Aufgabe A1

Eine quadratische Funktion f hat ihren Scheitel in $S(0|6)$ und schneidet die x-Achse im Punkt $P(2\sqrt{3}|0)$.
Bestimme die Funktionsgleichung und zeichne den Graphen.

Aufgabe A2

Gegeben sind die Funktionsgleichungen folgender Parabeln:

1. Bestimme die Scheitelform und den Scheitelpunkt.
2. Berechne die Achsenschnittpunkte.
3. Beschreibe schrittweise, wie f aus der Normalparabel entsteht und wie sie geöffnet ist.
4. Zeichne den Graphen von f in ein geeignetes Koordinatensystem.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ b) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $f(x) = -x^2 + 8x - 9$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

a) Berechne den Scheitelpunkt mithilfe der Scheitelform.
b) Berechne die Achsenschnittpunkte.
c) Die Parabel soll so verschoben werden, dass der Punkt der Parabel, der auf der y-Achse liegt durch den Punkt $P(-3|-1)$ verläuft. Wie lautet die Funktionsgleichung $p(x)$ der verschobenen Parabel?
d) Wo schneiden sich beide Parabeln?
e) Zeichne beide Parabeln in ein geeignetes Koordinatensystem.

Aufgabe A4

Der Kraftstoffverbrauch eines PKW hängt bekanntlich von der Geschwindigkeit ab. Durch Messungen wurde der funktionale Zusammenhang ermittelt.
Es gilt: $K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55$ für $v > 40$. Dabei bedeutet $K(v)$ der Kraftstoffverbrauch in Liter/$100\,km$ und v die Geschwindigkeit in km/h.

a) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 7 Liter auf $100\,km$?
b) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten?

Aufgabe A5

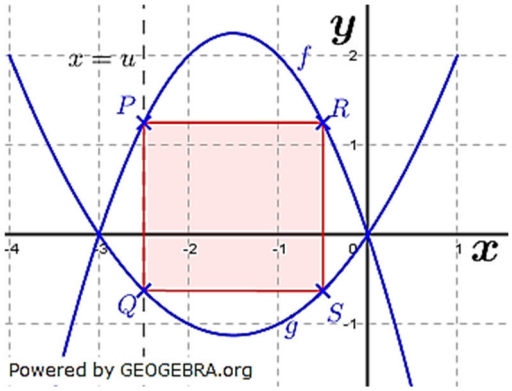
Bestimme die Scheitelform der Parabeln und zeichne sie.

a) Die Normalparabel wird um 3 gestreckt, um 4 nach rechts und um $1{,}5$ nach unten verschoben. Die Parabel ist nach oben geöffnet.
b) Die Normalparabel wird um $\frac{1}{2}$ gestaucht, um $\frac{5}{4}$ nach links und um 1 nach unten verschoben. Die Parabel ist nach oben geöffnet.
c) Die Normalparabel wird um $1{,}75$ gestreckt, um 2 nach links und um $5{,}25$ nach oben verschoben. Die Parabel ist nach unten geöffnet.

Aufgabe A6

Gegeben sind die quadratischen Funktionen f mit $f(x) = -x^2 - 3x; x \in \mathbb{R}$ und g mit $g(x) = 0{,}5x(x+3);\ \ x \in \mathbb{R}$.

a) Abgebildet sind die Graphen von f und g. Begründe ohne Rechnung, warum sich f und g auf der x-Achse schneiden.
$S(-1{,}5|2{,}25)$ ist der Scheitel von f.
Gib den Scheitel von g an.



b) Die Gerade $x = u$ schneidet den Graphen von f im Punkt P und den Graphen von g im Punkt Q. Gib die Koordinaten von P und Q an.

c) Für $u \in]-3; 0[$ ist die Strecke $\overline{PQ}$ eine Seite eines Rechtecks, das den beiden Parabeln einbeschrieben ist. Bestimme den Inhalt des Rechtecks für $u = -1$ und den Umfang U in Abhängigkeit von u.

d) Verschiebe die Parabel g in y-Richtung so, dass die verschobene Parabel den Graphen von f berührt. Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes B.

e) Bestimme a so, dass $f(a) - f(a+1) = 4$ ist.

