Aufgabe A1

Der Wasserstrahl eines Springbrunnens hat eine Höhe von $6\,m$ und eine Weite von $6\,m$. Martin hat Lust unter dem Wasserstrahl durchzulaufen.

a) Wähle ein geeigneters Koordinatensystem und skizziere den Wasserstrahl.
b) Bestimme den zugehörigen Funktionsterm.
c) Martin ist $1{,}38\,m$ groß. Wie weit darf er sich zur Düse hinbewegen, ohne nass zu werden?

Aufgabe A2

Bestimme die Gleichung der Parabel, wenn folgendes bekannt ist:

a) Die Parabel berührt die x–Achse in $x = -36$ und verläuft durch $A(-5|-7)$.
b) Die Parabel schneidet die x–Achse in 2 und -1 und verläuft durch $A(1|-2)$.
c) Eine verschobene Normalparabel berührt die x–Achse bei $x = -2$.
d) Die Parabel verläuft symmetrisch zur y–Achse durch die Punkte $A(1|0{,}5)$ und $B(-2|-5{,}5)$.

Aufgabe A3

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, wenn folgendes bekannt ist:

a) Die Parabel berührt die x–Achse in $x = -3$ und verläuft durch $A(-5|-7)$.
b) Die Parabel schneidet die x–Achse in -2 und 1 und verläuft durch $A(-1|2)$.
c) Eine verschobene Normalparabel berührt die x–Achse bei $x = 2$.
d) Die Parabel verläuft symmetrisch zur y–Achse durch die Punkte $A(-1|-0{,}5)$ und $B(2|5{,}5)$.

Aufgabe A4

Für eine quadratische Funktion f gilt $f(-2) = 3 = f(2)$.
Welche Eigenschaft hat das Schaubild von f?
Bestimme einen Funktionsterm. Ist der Graph von f festgelegt, wenn der Graph die Form einer Normalparabel hat?

Aufgabe A5

Eine Parabel hat den Scheitel $S(1|4)$ und verläuft durch den Ursprung. Bestimme die Parabelgleichung.

Aufgabe A6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + bx + c$. Mache Aussagen über b und c, wenn gilt:

a) f hat eine Nullstelle in $x = 0$.
b) Die Nullstellen von f unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Aufgabe A7

Für eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt $f(0) = 5$ und $f(1) = 2$. Welche Beziehung besteht zwischen a und b? Bestimme a und b, wenn $x = 3$ Nullstelle von f ist.

Aufgabe A8

Gib jeweils zwei Funktionsterme von verschiedenen quadratischen Funktionen an, deren Schaubilder

a) keinen Schnittpunkt mit der x–Achse haben.
b) zwei Schnittpunkte mit der x–Achse haben.
c) den Scheitel $S(-2|0)$ besitzen.

Aufgabe A9

Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = ax^2 + bx + 3$ und $g(x) = 2x - 1$.
Die Funktionswerte von f und g stimmen in $x = -1$ und $x = 0{,}5$ überein.
Bestimme a und b.

Aufgabe A10

Eine Parabel 2. Ordnung schneidet die x–Achse in -5 und 5. Die zugehörige Funktion ist damit nicht eindeutig bestimmt.
Gib die Funktionsterme von zwei möglichen Funktionen an.
Zeige, dass die Schaubilder symmetrisch zur y–Achse sind.

Aufgabe A11

Das Schaubild einer quadratischen Funktion f geht durch die Punkte $P(-2|1)$, $Q(-4|4)$ und $R(6|9)$. Bestimme $f(x)$.

