt sich die Kostenfunktion zu $K(x) = 0{,}5x + 450$.

b) Kosten bei 175 Mengeneinheiten ist $K(175)$.
$K(175) = 0{,}5 \cdot 175{,}00 + 450 = 537{,}50$
Damit kein Verlust entsteht, müssen die Erlöse mindestens die Kosten decken. Die Erlösfunktion lautet $E(x) = a \cdot x$ mit $a$ als Verkaufspreis pro Stück.
$E(175) = a \cdot 175 = 537{,}50 \quad | \quad :175$
$a = 3{,}07$
Der Stückpreis muss mindestens $3{,}07\,€$ betragen.

## Lösung A2

a) Aus der Graphik lesen wir ab:
Kosten für 1000 Stück: $K(1000) = 600\,€$
Kosten für 4000 Stück: $K(4000) = 1200\,€$
Variable Kosten / Stück $m = \frac{1200-600}{4000-1000} = \frac{600}{3000} = 0{,}20\,€$ / Stück.
Kostenfunktion (Gesamt): $K(x) = 0{,}2(x - 1000) + 600$
$K(x) = 0{,}2x + 400$
Fixkosten: $400\,€$

b) Aus der Graphik lesen wir ab:
Erlös für 4000 Stück: $E(4000) = 1200\,€$
Erlös für 2500 Stück: $E(2500) = 600\,€$
Erlösfunktion: $E(x) = \frac{1200-600}{4000-2500} \cdot x + c = 0{,}4 \cdot x + c$
$E(x) = 0{,}4(x - 4000) + 1200$
$E(x) = 0{,}4x - 400$
Schnittpunkt $S_1(1750|750)$; $S_2(4000|1200)$
Für $1750 < x < 4000$ entsteht ein Verlust, da $E(x) < K(x)$
Für $2500 < x < 2875$ gilt $E(x) < 750$. Braucht ein Kunde z.B. $2000$ Bälle, so wird er mehr als $2500$ (bis max. $2875$) Bälle zu einem günstigeren Preis erwerben.

## Lösung A3

a) *Kostenfunktion der Brauerei:*
Wir setzen für die Anzahl der auszuliefernden Kisten die Variable $x$. Die Kostenfunktion lautet dann:
$K_B(x) = 0{,}8x + 840$

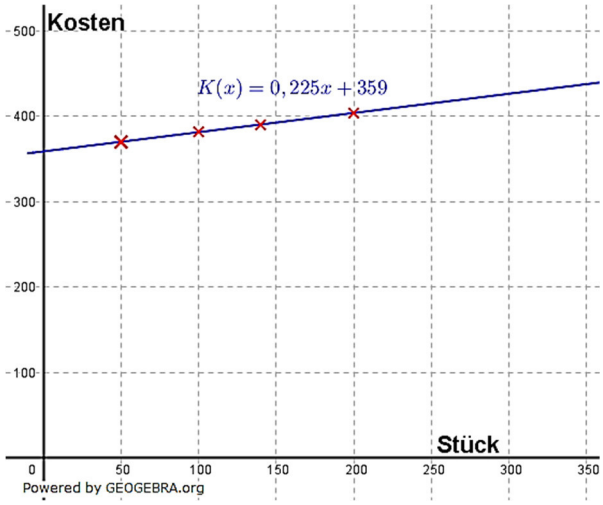
b) *Kostenfunktion des Logistikunternehmens:*
Wir setzen für die Anzahl der auszuliefernden Kisten die Variable $x$. Die Kostenfunktion lautet dann:
$K_L(x) = 1{,}15x$
*Einsparungspotenzial bei* $2500$ *Kisten:*

Wir berechnen die Differenz von $K_L(x)$ und $K_B(x)$.
$K_L(x) - K_B(x) = 1{,}15x - 0{,}8x - 840$
$K_L(x) - K_B(x) = 0{,}35x - 840$
Wir berechnen die Differenz für $2500$ Kisten:
$K_L(2500) - K_B(2500) = 0{,}35 \cdot 2500 - 840 = 35$
*Die Brauerei kann monatlich 35 € sparen, wenn sie die Auslieferung der 2500 Kisten selbst übernimmt.*
*Grenze der Kistenanzahl für Auslieferung durch Logistikunternehmen:*
Hierunter verstehen wir den Break-Even-Point, das ist der Punkt, zu dem die Kosten der Auslieferung durch die Brauerei und durch das Logistik-Unternehmen gleich groß sind. Wir erhalten diesen Punkt über den Schnittpunkt der beiden Kostenfunktionen.
$K_B(x) \cap K_L(x)$
$0{,}8x + 840 = 1{,}15x \quad | \quad -0{,}8x$
$0{,}35x = 840 \quad | \quad :0{,}35$
$x = 2400$
*Das Logistikunternehmen sollte die Auslieferung bis zu einer Anzahl von* $2400$ *Kisten übernehmen.*

