Lösung A1

$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s; \quad S(0|6); \quad P(2\sqrt{3}|0).$

$f(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 6 = ax^2 + 6$

$0 = a \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6$ | Punktprobe mit $P(2\sqrt{3}|0)$

$-6 = a \cdot 12$

$a = -\frac{1}{2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

Lösung A2

1. Scheitelform und Scheitelpunkt:

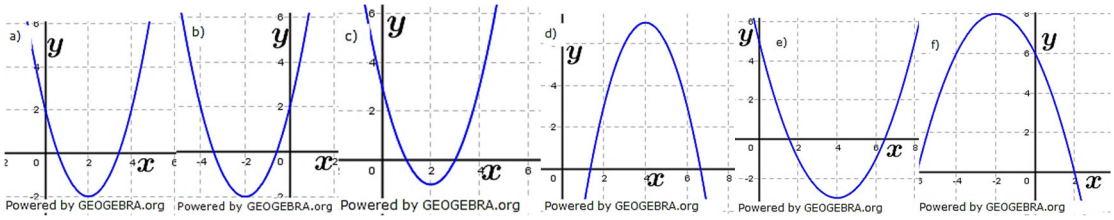
a) $f(x) = (x-2)^2 - 2$ $S(2\|-2)$	b) $f(x) = (x+2)^2 - 2$ $S(-2\|-2)$	c) $f(x) = (x-2)^2 - 1$ $S(2\|-1)$
d) $f(x) = -(x-4)^2 + 7$ $S(4\|7)$	e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$ $S\left(2\middle\|\frac{1}{2}\right)$	f) $f(x) = -(x+1)^2 + \frac{7}{2}$ $S\left(-1\middle\|\frac{7}{2}\right)$

2. Berechne die Achsenschnittpunkte.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ $N_1(2+\sqrt{2}\|0); N_2(2-\sqrt{2}\|0);$ $S_y(0\|2)$	b) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ $N_1(-2+\sqrt{2}\|0);$ $N_2(-2-\sqrt{2}\|0);$ $S_y(0\|2)$	c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $N_1(3\|0); N_2(1\|0);$ $S_y(0\|3)$
d) $f(x) = -x^2 + 8x - 9$ $N_1(4+\sqrt{7}\|0); N_2(4-\sqrt{7}\|0);$ $S_y(0\|-9)$	e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ $N_1(4+\sqrt{6}\|0); N_2(4-\sqrt{6}\|0);$ $S_y(0\|5)$	f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ $N_1(2\|0); N_2(-6\|0);$ $S_y(0\|6)$

3. Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild der Normalparabel hervor durch:
   a) Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach unten.
   b) Verschiebung um zwei Einheiten nach links und um zwei Einheiten nach unten.
   c) Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um eine Einheiten nach unten.
   d) Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung um vier Einheiten nach rechts und um sieben Einheiten nach oben.
   e) Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$,Verschiebung um zwei Einheiten nach rechts und um eine halbe Einheit nach oben.
   f) Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$, Verschiebung um eine Einheit nach links und um $\frac{7}{2}$ Einheiten nach oben.

4. Graphen aller f:



Lösung A3

a) Scheitelform

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \quad | \quad \cdot(-2)$

$-2f(x) = x^2 - 4x - 2$

$-2f(x) = (x-2)^2 - 4 - 2 \quad |$ quadratische Ergänzung

$-2f(x) = (x-2)^2 - 6 \quad | \quad :(-2)$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$

$S(2|3)$

b) Achsenschnittpunkte:

$f(0) = 1; \quad S_y(0|1)$

Nullstellen:

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = 0 \quad | \quad \cdot(-2)$

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+2} = 2 \pm \sqrt{6}$

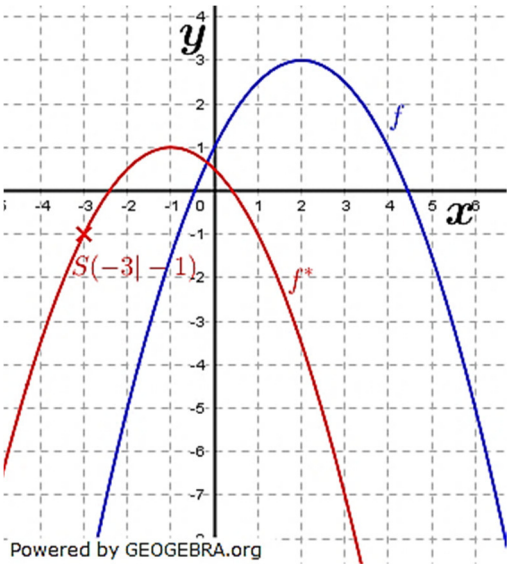
$N_1(2+\sqrt{6}|0); \quad N_2(2-\sqrt{6}|0)$

c) Punkt auf y-Achse ist $S_y(0|1)$. Dieser Punkt soll nun $P(-3|-1)$ sein.
Die Parabel muss um drei Stellen nach links und um zwei Stellen nach unten verschoben werden.

