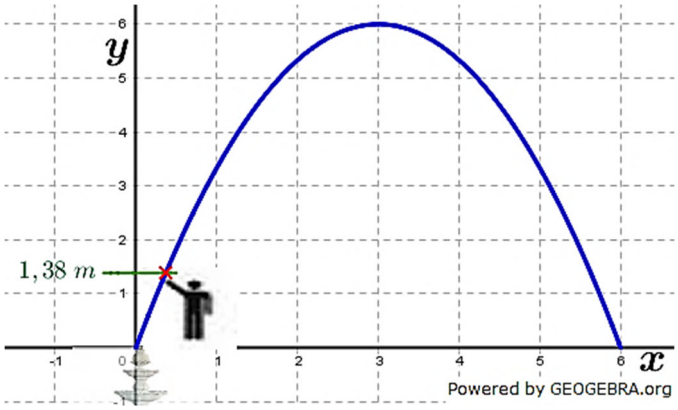
Lösung A1

a) Skizze siehe Grafik rechts.



b) $N_1(0|0)$; $N_2(6|0)$; $S(3|6)$

$f(x) = ax \cdot (x-6)$

$6 = 3a \cdot (3-6)$

$9a = -6$

$a = -\frac{2}{3}$

$f(x) = -\frac{2}{3}x \cdot (x-6)$

$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$

c) Wir suchen den -Wert der Parabel für $y = 1{,}38$.

$-\frac{2}{3}x^2 + 4x = 1{,}38$

$-\frac{2}{3}x^2 + 4x - 1{,}38 = 0 \quad | \quad \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$x^2 - 6x + 2{,}07 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 2{,}07} = 3 \pm 2{,}63$

$x_1 = 5{,}63$; $x_2 = 0{,}3675$

Wegen Aufgabenstellung „zur Düse hinbewegen" ist $x_2 = 0{,}3675$ die Lösung dieser Aufgabe.

Martin darf sich bis auf etwa 37 cm der Düse nähern, ohne nass zu werden.

Lösung A2

a) Berührpunkt mit der x-Achse ist doppelte Nullstelle: $N(-36|0)$, weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+36)^2$ | doppelte Nullstelle

$-4 = a \cdot (-5+36)^2$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$

$-4 = 961a$

$a = -\frac{4}{961}$

$f(x) = -\frac{4}{961} \cdot (x+36)^2$

b) Zwei Nullstellen $N_1(2|0)$; $N_2(-1|0)$ und weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+1)(x-2)$ | Nullstellenform

$-4 = a \cdot (-5+1)(-5-2)$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$

$-4 = 28a$

$a = -\frac{1}{7}$

$f(x) = -\frac{1}{7}(x+1)(x-2)$

c) Normalparabel mit doppelte Nullstelle bei $N(-2|0)$.

$f(x) = (x+2)^2$ | Nullstellenform Normalparabel

$f(x) = x^2 + 4x + 4$ | Hauptform

d) Symmetrie mit y-Achse durch Punkte $A(1|0{,}5)$ und $B(-2|-5{,}5)$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$

$0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(1|0{,}5)$

$-5{,}5 = 4a + c$ | Punktprobe mit $B(-2|-5{,}5)$

$-6 = -3a \;\Rightarrow\; a = 2$

$0{,}5 = 2 + c \;\Rightarrow\; c = -1{,}5$

$f(x) = 2x^2 - 1{,}5$

Lösung A3

a) Berührpunkt mit der x-Achse ist doppelte Nullstelle: $N(-3|0)$, weiterer Punkt $A(-5|-4)$.

$f(x) = a \cdot (x+3)^2$ | doppelte Nullstelle
$-4 = a \cdot (-5+3)^2$ | Punktprobe mit $A(-5|-4)$
$-4 = a$
$a = 1$
$f(x) = (x+3)^2) = x^2 + 6x + 9$

b) Zwei Nullstellen $N_1(-2|0)$; $N_2(1|0)$ und weiterer Punkt $A(-1|2)$.