c) *Kosten der Brauerei bei* $4000$ *Kisten:*
$K_B(4000) = 0{,}8 \cdot 4000\,€ + 840\,€ = 4040\,€$
*Kosten bei Vergabe an Fremdunternehmen:*
$K_F(4000) = K_B(4000) - 680\,€ = 4040\,€ - 680\,€ = 3360\,€$
Kosten pro Kiste: $\frac{3360\,€}{4000} = 0{,}84\,€$ / Kiste
**Angebot 1:** $0{,}84\,€$ pro Kiste.
Alternativ z. B. Fixkosten von $560{,}00\,€$:
Kosten pro Kiste: $\frac{3360\,€ - 560{,}00\,€}{4000} = 0{,}70\,€$ / Kiste
**Angebot 2:** $0{,}70\,€$ pro Kiste zuzüglich Fixkosten von $560{,}00\,€$.

## Lösung A4

a) und b)
Die Regressionsfunktion des WTR liefert $K(x) = 0{,}225x + 359$.




c) Stückkosten bei *140* Stück:
$K(140) = 0{,}225 \cdot 140 + 359$
$= 390{,}50\,€$
1 Stück: $\frac{390{,}50\,€}{140} = 2{,}786\,€$
Stückkosten hohe Stückzahlen:
1 Stück: $\frac{0{,}225\,€ \cdot \infty + 359}{\infty}$
Wegen $lim_{x \to \infty} \frac{359}{\infty} = 0$ streben die Kosten für hohe Stückzahlen gegen die variablen Stückkosten von $0{,}225\,€ \,/\, Stck$.

d) $E(x) = 5{,}2x$
Ansatz: $E(x) = K(x)$
$5{,}2x = 0{,}225x + 359 \implies x = 72{,}16$
*Die Gewinnschwelle liegt bei* $73$ *Stück.*

## Lösung A5

$80\,l = 0{,}08\,m^3$

Füllhöhe: $h = \frac{V}{A} = \frac{0{,}08m^3}{1m^2} = 0{,}08m = 8\,cm$

Die Wasserstand der Tonne steigt um $8\,cm/Std.$

$150\,l = 1{,}5\,m^3$ Anfangsbestand entspricht einer Höhe von $15\,cm$.

$t$ in Stunden; $h(t)$ in cm: $h(t) = 8t + 15$.

*Bei gebaucht oder kegelförmig ist der Anstieg nicht mehr linear, da die Erhöhung nicht mehr proportional zur Zeit ist.*

## Lösung A6

a) Das verfügbare Einkommen sei $x$.
Die Konsumfunktion sei $K$.
Zwei Punkte sind gegeben: $P(1000|900)$; $Q(1800|1460)$
$K(x) = mx + c \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1460-900}{1800-1000} = 0{,}7$
$K(x) = 0{,}7(x - 1000) + 900 = 0{,}7x + 200$
$m = 0{,}7 = 70\%$ bedeutet $70\%$ des Zuwachses werden für den Konsum ausgegeben.

b) $K(800) = 750$; $K(2500) = 1950$; $K(4000) = 3000$;

c) Konsumquote bei Einkommen $x$: $800 \triangleq 95\%$
$2500 \triangleq 78\%$
$4000 \triangleq 75\%$
Je höher das Einkommen, desto mehr nähert sich die Konsumquote $70\%$ an.

d) Sparleistung $S$ in Abhängigkeit vom Einkommen $x$.
Funktionsterm: $S(x) = x - K(x) = x - 0{,}7x - 200 = 0{,}3x - 200$
Nullstelle von $S(x)$: $0{,}3x - 200 = 0 \implies x = 666{,}60\,€$
D. h. erst ab einem Einkommen von mehr als $666{,}60\,€$, kann ein Individuum etwas sparen (Existenzminimum).

## Lösung A7

a) Federkonstante $D$ in $\frac{N}{cm}$ bei der Feder $F_2$:
$$D = \frac{50}{4} = 12{,}5$$
Mathematisch: $D$ ist die Steigung der Geraden
Physikalisch: $D$ ist die Federkonstante. Wird die Feder um $1\,cm$ ausgedehnt, so ist eine Kraft von $12{,}5\,N$ notwendig.

b) $F_G$ (in N) in Abhängigkeit von der Auslenkung $s$ (in cm).
Für die Feder $F_1$: $F_G(s) = 25s$
Für die Feder $F_2$: $F_G(s) = 12{,}5s$

c) Für $1\,m$ ist keine Aussage möglich, da die Feder u. U. überspannt ist.

d) Die unterschiedlichen Federkonstanten für die Federn $F_1$ und $F_2$ stehen für die unterschiedlichen Härten der beiden Federn.

## Lösung A8

a) $U(25) = 2000 - 1{,}17 \cdot 25 = 1970{,}75$
Der Spannungsabfall beträgt $29{,}25\,V$.

b) Nullstelle von $U(I)$:
$I_0 = 1709$.
*Physikalische Bedeutung: Die maximale Stromstärke beträgt* $1709\,A$.