Aufgabe A7

Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = x - 1{,}5$ mit der Parabel $f(x) = x^2 - 4x + 2{,}5$ rechnerisch.
Kontrolliere dein Ergebnis graphisch.

Aufgabe A8

Gib jeweils die Gleichung einer Parabel an, die mit der Parabel $f(x) = x^2 + 2x$ keinen, einen bzw. zwei verschiedene Schnittpunkte hat.

Aufgabe A9

Wodurch unterscheiden sich die Parabeln $f(x) = 3x^2 - 18x + 27$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$?

Aufgabe A10

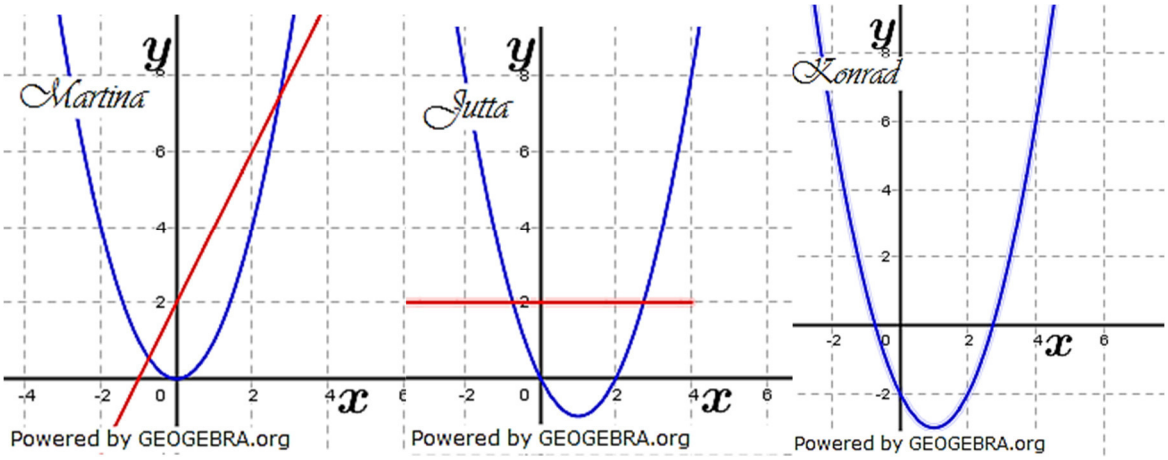
Bei welcher der Folgenden Funktionen handelt es sich um quadratische Funktionen?

a) $f(x) = x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = 2x^2 + 4 + x^3$

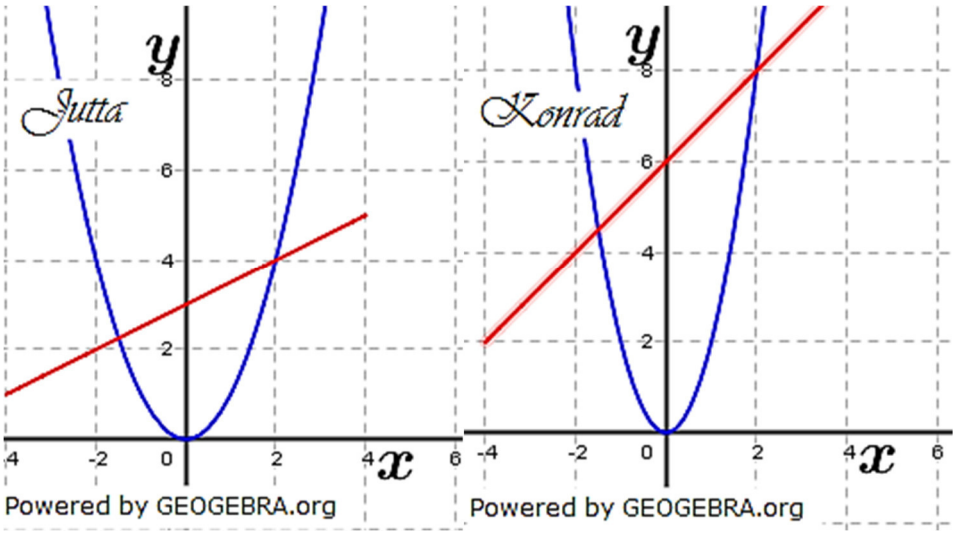
d) $f(x) = -4x^2 + 5x + 9$ e) $f(x) = \sqrt{5}x^2$ f) $f(x) = x^2$