$f(x) = a \cdot (x+2)(x-1)$ | Nullstellenform
$2 = a \cdot (-1+2)(-1-1)$ | Punktprobe mit $A(-1|2)$
$2 = -2a$
$a = -1$
$f(x) = -(x+2)(x-1)$

c) Normalparabel mit doppelte Nullstelle bei $N(2|0)$.

$f(x) = (x-2)^2$ | Nullstellenform Normalparabel
$f(x) = x^2 - 4x + 4$ | Hauptform

d) Symmetrie mit y-Achse durch Punkte $A(-1|-0{,}5)$ und $B(2|5{,}5)$.

$f(x) = a \cdot x^2 + c$
$-0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(1|0{,}5)$
$5{,}5 = 4a + c$ | Punktprobe mit $B(-2|-5{,}5)$
$6 = 3a \;\; => \;\; a = 2$
$-0{,}5 = 2 + c \;\; => \;\; c = -2{,}5$
$f(x) = 2x^2 - 2{,}5$

Lösung A4

Die Angabe $f(-2) = 3 = f(2)$ sagt aus, dass der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist. Dabei kann er sowohl nach oben als auch nach unten geöffnet sein.

Funktionsgleichung:
$f(x) = a \cdot x^2 + c$
$-0{,}5 = a + c$ | Punktprobe mit $A(2|3)$
$3 = 4a + c$
$c = 3 - 4a$
$f(x) = a \cdot x^2 + 3 - 4a$
$f(x) = a \cdot (x^2 - 4) + 3$

$f(x)$ als Normalparabel:
Bei der Normalparabel ist $|a| = 1$:
$f(x) = x^2 - 1$, alternativ $f(x) = -x^2 + 7$

Lösung A5

Gegeben ist der Scheitelpunkt $S(1|4)$ und als weiterer Punkt der Ursprung $O(0|0)$.

$f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 4$ | Scheitelform
$0 = a \cdot (0-1)^2 + 4$ | Punktprobe mit $O(0|0)$
$a = -4$
$f(x) = -4 \cdot (x-1)^2 + 4$
$f(x) = -4x^2 + 8x$ | Hauptform

Lösung A6

$f(x) = x^2 + bx + c$

Die Graphen der Parabeln sind Normalparabeln.

a) f hat eine Nullstelle in $x = 0$.
In diesem Falle ist $c = 0$ (y-Achsenabschnitt).

b) Die Nullstellen von f unterscheiden sich nur im Vorzeichen.
In diesem Falle ist der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse. Dadurch ist $b = 0$.

Lösung A7

Gegeben ist $f(x) = ax^2 + bx + c$ sowie die zwei Punkte $P(0|5)$ und $Q(1|2)$.

Beziehung zwischen a und b:

$5 = c$ | Punktprobe mit $P(0|5)$

$2 = a + b + 5$ | Punktprobe mit $Q(1|2)$

$a = -3 - b$

$a = -(b + 3)$

a und b, wenn $x = 3$ Nullstelle von f ist:

Zusatzpunkt $N(3|0)$

$0 = 9a + 3b + 5$ | Punktprobe mit $N(3|0)$

$9a = -3b - 5$

$a = -\left(\frac{1}{3}b + \frac{5}{9}\right)$

$-(b + 3) = -\left(\frac{1}{3}b + \frac{5}{9}\right)$ | Gleichsetzung der beiden a.