Aufgabe A12

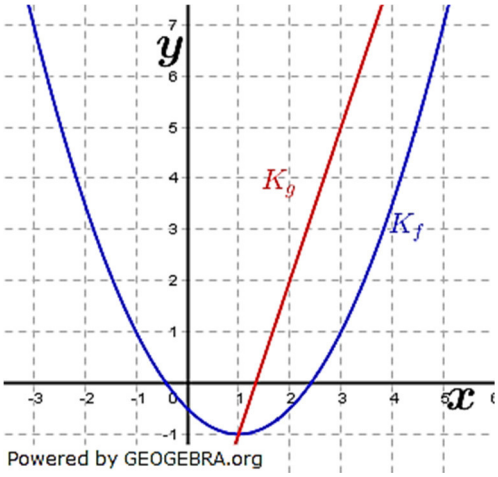
Skizziere das Schaubild K der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2; x \in \mathbb{R}$ in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichne die markanten Punkte.
Welche Punkte auf K haben vom Ursprung einen Abstand von 3?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen K und dem Graph von f aus Aufgabe 11?

Aufgabe A13

Eine Gerade g geht durch die Punkte $T_1(-1|-1{,}75)$ und $T_2(-4|-4)$.
Für welche Werte von x gilt: K aus Aufgabe 12 verläuft unterhalb von g?
Erläutere deinen Lösungsweg.

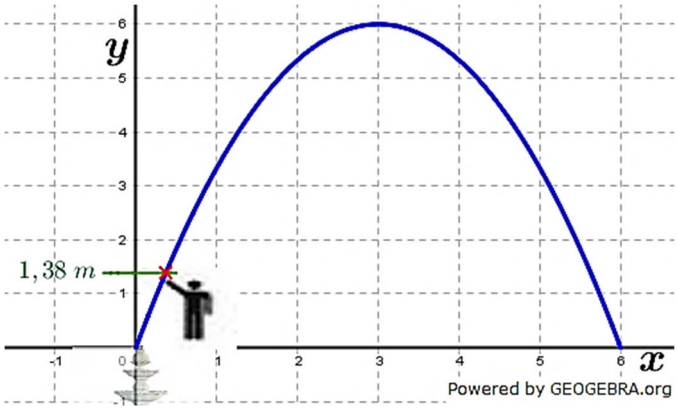
Aufgabe A14

Die Abbildung zeigt den Graphen K_f einer quadratischen Funktion sowie K_g einer linearen Funktion.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_f und K_g.



Lösung A1

a) Skizze siehe Grafik rechts.



b) $N_1(0|0);\ N_2(6|0);\ S(3|6)$

$f(x) = ax \cdot (x-6)$

$6 = 3a \cdot (3-6)$

$9a = -6$

$a = -\frac{2}{3}$

$f(x) = -\frac{2}{3}x \cdot (x-6)$

$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$

c) Wir suchen den -Wert der Parabel für $y = 1{,}38$.

$-\frac{2}{3}x^2 + 4x = 1{,}38$

$-\frac{2}{3}x^2 + 4x - 1{,}38 = 0 \quad | \quad \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$x^2 - 6x + 2{,}07 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 2{,}07} = 3 \pm 2{,}63$

$x_1 = 5{,}63;\ \ x_2 = 0{,}3675$

Wegen Aufgabenstellung „zur Düse hinbewegen" ist $x_2 = 0{,}3675$ die Lösung dieser Aufgabe.

Martin darf sich bis auf etwa 37 cm der Düse nähern, ohne nass zu werden.

Lösung A2

a) Berührpunkt mit der x-Achse ist doppelte Nullstelle: $N(-36|0)$, weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+36)^2 \quad |$ doppelte Nullstelle

$-4 = a \cdot (-5+36)^2 \quad |$ Punktprobe mit $A(-5|-4)$

$-4 = 961a$

$a = -\frac{4}{961}$

$f(x) = -\frac{4}{961} \cdot (x+36)^2$

b) Zwei Nullstellen $N_1(2|0);\ \ N_2(-1|0)$ und weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+1)(x-2) \quad |$ Nullstellenform

$-4 = a \cdot (-5+1)(-5-2) \quad |$ Punktprobe mit $A(-5|-4)$

$-4 = 28a$

$a = -\frac{1}{7}$

$f(x) = -\frac{1}{7}(x+1)(x-2)$

c) Normalparabel mit doppelte Nullstelle bei $N(-2|0)$.

