Lösung A1

Lösungshilfe

Stelle über die Tabelle fest, an welcher Stelle sich die Symmetrieachse befindet.

a) Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist der y-Wert.
K_f: Nullstellen bei $-3 < x < -2$ und bei $1 < x < 2$.
K_g: Nullstellen $N_1(-2|0)$; $N_2(1|0)$

b) Scheitelpunkte:
K_f: $S(-0{,}5|f(-0{,}5)$ nach unten geöffnet.
K_g: $S(-0{,}5|g(-0{,}5))$ nach oben geöffnet.

c) Zusammenhang:
Beide Graphen haben die Form einer Normalparabel. Die Symmetrieachse, auf der der Scheitel liegt, hat die Gleichung $x = -0{,}5$.

d) Funktionsgleichungen:
K_f: Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch drei Punkte:

(I)	$9a - 3b + c = -3{,}5$	|	Punktprobe mit $P(-3|-3{,}5)$
(II)	$a + b + c = 0{,}5$	|	Punktprobe mit $P(1|0{,}5)$
(III)	$c = 2{,}5$	|	Punktprobe mit $R(0|2{,}5)$
(I)	$9a - 3b + 2{,}5 = -3{,}5$		
(II)	$a + b + 2{,}5 = 0{,}5$	|	$\cdot 3$
(I)	$9a - 3b + 2{,}5 = -3{,}5$		
(II)	$\underline{3a + 3b + 7{,}5 = 1{,}5}$		
(I)+(II)	$12a + 10 = -2$		
	$12a = -12 \;\; => \;\; a = -1$		
$a \to (II)$	$-1 + b = -2$		
	$b = -1$		

$f(x) = -x^2 - x + 2{,}5$

K_g: Parabelgleichung $g(x) = (x + x_1)(x - x_2)$ mit zwei Nullstellen:
$g(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

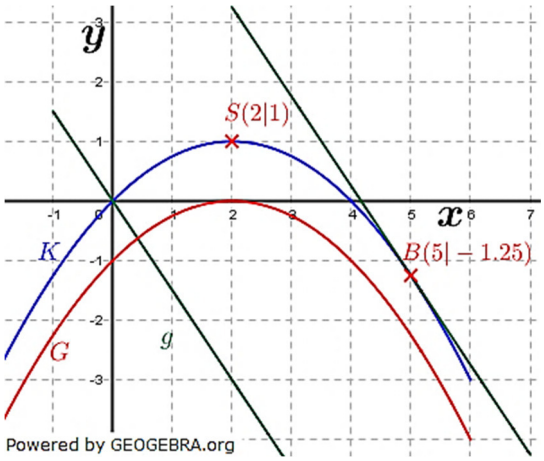
Lösung A2

$f(x) = -0{,}25x^2 + x$

a) Scheitelpunkt bestimmen:

$f(x) = -0{,}25x^2 + x$	|	$: -0{,}25$
$-4 \cdot f(x) = x^2 - 4x$	|	Scheitelform bilden
$-4 \cdot f(x) = (x - 2)^2 - 4$	|	$: -4$

$f(x) = -0{,}25(x - 2)^2 + 1$
$S(2|1)$



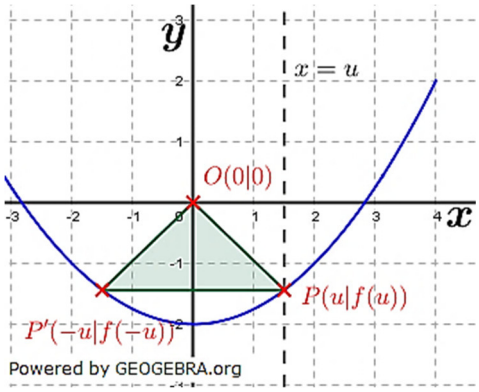
b) Geradengleichung (Ursprungsgerade) aufstellen:
$g(x) = mx$
$m = \frac{3-0}{-2-0} = -\frac{3}{2} \;\; => \;\; g(x) = -\frac{3}{2}x$
$f(x) \cap g(x)$
$-0{,}25x^2 + x = -\frac{3}{2}x$
$x(-0{,}25x + 2{,}5) = 0$
$x_1 = 0; \;\; x_2 = 10$
$g(0) = 0; \;\; g(10) = -15$
$S_1(0|0); \;\; S_2 = (10|-15)$