$b - \frac{1}{3}b = \frac{5}{9} - 3$

$\frac{2}{3}b = -\frac{22}{9}$

$b = -\frac{66}{18} = -\frac{11}{3}$

$a = -\left(-\frac{11}{3} + 3\right)$

$a = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + 5$

Lösung A8

a) Keine Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f_1(x) = x^2 + 1;\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

b) Zwei Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f_1(x) = x^2 - 1;\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

c) Mit Scheitel $S(-2|0)$:
$f_1(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4;\quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

Lösung A9

Lösungshilfe

Aus dem Text heraus müssen wir interpretieren, dass sich f und g schneiden, nämlich in $x_1 = -1$ und $x_2 = 0{,}5$. Da die Funktionsgleichung von g vollständig gegeben ist, können wir die zugehörigen y-Werte errechnen.
Damit haben wir zwei Punkte der Parabel. Durch Punktproben können wir dann a und b ermitteln.

f schneidet g in $P\big(-1\big|g(-1)\big)$ und $P\big(0{,}5\big|g(0{,}5)\big)$.
$g(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \;\; => \;\; P(-1|-3)$
$g(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 - 1 = 0 \;\; => \;\; Q(0{,}5|0)$

(1)	$a - b + 3 = -3$	|	Punktprobe mit $P(-1\|-3)$
(2)	$0{,}25a + 0{,}5b + 3 = 0$	|	Punktprobe mit $Q(0{,}5\|0)$
(1)	$a - b + 3 = -3$		
(2)	$0{,}25a + 0{,}5b + 3 = 0$	|	$\cdot 2$
(1)	$a - b + 3 = -3$		
(2)	$\underline{0{,}5a + b + 6 = 0}$	|	$\cdot 2$
(1)+(2)	$1{,}5a + 9 = -3$	|	-9
	$1{,}5a = -12$	|	$:1{,}5$
	$a = -8$		
$a \to (1)$	$-8 - b + 3 = -3$		
	$b = 2$		

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -8x^2 + 2x + 3$.

Lösung A10

Gegeben sind die beiden Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 5$. Der Streckungsfaktor in y-Richtung ist nicht bekannt. Wir stellen die Nullstellenform auf:
$f(x) = a \cdot (x - 5)(x + 5)$
Es sollen zwei Lösungen angegeben werden, so z.B.
$f_1(x) = x^2 - 25$ und $f_2(x) = -x^2 + 25$

Lösung A11

Quadratische Funktionsgleichung durch drei Punkte.
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Lineares Gleichungssystem:

(1)	$4a - 2b + c = 1$	|	Punktprobe mit $P(-2\|1)$
(2)	$16a - 4b + c = 4$	|	Punktprobe mit $Q(-4\|4)$
(3)	$36a + 6b + c = 9$	|	Punktprobe mit $R(6\|9)$

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems führt zu
$a = \frac{1}{2}; \;\; b = -1; \;\; c = -1$
Die Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Input interpretation:

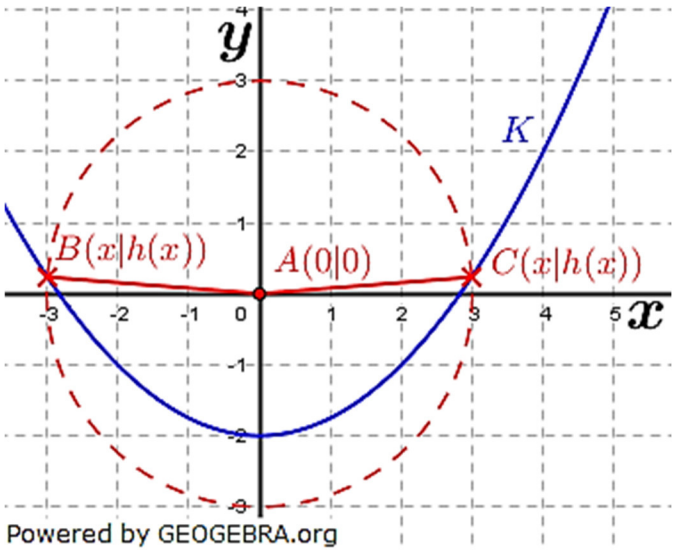
solve $\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ 16a - 4b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 9 \end{cases}$ for a, b, c

Result:

$a = \frac{1}{4}$ and $b = 0$ and $c = 0$

Lösung A12

Die Graphik verdeutlicht die Situation. Es gibt zwei Punkte B und C auf K die vom Ursprung A des Koordinatensystems den Abstand 3 haben.



