Level 3 – Expert – Blatt 4
Dokument mit 19 Aufgaben

Hinweis:
In diesem Aufgabenblatt befinden sich Aufgaben zu linearen Funktionen *mit Parameter* (Geradenscharen, Geradenbüschel).

Aufgabe A1
Gegeben ist für $\boldsymbol{t} > 0$ die Funktion f_t mit $f_t(x) = tx - 4t - 1;\ x \in \mathbb{R}$.
Zeige, dass für die Nullstelle x_t von f_t gilt: $x_t > 4$.

Aufgabe A2
K_t ist das Schaubild von f_t mit $f_t(x) = 2tx + 4t - 1;\ x \in \mathbb{R}$.
a) Bestimme die Koordinaten des gemeinsamen Punktes aller Schargeraden.
b) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
c) Zeichne K_t für $t \in \{1; -0{,}5; 1{,}5\}$.
d) Bestimme t so, dass K_t auf der Geraden h mit $h(x) = \frac{3}{2}x$ senkrecht steht.
e) Für welchen Wert von t schneidet K_t die Gerade g mit $g(x) = -2x + 3$ an der Stelle $x = 1{,}5$?
Bestimme den Schnittpunkt.

Aufgabe A3
K_t ist das Schaubild der linearen Funktion f_t mit $f_t(x) = -\frac{2}{t}x + 4 - \frac{1}{t};\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^*$.
a) Untersuche K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
b) Zeichne K_t für $t \in \{-2; -1; 2\}$.
c) Bestimme t so, dass K_t eine Ursprungsgerade ist.
d) Bestimme den gemeinsamen Punkt aller Schargeraden.

Aufgabe A4
Gegeben ist die lineare Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{t-2}{3}x + t;\ \ x, t \in \mathbb{R}$. K_t ist das Schaubild von f_t.
a) Zeichne die Schargeraden K_t für $t \in \{0; 1; 3\}$.
b) Berechne die Koordinaten des gemeinsamen Punktes aller Schargeraden.
c) Welche Schargerade steht senkrecht auf der Geraden h mit $h(x) = \frac{4}{3}x$?
d) Zeige: Keine der Schargeraden verläuft durch den Punkt $T(-3|5)$.

Aufgabe A5
Bestimme die Gleichung der Geradenschar,
a) deren Geraden die Steigung $m = -3$ haben.
b) deren Geraden senkrecht auf der Geraden mit $y = -2x + 5$ stehen.
c) deren Geraden durch den Punkt $P(-5|4)$ verlaufen abernicht parallel zur y–Achse sind.
d) deren Geraden parallel zur x–Achse verlaufen.
e) deren Geraden die x–Achse in $x = 2$ schneiden.

Lösung A1

Nullstellen mit $f_t(x) = 0$
$tx - 4t - 1 = 0$
$x_{t_0} = 4 + \frac{1}{t}$
Wegen Aufgabenstellung $t > 0$ ist somit stets $x_{t_0} > 4$.

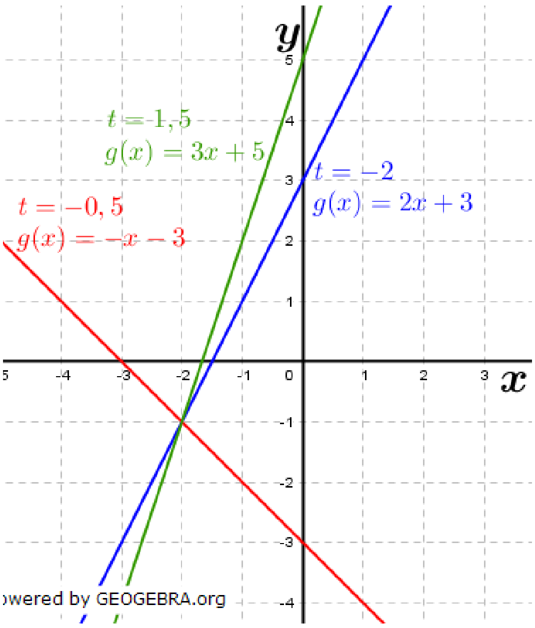
Lösung A2

a) Wir stellen die gegebene Funktionsgleichung um in die Punkt-Steigungsform
$f_t(x) = 2tx + 4t - 1 = 2t(x + 2) - 1$.
Aus der Punkt-Steigungsform lesen wir einen gemeinsamen Punkt ab:
Die Geradenschar K_t hat den gemeinsamen Punkt $P(-2|-1)$.

b) Nullstellen mit $f_t(x) = 0$

$2tx + 4t - 1 = 0 \quad | \quad -4t; +1$
$2tx = -4t + 1 \quad | \quad :2t$
$x_0 = -2 + \frac{1}{2t}$
$N_t\left(-2 + \frac{1}{2t}\middle|0\right)$
$S_{y_t}(0|4t - 1)$

c) Siehe Graphik rechts.



d) Orthogonalitätsbedingung: $m_t \cdot m_h = -1$
$2t \cdot \frac{3}{2} = -1 \implies t = -\frac{1}{3}$
Für $t = -\frac{1}{3}$ steht f_t auf der Gerden g orthogonal.