c) Tangente parallel zu $y = -1{,}5x + 18$ hat die Funktionsgleichung
$t(x) = -1{,}5x + c$
$f(x) \cap t(x)$
$-0{,}25x^2 + x = -1{,}5x + c$
$-0{,}25x^2 + 2{,}5x - c = 0 \quad | \quad \cdot -4$
$x^2 - 10x + 4c = 0$
$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 4c} \quad | \quad p/q$-Formel
Tangente heißt berühren. Damit doppelte Nullstelle bei Schnittpunkten.
$\sqrt{25 - 4c} = 0$
$25 - 4c = 0 \;\; => \;\; c = 6{,}25$
Die Gerade mit der Gleichung $t(x) = -1{,}5x + 6{,}25$ ist Tangente an f.
Berührpunkt bei $x_1 = 5$:
$t(5) = -1{,}5 \cdot 5 + 6{,}25 = -1{,}25$
Der Berührpunkt ist $B(5|-1{,}25)$

d) Verschiebung von K nach G, so dass G die x-Achse berührt:
K hat den Scheitel in $S(2|1)$ (siehe Aufgabenteil a)). Im Berührpunkt mit der x-Achse ist $y = 0$. Der Scheitel von G muss also bei $S_G(x_0|0)$ liegen. Dies erreichen wir, indem wir K um eine Einheit nach unten schieben.
Die Funktionsgleichung von G lautet dann:
$g(x) = -0{,}25x^2 + x - 1$

Lösung A3

Nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation.



Flächeninhalt Dreieck: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} g \cdot h_g$
$g = 2u; \;\; h_g = f(u))$
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot f(u)$
$A_{Dreieck}(u) = u \cdot \left(\frac{1}{4}u^2 + 2\right) = \frac{1}{4}u^3 + 2u$
$A_{Dreieck}(u) = 2$
$\frac{1}{4}u^3 + 2u = 2$
$u^3 + 8u = 8$
$u^3 + 8u - 8 = 0$
$u_1 = 0{,}91$
Für $u \approx 0{,}9$ beträgt der Inhalt des Dreiecks $P'PO$ $2\,FE$.

Lösung A4

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitelpunkt und die Öffnungsrichtung der Parabeln. Beachte für Aufgabenteil b), dass für Verschiebung in y-Richtung c zu verändern ist.

a)
$f(x) = -x^2 - 3x$
$-f(x) = x^2 + 3x$
$-f(x) = (x + 1{,}5)^2 - 2{,}25$
$f(x) = -(x + 1{,}5)^2 + 2{,}25$
$S_f(-1{,}5|2{,}25)$
Normalparabel,
Nach unten geöffnet.

$g(x) = \frac{1}{2}x(x + 3) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$
$2g(x) = x^2 + 3x$
$2g(x) = (x + 1{,}5)^2 - 2{,}25$
$g(x) = 0{,}5 \cdot (x + 1{,}5)^2 - 1{,}125$
$S_g(-1{,}5|-1{,}125)$
Gestauchte Parabel
Nach oben geöffnet.

b) $g^*(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + c$

$f(x) \cap g^*(x)$

$-x^2 - 3x = 0{,}5x^2 + \frac{3}{2}x + c$

$\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + c = 0 \quad | \quad \cdot\frac{2}{3}$

$x^2 + 3x + \frac{2}{3}c = 0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2}{3}c} \quad | \quad p/q$-Formel

Berühren heißt doppelte Nullstelle bei Schnittpunkten.

$\sqrt{2{,}25 - \frac{2}{3}c} = 0$

$\frac{9}{4} - \frac{2}{3}c = 0 \;\; => \;\; c = \frac{27}{8}$

Der Graph von g^* mit $g^*(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{27}{8}$ berührt das Schaubild K von f.

Berührpunkt bei $x_0 = -\frac{3}{2}$:

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$

Der Berührpunkt ist $B\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{9}{4}\right)$

Lösung A5

Das Schaubild von f entsteht aus dem Schaubild von g durch…

a) …Verschiebung um zwei Einheiten nach links.

b) …Spiegelung an der y-Achse.

c) …Streckung in y-Richtung mit $k = 0{,}5$ und anschließender Verschiebung um eine Stelle nach oben.

Lösung A6

Lösungshilfe

Bestimme zunächst den Scheitelpunkt der Parabel K und stelle die Funktionsgleichung der Geraden H durch den Scheitelpunkt mit der Steigung $m = -2$ auf.
Bestimme nun die Nullstellen für f, g und h sowie die Intervalle, in denen die Funktionswerte von f, g und h größer als 3 sind.
Bestimme abschließend die Schnittpunkte von $f \cap g$, $f \cap h$ und $g \cap h$ und prüfe, ob es einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt.