$f(x) = (x+2)^2 \quad |$ Nullstellenform Normalparabel

$f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad |$ Hauptform

d) Symmetrie mit y-Achse durch Punkte $A(1|0{,}5)$ und $B(-2|-5{,}5)$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$

$0{,}5 = a + c \quad |$ Punktprobe mit $A(1|0{,}5)$

$-5{,}5 = 4a + c \quad |$ Punktprobe mit $B(-2|-5{,}5)$

$-6 = -3a \ \Rightarrow\ a = 2$

$0{,}5 = 2 + c \ \Rightarrow\ c = -1{,}5$

$f(x) = 2x^2 - 1{,}5$

Lösung A3

a) Berührpunkt mit der x-Achse ist doppelte Nullstelle: $N(-3|0)$, weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+3)^2$ | doppelte Nullstelle
$-4 = a \cdot (-5+3)^2$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$
$-4 = a$
$a = 1$
$f(x) = (x+3)^2) = x^2 + 6x + 9$

b) Zwei Nullstellen $N_1(-2|0)$; $N_2(1|0)$ und weiterer Punkt $A(-1|2)$.

$f(x) = a \cdot (x+2)(x-1)$ | Nullstellenform
$2 = a \cdot (-1+2)(-1-1)$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$
$2 = -2a$
$a = -1$
$f(x) = -(x+2)(x-1)$

c) Normalparabel mit doppelte Nullstelle bei $N(2|0)$.

$f(x) = (x-2)^2$ | Nullstellenform Normalparabel
$f(x) = x^2 - 4x + 4$ | Hauptform

d) Symmetrie mit y-Achse durch Punkte $A(-1|-0{,}5)$ und $B(2|5{,}5)$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$
$-0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(1|0{,}5)$
$5{,}5 = 4a + c$ | Punktprobe mit $B(-2|-5{,}5)$
$6 = 3a \;\; => \;\; a = 2$
$-0{,}5 = 2 + c \;\; => \;\; c = -2{,}5$
$f(x) = 2x^2 - 2{,}5$

Lösung A4

Die Angabe $f(-2) = 3 = f(2)$ sagt aus, dass der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist. Dabei kann er sowohl nach oben als auch nach unten geöffnet sein.

Funktionsgleichung:
$f(x) = a \cdot x^2 + c$
$-0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(2|3)$
$3 = 4a + c$
$c = 3 - 4a$
$f(x) = a \cdot x^2 + 3 - 4a$
$f(x) = a \cdot (x^2 - 4) + 3$

$f(x)$ als Normalparabel:
Bei der Normalparabel ist $|a| = 1$:
$f(x) = x^2 - 1$, alternativ $f(x) = -x^2 + 7$

Lösung A5

Gegeben ist der Scheitelpunkt $S(1|4)$ und als weiterer Punkt der Ursprung $O(0|0)$.

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 4$ | Scheitelform
$0 = a \cdot (0-1)^2 + 4$ | Punktprobe mit $O(0|0)$
$a = -4$
$f(x) = -4 \cdot (x-1)^2 + 4$
$f(x) = -4x^2 + 8x$ | Hauptform

Lösung A6

$f(x) = x^2 + bx + c$

Die Graphen der Parabeln sind Normalparabeln.

a) f hat eine Nullstelle in $x = 0$.
In diesem Falle ist $c = 0$ (y-Achsenabschnitt).

b) Die Nullstellen von f unterscheiden sich nur im Vorzeichen.
In diesem Falle ist der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse. Dadurch ist $b = 0$.

Lösung A7

Gegeben ist $f(x) = ax^2 + bx + c$ sowie die zwei Punkte $P(0|5)$ und $Q(1|2)$.

Beziehung zwischen a und b:

$5 = c$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$2 = a + b + 5$ | Punktprobe mit $Q(1|2)$

$a = -3 - b$

$a = -(b + 3)$

a und b, wenn $x = 3$ Nullstelle von f ist:

Zusatzpunkt $N(3|0)$

$0 = 9a + 3b + 5$ | Punktprobe mit $N(3|0)$

$9a = -3b - 5$

$a = -\left(\frac{1}{3}b + \frac{5}{9}\right)$

$-(b + 3) = -\left(\frac{1}{3}b + \frac{5}{9}\right)$ | Gleichsetzung der beiden a.