$f^*(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2(x+3) + 1 - 2$

$f^*(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) + 2x + 6 - 1$

$f^*(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5$



d) Schnittpunkt der beiden Parabeln:

$f(x) \cap f^*(x)$

$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2}x^2 - x + 0{,}5$

$3x = -0{,}5$

$x = -\frac{1}{6}$

$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{6}\right) + 1$

$= -\frac{1}{72} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{47}{72}$

$S\left(-\frac{1}{6}\middle|\frac{47}{72}\right)$

e) siehe Grafik rechts.

Lösung A4

a) Geschwindigkeit für $7\ ltr$ Benzinverbrauch auf $100\ km$.

$K(v) = 7$

$0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 = 7 \quad | \quad -7$

$0{,}002v^2 - 0{,}18v + 1{,}55 = 0 \quad | \quad :0{,}002$

$v^2 - 90v + 775 = 0$

$v_{1,2} = 45 \pm \sqrt{1625 - 775} \quad | \quad p/q$-Formel

$= 45 \pm \sqrt{850}$

$v_1 = 74{,}155; \quad v_2 = 15{,}85$

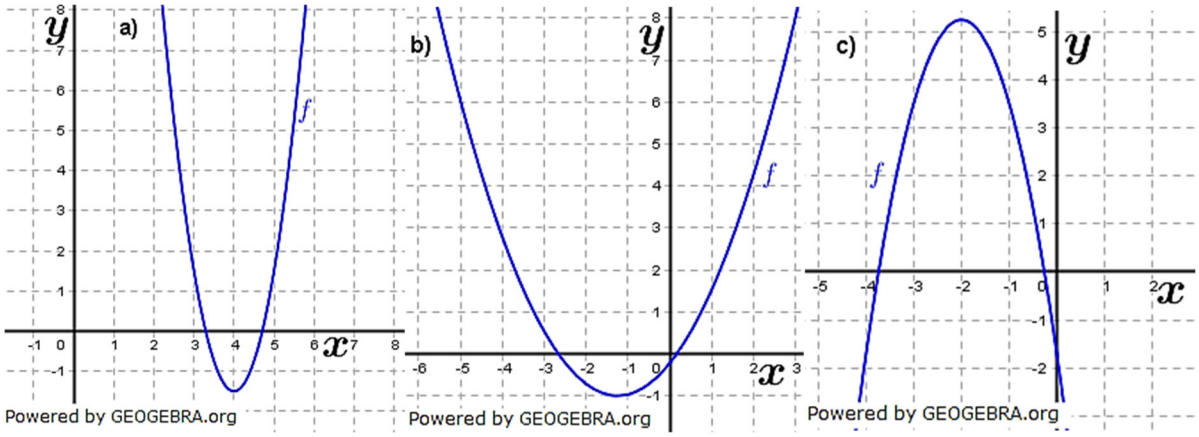
Wegen Aufgabenstellung $v > 40$ ist $v_1 = 74{,}155$ die gesuchte Lösung.

Bei etwa $74\ km/h$ benötigt das Fahrzeug $7\ ltr/100\ km$.

b) Geschwindigkeit des geringsten Verbrauchs:
$K(v)$ ist eine Parabel, die Geschwindigkeit des geringsten Verbrauchs liegt im Scheitel dieser Parabel.
Scheitelpunktgleichung $K(v)$:
$K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 \quad | \quad \cdot 500$
$500K(v) = v^2 - 90v + 4275$
$500K(v) = (v-45)^2 - 2025 + 4275$
$500K(v) = (v-45)^2 + 2250 \quad | \quad :500$
$K(v) = 0{,}002(v-45)^2 + 4{,}5$
Der geringste Verbrauch ist bei $45\ km/h$ *mit etwa* $4{,}5\ ltr\ /\ 100\ km$.