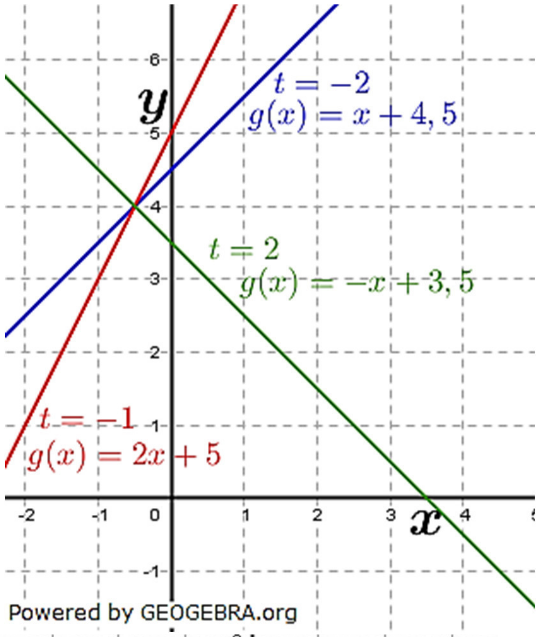
e) $g(1{,}5) = -2 \cdot 1{,}5 + 3 = 0$
Schnittpunkt $P(1{,}5|0)$
Punktprobe:
$f_t(1{,}5) = 0 = 2t \cdot 1{,}5 + 4t - 1$
$7t = 1 \implies t = \frac{1}{7}$
Für $t = \frac{1}{7}$ schneidet $f_{\frac{1}{7}}$ die Gerade g in $P(1{,}5|0)$.

Lösung A3

a) Nullstellen mit $f_t(x) = 0$

$-\frac{2}{t}x + 4 - \frac{1}{t} = 0 \quad | \quad \cdot t$
$-2x + 4t - 1 = 0 \quad | \quad -4t; +1$
$-2x = 1 - 4t \quad | \quad :(-2)$
$x_0 = 2t - \frac{1}{2}$
$N_t\left(2t - \frac{1}{2}\middle|0\right)$
$S_{y_t}\left(0\middle|4 - \frac{1}{t}\right)$

b) Siehe Graphik rechts.



c) Eine Ursprungsgerade liegt vor, wenn das absolute Glied c der Funktionsgleichung Null ist.

$4 - \frac{1}{t} = 0$

$4 = \frac{1}{t}$

$t = \frac{1}{4}$

$K_{\frac{1}{4}}$ ist eine Ursprungsgerade.

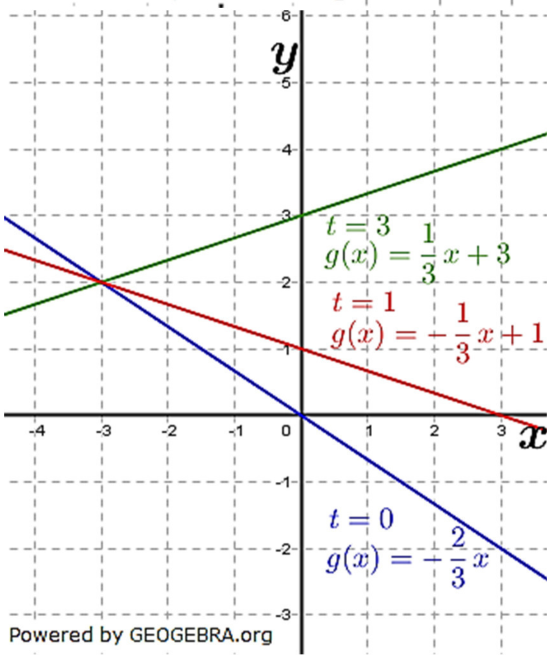
d) Umstellung von $f_t(x) = -\frac{2}{t}x + 4 - \frac{1}{t}$ in die Punkt-Steigungsformel:

$f_t(x) = -\frac{2}{t}\left(x + \frac{1}{2}\right) + 4$

Der gemeinsame Schnittpunkt aller Schargeraden ist $S\left(-\frac{1}{2}\middle|4\right)$.

Lösung A4

a) Siehe Graphik rechts.



b) Umstellung von $f_t(x) = \frac{t-2}{3}x + t$ in die Punkt-Steigungsformel:

$f_t(x) = \frac{t-2}{3}(x + 3) + 2$

Der gemeinsame Punkt ist $P(-3|2)$.

c) Bedingung für Senkrechte:

$m_t \cdot m_h = -1$

$\frac{t-2}{3} \cdot \frac{4}{3} = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$

$f_{-\frac{1}{4}}$ steht senkrecht auf h.

d) Keine der Schargeraden verläuft durch den Punkt $T(-3|5)$:

$f_t(-3) = 5 = \frac{t-2}{3} \cdot (-3) + t$

$\Rightarrow 5 = 2$ Widerspruch.

Keine der Schargeraden verläuft durch den Punkt $T(-3|5)$.

Lösung A5

a) Geradenschar mit der Steigung $m = -3$:

$g_t(x) = -3x + t$

b) Geradenschar, die senkrecht auf der Geraden mit $y = -2x + 5$ steht.

$g_t(x) = \frac{1}{2}x + t$

c) Geradenschar durch den Punkt $P(-5|4)$ verlaufen aber nicht parallel zur y–Achse:

$g_t(x) = \frac{1}{t} \cdot (x + 5) + 4;\ \ t \in \mathbb{R}^*$

d) Geradenschar parallel zur x–Achse:

$x = t$

e) Geradenschar, die die x–Achse in $x = 2$ schneidet:

$g_t(x) = t(x - 2)$