Aufgabe A11

Martina, Jutta und Konrad sollten als Hausaufgabe die Gleichung $x^2 - 2x - 2 = 0$ graphisch lösen. Sie sind dabei unterschiedlich vorgegangen, aber alle auf die gleichen Näherungslösungen $x_1 \approx -0{,}7$ und $x_2 \approx 2{,}7$ gekommen.



a) Überprüfe die Näherungslösungen rechnerisch.
b) Erläutere die Vorgehensweisen von Martina, Jutta und Konrad.
c) Ermittle mit jedem Verfahren die Lösungen der Gleichung $x^2 + 3x + 2 = 0$.
d) Jutta und Konrad sind von Martinas Methode begeistert und versuchen, damit die Gleichung $2x^2 - x - 6 = 0$ zu lösen. Sie gehen dabei aber unterschiedlich vor (siehe nachstehende Abbildungen). Welche Ergebnisse erhalten sie? Überprüfe rechnerisch. Wer von beiden ist deiner Meinung nach geschickter vorgegangen? Begründe.



Lösung A1

$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s; \quad S(0|6); \quad P(2\sqrt{3}|0).$

$f(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 6 = ax^2 + 6$

$0 = a \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6$ | Punktprobe mit $P(2\sqrt{3}|0)$

$-6 = a \cdot 12$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

Lösung A2

1. Scheitelform und Scheitelpunkt:

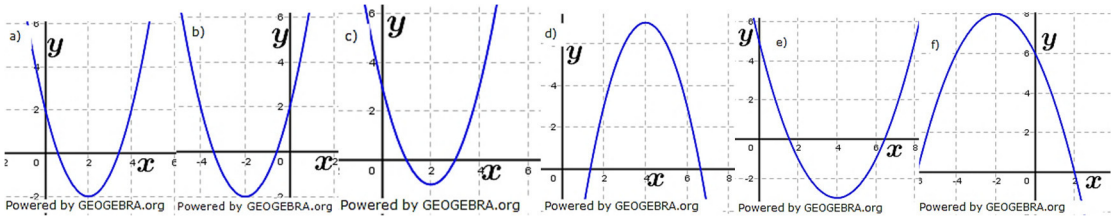
a) $f(x) = (x-2)^2 - 2$ $S(2\|-2)$	b) $f(x) = (x+2)^2 - 2$ $S(-2\|-2)$	c) $f(x) = (x-2)^2 - 1$ $S(2\|-1)$
d) $f(x) = -(x-4)^2 + 7$ $S(4\|7)$	e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$ $S\left(2\middle\|\frac{1}{2}\right)$	f) $f(x) = -(x+1)^2 + \frac{7}{2}$ $S\left(-1\middle\|\frac{7}{2}\right)$

2. Berechne die Achsenschnittpunkte.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ $N_1(2+\sqrt{2}\|0); N_2(2-\sqrt{2}\|0);$ $S_y(0\|2)$	b) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ $N_1(-2+\sqrt{2}\|0);$ $N_2(-2-\sqrt{2}\|0);$ $S_y(0\|2)$	c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $N_1(3\|0); N_2(1\|0);$ $S_y(0\|3)$
d) $f(x) = -x^2 + 8x - 9$ $N_1(4+\sqrt{7}\|0); N_2(4-\sqrt{7}\|0);$ $S_y(0\|-9)$	e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ $N_1(4+\sqrt{6}\|0); N_2(4-\sqrt{6}\|0);$ $S_y(0\|5)$	f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ $N_1(2\|0); N_2(-6\|0);$ $S_y(0\|6)$

3. Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild der Normalparabel hervor durch:
   a) Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach unten.
   b) Verschiebung um zwei Einheiten nach links und um zwei Einheiten nach unten.
   c) Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um eine Einheiten nach unten.
   d) Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um vier Einheiten nach rechts und um sieben Einheiten nach oben.
   e) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$,Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um eine halbe Einheit nach oben.
   f) Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$, Verschiebung um eine Einheit nach links und um $\frac{7}{2}$ Einheiten nach oben.