$b - \frac{1}{3}b = \frac{5}{9} - 3$

$\frac{2}{3}b = -\frac{22}{9}$

$b = -\frac{66}{18} = -\frac{11}{3}$

$a = -\left(-\frac{11}{3} + 3\right)$

$a = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + 5$

Lösung A8

a) Keine Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f_1(x) = x^2 + 1;\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

b) Zwei Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f_1(x) = x^2 - 1;\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

c) Mit Scheitel $S(-2|0)$:
$f_1(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4;\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

Lösung A9

Lösungshilfe

Aus dem Text heraus müssen wir interpretieren, dass sich f und g schneiden, nämlich in $x_1 = -1$ und $x_2 = 0{,}5$. Da die Funktionsgleichung von g vollständig gegeben ist, können wir die zugehörigen y-Werte errechnen.
Damit haben wir zwei Punkte der Parabel. Durch Punktproben können wir dann a und b ermitteln.

f schneidet g in $P\big(-1\big|g(-1)\big)$ und $P\big(0{,}5\big|g(0{,}5)\big)$.
$g(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \;\; => \;\; P(-1|-3)$
$g(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 - 1 = 0 \;\; => \;\; Q(0{,}5|0)$

(1)	$a - b + 3 = -3$	|	Punktprobe mit $P(-1\|-3)$
(2)	$0{,}25a + 0{,}5b + 3 = 0$	|	Punktprobe mit $Q(0{,}5\|0)$
(1)	$a - b + 3 = -3$		
(2)	$0{,}25a + 0{,}5b + 3 = 0$	|	$\cdot 2$
(1)	$a - b + 3 = -3$		
(2)	$\underline{0{,}5a + b + 6 = 0}$	|	$\cdot 2$
(1)+(2)	$1{,}5a + 9 = -3$	|	-9
	$1{,}5a = -12$	|	$:1{,}5$
	$a = -8$		
$a \to (1)$	$-8 - b + 3 = -3$		
	$b = 2$		

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -8x^2 + 2x + 3$.

Lösung A10

Gegeben sind die beiden Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 5$. Der Streckungsfaktor in y-Richtung ist nicht bekannt. Wir stellen die Nullstellenform auf:
$f(x) = a \cdot (x - 5)(x + 5)$
Es sollen zwei Lösungen angegeben werden, so z.B.
$f_1(x) = x^2 - 25$ und $f_2(x) = -x^2 + 25$

Lösung A11

Quadratische Funktionsgleichung durch drei Punkte.
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Lineares Gleichungssystem:

(1)	$4a - 2b + c = 1$	|	Punktprobe mit $P(-2\|1)$
(2)	$16a - 4b + c = 4$	|	Punktprobe mit $Q(-4\|4)$
(3)	$36a + 6b + c = 9$	|	Punktprobe mit $R(6\|9)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu
$a = \frac{1}{2}; \;\; b = -1; \;\; c = -1$
Die Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Input interpretation:

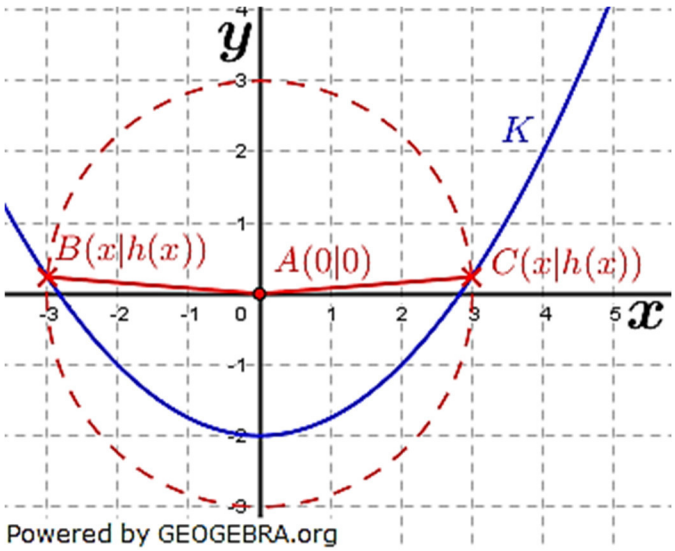
solve $\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ 16a - 4b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 9 \end{cases}$ for a, b, c

Result:

$a = \frac{1}{4}$ and $b = 0$ and $c = 0$

Lösung A12

Die Graphik verdeutlicht die Situation. Es gibt zwei Punkte B und C auf K die vom Ursprung A des Koordinatensystems den Abstand 3 haben.