Abstände zwischen zwei Punkten berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - 0)^2 + (y_B - 0)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + h(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2}$

Der Abstand soll 3 sein:

$\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2} = 3 \qquad | \quad \uparrow^2$

$\frac{5}{4}x^2 - 2 = 9$

$5x^2 = 44$

$x^2 = \frac{44}{5}$

$x_{1,2} = \pm 2{,}9665$

$h(2{,}9665) = \frac{1}{4} \cdot 2{,}9665^2 - 2 = \frac{1}{5}$

$h(-2{,}9665) = \frac{1}{4} \cdot (-2{,}9665)^2 - 2 = \frac{1}{5}$

Die beiden Punkte $B(-2{,}97|0{,}2)$ und $C(-2{,}97|0{,}2)$ auf h haben vom Ursprung den Abstand 3.

Zusammenhang zwischen K und dem Graph von f aus Aufgabe 11:
K ist gegenüber dem Graphen von f aus Aufgaben 11 um 2 Einheiten nach unten verschoben.

Lösung A13

Lösungshilfe

Zunächst müssen wir über die beiden gegebenen Punkte T_1 und T_2 die Funktionsgleichung der Geraden aufstellen.
Wir bestimmen dann die Schnittpunkte dieser Geraden mit der quadratischen Funktion f aus Aufgabe 12. Über die entstehenden Schnittpunkte können wir dann entscheiden, in welchen Intervallen g oberhalb bzw. unterhalb von K verläuft.

Gerade durch T_1 und T_2:

$g(x) = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-(-1{,}75)}{-4-(-1)} = \frac{-2{,}25}{-3} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \cdot (-4) + c = -4 \qquad |$ Punktprobe mit $T_2(-4|-4)$

$c = -1$

$g(x) = \frac{3}{4}x - 1$

$g \cap \frac{1}{4}x^2 - 2$

$\frac{1}{4}x^2 - 2 = \frac{3}{4}x - 1$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 = 0 \qquad | \quad \cdot 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 4$

g schneidet K in den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

Da f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, verläuft K im Intervall $I =]-1; 4[$ unterhalb von g.

Lösung A14

Lösungshilfe

Aus der gegebenen Graphik heraus müssen wir die Funktionsgleichungen für K_f und K_g bestimmen. Durch Gleichsetzung der beiden Funktionsgleichungen können wir die Schnittpunkte von f und g bestimmen.

Funktionsgleichung für K_g:

Die Gerade verläuft durch die Punkte $P(1|-1)$ und $Q(3|5)$ (abgelesen).

$g(x) = mx + c$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$3 \cdot 1 + c = -1 \qquad |$ Punktprobe mit $P(1|-1)$

$c = -4$

$g(x) = 3x - 4$

Funktionsgleichung für K_f:

Die Parabel hat ihren Scheitel in $P(1|-1)$ und verläuft durch $R(3|1)$ (abgelesen).

$g(x) = a(x-1)^2 - 1 \qquad |$ Scheitelform

$a(3-1)^2 - 1 = 1 \qquad |$ Punktprobe mit $R(3|1)$

$4a = 2 \;\; => \;\; a = \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$

$g \cap f$

$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 3x - 4 \qquad | \quad -3x + 4$

$\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} = 0 \qquad | \quad \cdot 2$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm 3$

$x_1 = 7; \;\; x_2 = 1$

$g(1) = 3 \cdot 1 - 4 = -1$

$g(7) = 3 \cdot 7 - 4 = 17$

Die beiden Schnittpunkte von K_g und K_f haben die Koordinaten $S_1(1|-1)$ und $S_2(7|17)$.