4. Graphen aller f:



Lösung A3

a) Scheitelform

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \quad | \quad \cdot(-2)$

$-2f(x) = x^2 - 4x - 2$

$-2f(x) = (x-2)^2 - 4 - 2 \quad |$ quadratische Ergänzung

$-2f(x) = (x-2)^2 - 6 \quad | \quad :(-2)$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

$S(2|3)$

b) Achsenschnittpunkte:

$f(0) = 1; \quad S_y(0|1)$

Nullstellen:

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = 0 \quad | \quad \cdot(-2)$

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+2} = 2 \pm \sqrt{6}$

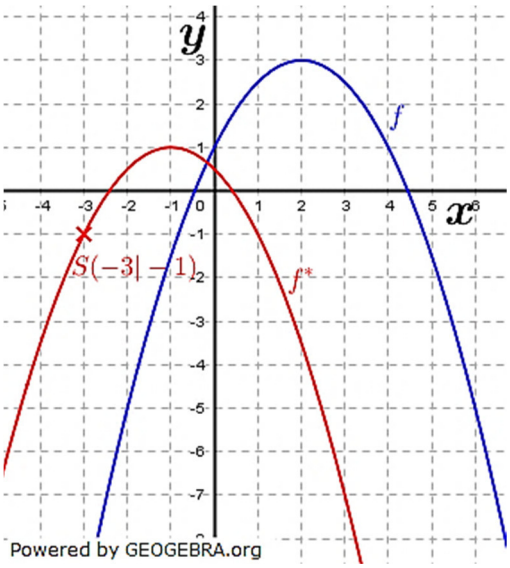
$N_1(2+\sqrt{6}|0); \quad N_2(2-\sqrt{6}|0)$

c) Punkt auf y-Achse ist $S_y(0|1)$. Dieser Punkt soll nun $P(-3|-1)$ sein.
Die Parabel muss um drei Stellen nach links und um zwei Stellen nach unten verschoben werden.

$f^*(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2(x+3) + 1 - 2$

$f^*(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) + 2x + 6 - 1$

$f^*(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5$



d) Schnittpunkt der beiden Parabeln:

$f(x) \cap f^*(x)$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5$

$3x = -0{,}5$

$x = -\frac{1}{6}$

$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{6}\right) + 1$

$= -\frac{1}{72} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{47}{72}$

$S\left(-\frac{1}{6}\middle|\frac{47}{72}\right)$

e) siehe Grafik rechts.

Lösung A4

a) Geschwindigkeit für $7\ ltr$ Benzinverbrauch auf $100\ km$.

$K(v) = 7$

$0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 = 7 \quad | \quad -7$

$0{,}002v^2 - 0{,}18v + 1{,}55 = 0 \quad | \quad :0{,}002$

$v^2 - 90v + 775 = 0$

$v_{1,2} = 45 \pm \sqrt{1625 - 775} \quad | \quad p/q$-Formel

$= 45 \pm \sqrt{850}$

$v_1 = 74{,}155; \quad v_2 = 15{,}85$

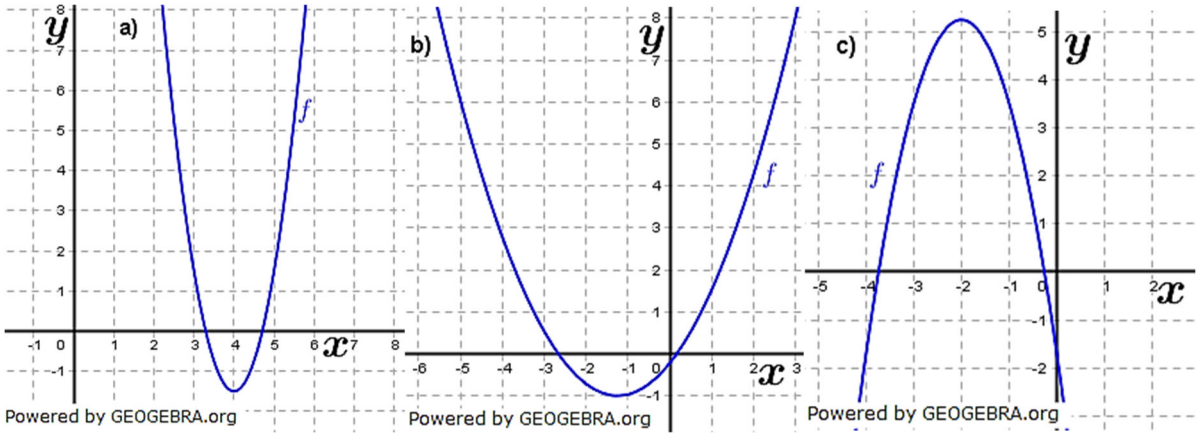
Wegen Aufgabenstellung $v > 40$ ist $v_1 = 74{,}155$ die gesuchte Lösung.