Abstände zwischen zwei Punkten berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - 0)^2 + (y_B - 0)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + h(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2}$

Der Abstand soll 3 sein:

$\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2} = 3 \qquad | \quad \uparrow^2$

$\frac{5}{4}x^2 - 2 = 9$

$5x^2 = 44$

$x^2 = \frac{44}{5}$

$x_{1,2} = \pm 2{,}9665$

$h(2{,}9665) = \frac{1}{4} \cdot 2{,}9665^2 - 2 = \frac{1}{5}$

$h(-2{,}9665) = \frac{1}{4} \cdot (-2{,}9665)^2 - 2 = \frac{1}{5}$

Die beiden Punkte $B(-2{,}97|0{,}2)$ und $C(-2{,}97|0{,}2)$ auf h haben vom Ursprung den Abstand 3.

Zusammenhang zwischen K und dem Graph von f aus Aufgabe 11:
K ist gegenüber dem Graphen von f aus Aufgaben 11 um 2 Einheiten nach unten verschoben.

Lösung A13

Lösungshilfe

Zunächst müssen wir über die beiden gegebenen Punkte T_1 und T_2 die Funktionsgleichung der Geraden aufstellen.
Wir bestimmen dann die Schnittpunkte dieser Geraden mit der quadratischen Funktion f aus Aufgabe 12. Über die entstehenden Schnittpunkte können wir dann entscheiden, in welchen Intervallen g oberhalb bzw. unterhalb von K verläuft.

Gerade durch T_1 und T_2:

$g(x) = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-(-1{,}75)}{-4-(-1)} = \frac{-2{,}25}{-3} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot (-4) + c = -4 \qquad |$ Punktprobe mit $T_2(-4|-4)$

$c = -1$

$g(x) = \frac{3}{4}x - 1$

$g \cap \frac{1}{4}x^2 - 2$

$\frac{1}{4}x^2 - 2 = \frac{3}{4}x - 1$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 = 0 \qquad | \quad \cdot 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 4$

g schneidet K in den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

Da f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, verläuft K im Intervall $I =]-1; 4[$ unterhalb von g.

Lösung A14

Lösungshilfe

Aus der gegebenen Graphik heraus müssen wir die Funktionsgleichungen für K_f und K_g bestimmen. Durch Gleichsetzung der beiden Funktionsgleichungen können wir die Schnittpunkte von f und g bestimmen.

Funktionsgleichung für K_g:

Die Gerade verläuft durch die Punkte $P(1|-1)$ und $Q(3|5)$ (abgelesen).

$g(x) = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$3 \cdot 1 + c = -1 \qquad |$ Punktprobe mit $P(1|-1)$

$c = -4$

$g(x) = 3x - 4$

Funktionsgleichung für K_f:

Die Parabel hat ihren Scheitel in $P(1|-1)$ und verläuft durch $R(3|1)$ (abgelesen).

$g(x) = a(x-1)^2 - 1 \qquad |$ Scheitelform

$a(3-1)^2 - 1 = 1 \qquad |$ Punktprobe mit $R(3|1)$

$4a = 2 \;\; => \;\; a = \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$

$g \cap f$

$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 3x - 4 \qquad | \quad -3x + 4$

$\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} = 0 \qquad | \quad \cdot 2$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm 3$

$x_1 = 7; \;\; x_2 = 1$

$g(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$

$g(7) = 3 \cdot 7 - 4 = 17$

Die beiden Schnittpunkte von K_g und K_f haben die Koordinaten $S_1(1|-1)$ und $S_2(7|17)$.