Scheitelpunkt von K:

$f(x) = x^2 - 2 \quad |$ in x-Richtung unverschobene Parabel

$S_K(0|-2)$

Funktionsgleichung für H:

$h(x) = m \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad |$ Punkt-Steigungsform

$h(x) = -2 \cdot (x - 0) - 2 \quad |$ Scheitel S_K einsetzen

$h(x) = -2x - 2$

Nullstellen (Funktionswert $y = 0$):

von K:	von H:
$x^2 - 2 = 0$	$-2x - 2 = 0$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$	$x_0 = -1$
$N_1 = (\sqrt{2}\|0)$; $N_2(-\sqrt{2}\|0)$	$N_H = (-1\|0)$

von G:
$\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x_0 = 0$
$N_G = (0|0)$

Funktionswerte > 3

von K:
$x^2 - 2 > 3$
$x_1 > \sqrt{5};\quad x_2 < -\sqrt{5}$
$f(x) > 3$ für $x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$

von H:
$-2x - 2 > 3$
$-2x > 5$
$x < 2{,}5$
$h(x) > 3$ für $x < 2{,}5$

von G:
$\frac{1}{2}x^2 > 3$
$x_1 > \sqrt{6};\quad x_2 < -\sqrt{6}$
$g(x) > 3$ für $x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6}$

Gemeinsame Schnittpunkte:

$f \cap g$:
$x^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2$
$\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$
$x^2 = 4$
$x_{1,2} = \pm 2$

$f \cap h$:
$x^2 - 2 = -2x - 2$
$x^2 + 2x = 0$
$x(x+2) = 0$
$x_1 = 0;\quad x_2 = -2$

$g \cap h$:
$\frac{1}{2}x^2 = -2x - 2$
$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4}$
$x_1 = -2$

f, g und h schneiden sich bei $x_0 = -2$ im Punkt $S(-2|2)$.

Lösung A7

Lösungshilfe

Bestimme zunächst die Funktionsgleichungen der beiden Graphen in der Grafik. Bestimme dann die Koordinaten der Punkte B und D auf der Parabel, sowie die der Punkte P und Q als Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade.
Abstände zwischen zwei Punkte errechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

Funktionsgleichung der Parabel (Normalparabel mit Scheitel $S(2|1)$):
$p(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$
Funktionsgleichung der Geraden (Ursprungsgerade mit Steigung $m = \frac{2}{3}$):
$g(x) = \frac{2}{3}x$

Bestimmung von Koordinaten:

Punkt $B\left(0{,}5\middle|p(0{,}5)\right)$:

$B(0{,}5|3{,}25)$

Punkt $P;Q$:

$p(x) \cap g(x)$

$x^2 - 4x + 5 = \frac{2}{3}x$

$x^2 - \frac{14}{3}x + 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} - \frac{45}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{2}{3}$

$x_P = 3; \quad x_Q = \frac{5}{3}$

$P(3|2); \quad Q = \left(\frac{5}{3}\middle|\frac{10}{9}\right)$

Punkt $D(x_D|4{,}5)$:

$x^2 - 4x + 0{,}5 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 0{,}5} = 2 \pm 1{,}871$

$x_D = 3{,}87$

$D(3{,}87|4{,}5)$

Abstände:

$\overline{AB} = y_A - y_B = 5 - 3{,}25 = 1{,}75\ LE$

$\overline{CD} = x_D - x_C = 3{,}87 - 2 = 1{,}87\ LE$

$\overline{PQ} = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2} \approx 1{,}6\ LE$

Lösung A8

K_2 entspricht dem Schaubild der Beschreibung, der Scheitel liegt in $S(2|2)$, somit ist $x = 2$ die Symmetrieachse.

Lösung A9

$K_1 \rightarrow f_1(x)$, da Schnittpunkt $S_y(0|1)$ und $P(2|3) \in K_1$.

$K_2 \rightarrow f_5(x)$, da nach unten geöffnete Parabel und Nullstellen $N_1(2|0)$ und $N_2(3|0)$.

$K_3 \rightarrow f_4(x)$, da nach oben geöffnete, gestauchte Parabel mit Scheitel $S(2|-2)$.

$K_4 \rightarrow f_8(x)$, da lineare Funktion mit y-Achsenabschnitt $S_y(0|-2)$.