Bei etwa $74\ km/h$ benötigt das Fahrzeug $7\ ltr/100\ km$.

b) Geschwindigkeit des geringsten Verbrauchs:
$K(v)$ ist eine Parabel, die Geschwindigkeit des geringsten Verbrauchs liegt im Scheitel dieser Parabel.
Scheitelpunktgleichung $K(v)$:
$K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 \quad | \quad \cdot 500$
$500K(v) = v^2 - 90v + 4275$
$500K(v) = (v-45)^2 - 2025 + 4275$
$500K(v) = (v-45)^2 + 2250 \quad | \quad :500$
$K(v) = 0{,}002(v-45)^2 + 4{,}5$
Der geringste Verbrauch ist bei $45\ km/h$ *mit etwa* $4{,}5\ ltr\ /\ 100\ km$.

Lösung A5

a) $f(x) = 3(x-4)^2 - 1{,}5$
b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 1$
c) $f(x) = -1{,}75(x+2)^2 + 5{,}25$



Lösung A6

a) $g(x)$ ist in Nullstellenform gegeben, $f(x)$ umgestellt ergibt $f(x) = -x(x+3)$, ebenfalls eine Nullstellenform.
Aus den Nullstellenformen lesen wir ab, dass sowohl f als auch g die x-Achse in $N_1(-3|0)$ und $N_2(0|0)$ schneiden.
Scheitelpunkt von g:
Wegen der identischen Nullstellen liegt der Scheitel von g ebenfalls bei $x_0 = -1{,}5$.
$g(-1{,}5) = 0{,}5 \cdot (-1{,}5)(-1{,}5+3) = -1{,}125$
$S_g(-1{,}5|-1{,}125)$

b) Koordinaten von P und Q:
P liegt auf f mit $P(u|f(u))$
Q liegt auf g mit $Q(u|g(u))$
$P(u|-u^2-3u)$; $Q(u|0{,}5u(u+3))$

c) Koordinaten von R und S:
Wegen der Symmetrieachse bei $x_0 = -1{,}5$ liegen die x-Werte von R und S bei $x_R = x_S = |-1{,}5+u|$, somit
$R(-1{,}5+(-1{,}5-u)|-u^2-3u)$; $S(-1{,}5+(-1{,}5-u)|0{,}5u(u+3))$

Fläche eines Rechtecks: $A_{Rechteck} = a \cdot b$
Wir bestimmen die Koordinaten der Punkt P, Q, R und S für $u = -1$:
$P(-1|2)$; $Q(-1|-1)$
$R(-2|-(-2)^2 - 3 \cdot (-2))$; $S(-2|0{,}5 \cdot (-2)(-2+3))$
$R(-2|2)$; $S(-2|-1)$
Aus $A_{Rechteck} = a \cdot b$ ergibt sich $a = x_P - x_R = -1 - (-2) = 1$ und
$b = y_P - y_Q = 2 - (-1) = 3$
$A_{Rechteck} = 1 \cdot 3 = 3$
Das Rechteck $PQRS$ hat für $u = -1$ einen Flächeninhalt von $3\,FE$.

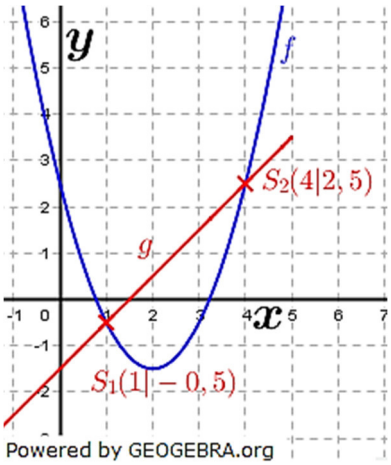
Für den Umfang des Rechtecks gilt allgemein:
$a = |x_P - x_R| = |u - (-3 - u)| = |3 + 2u|$
$b = |y_P - y_Q| = |-u^2 - 3u - (0{,}5u(u+3)| = |-1{,}5u^2 - 4{,}5u|$
$U(u) = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (|3 + 2u| - 1{,}5u^2 - 4{,}5u)$

d) Verschieben von g in y-Richtung, sodass g die Parabel f berührt:
Symmetrieachse von f und g sind identisch. Somit muss g soweit verschoben werden, dass der Scheitel von g mit dem Scheitel von f zusammenfällt.
$S_f(-1{,}5|2{,}25)$ | gegeben
$S_g(-1{,}5|-1{,}225)$ | errechnet Teilaufgabe a)
Verschiebung von g um $y_{S_f} - y_{S_g}$ Einheiten nach oben.
$y_{S_f} - y_{S_g} = 2{,}25 + 1{,}225 = 3{,}475$
$g^*(x) = g(x) + 3{,}475 = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + 3{,}475$
$B(-1{,}5|2{,}5)$
Der Berührpunkt ist zugleich Scheitelpunkt von f.

e) $f(a) - f(a+1) = 4$
$-a^2 - 3a - \left(-(a+1)^2 - 3(a+1)\right) = 4$
$-a^2 - 3a + a^2 + 2a + 1 + 3a + 3 = 4$
$2a + 4 = 4$
$a = 0$
Für $a = 0$ ist $f(a) - f(a+1) = 4$

Lösung A7

$g(x) = x - 1{,}5$; $f(x) = x^2 - 4x + 2{,}5$
$g(x) \cap f(x)$:
$x^2 - 4x + 2{,}5 = x - 1{,}5$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$
$x_1 = 4$; $x_2 = 1$
$g(1) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5$
$g(4) = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$
$S_1(1|-0{,}5$; $S_2(4|2{,}5)$



Lösung A8

$f(x) = x^2 + 2x$
Normalparabel, nach oben geöffnet, Symmetrieachse $x = -1$.
Kein Schnittpunkt mit f:
$p(x) = -x^2 - 2$
Ein Schnittpunkt mit f:
$p(x) = x^2 + 4x$
Zwei Schnittpunkte mit f:
$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

Lösung A9

$f(x) = 9 \cdot g(x)$
f ist gegenüber g mit dem Faktor $k = 9$ in y-Richtung gestreckt.

Lösung A10

a)	$f(x) = x + 1$ Nicht quadratisch	b)	$f(x) = \frac{1}{x^2}$ Nicht quadratisch	c)	$f(x) = 2x^2 + 4 + x^3$ Nicht quadratisch
d)	$f(x) = -4x^2 + 5x + 9$ Quadratisch	e)	$f(x) = \sqrt{5}x^2$ Quadratisch	f)	$f(x) = x^2$ Quadratisch

Lösung A11

a) $x^2 - 2x - 2 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2}$ | p/q-Formel
$x_1 \approx 2{,}73;\quad x_2 = -0{,}73$

b) Martina:
Bestimmt die Lösungen über die Schnittstellen der Normalparabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = 2x + 2$.
Jutta:
Bestimmt die Lösungen über die Schnittstellen der Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2x$ und der Geraden $y = 2$.
Konrad:
Bestimmt die Lösungen über die Nullstellen der Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$
Verfahren Martina:
$f(x) = x^2;\quad g(x) = -3x - 2$
$f(x) \cap g(x)$
Verfahren Jutta:
$f(x) = x^2 + 3x;\quad g(x) = -2$
$f(x) \cap g(x)$
Verfahren Konrad:
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2}$ | p/q-Formel
$x_1 = -1;\quad x_2 = -2$
Alle Verfahren führen zum selben Ergebnis.

d) $2x^2 - x - 6 = 0 \quad | \quad :2$

$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{48}{16}} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2}$

Jutta ist geschickter vorgegangen, da sie die Gleichung $2x^2 - x - 6 = 0$ zunächst durch 2 geteilt hat und dann die Schnittstellen zwischen der Normalparabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ ermittelt hat.