Lösung A5

a) $f(x) = 3(x-4)^2 - 1{,}5$
b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 1$
c) $f(x) = -1{,}75(x+2)^2 + 5{,}25$



Lösung A6

a) $g(x)$ ist in Nullstellenform gegeben, $f(x)$ umgestellt ergibt $f(x) = -x(x+3)$, ebenfalls eine Nullstellenform.
Aus den Nullstellenformen lesen wir ab, dass sowohl f als auch g die x-Achse in $N_1(-3|0)$ und $N_2(0|0)$ schneiden.
Scheitelpunkt von g:
Wegen der identischen Nullstellen liegt der Scheitel von g ebenfalls bei $x_0 = -1{,}5$.
$g(-1{,}5) = 0{,}5 \cdot (-1{,}5)(-1{,}5+3) = -1{,}125$
$S_g(-1{,}5|-1{,}125)$

b) Koordinaten von P und Q:
P liegt auf f mit $P(u|f(u))$
Q liegt auf g mit $Q(u|g(u))$
$P(u|-u^2-3u)$; $Q(u|0{,}5u(u+3))$

c) Koordinaten von R und S:
Wegen der Symmetrieachse bei $x_0 = -1{,}5$ liegen die x-Werte von R und S bei $x_R = x_S = |-1{,}5+u|$, somit
$R(-1{,}5+(-1{,}5-u)|-u^2-3u)$; $S(-1{,}5+(-1{,}5-u)|0{,}5u(u+3))$

Fläche eines Rechtecks: $A_{Rechteck} = a \cdot b$
Wir bestimmen die Koordinaten der Punkt P, Q, R und S für $u = -1$:
$P(-1|2)$; $Q(-1|-1)$
$R(-2|-(-2)^2 - 3 \cdot (-2))$; $S(-2|0{,}5 \cdot (-2)(-2+3))$
$R(-2|2)$; $S(-2|-1)$
Aus $A_{Rechteck} = a \cdot b$ ergibt sich $a = x_P - x_R = -1 - (-2) = 1$ und
$b = y_P - y_Q = 2 - (-1) = 3$
$A_{Rechteck} = 1 \cdot 3 = 3$
Das Rechteck $PQRS$ hat für $u = -1$ einen Flächeninhalt von $3\,FE$.

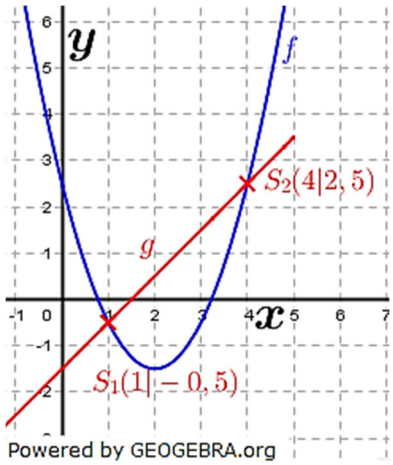
Für den Umfang des Rechtecks gilt allgemein:
$a = |x_P - x_R| = |u - (-3 - u)| = |3 + 2u|$
$b = |y_P - y_Q| = |-u^2 - 3u - (0{,}5u(u+3)| = |-1{,}5u^2 - 4{,}5u|$
$U(u) = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (|3 + 2u| - 1{,}5u^2 - 4{,}5u)$

d) Verschieben von g in y-Richtung, sodass g die Parabel f berührt:
Symmetrieachse von f und g sind identisch. Somit muss g soweit verschoben werden, dass der Scheitel von g mit dem Scheitel von f zusammenfällt.
$S_f(-1{,}5|2{,}25)$ | gegeben
$S_g(-1{,}5|-1{,}225)$ | errechnet Teilaufgabe a)
Verschiebung von g um $y_{S_f} - y_{S_g}$ Einheiten nach oben.
$y_{S_f} - y_{S_g} = 2{,}25 + 1{,}225 = 3{,}475$
$g^*(x) = g(x) + 3{,}475 = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + 3{,}475$
$B(-1{,}5|2{,}5)$
Der Berührpunkt ist zugleich Scheitelpunkt von f.

e) $f(a) - f(a+1) = 4$
$-a^2 - 3a - \left(-(a+1)^2 - 3(a+1)\right) = 4$
$-a^2 - 3a + a^2 + 2a + 1 + 3a + 3 = 4$
$2a + 4 = 4$
$a = 0$
Für $a = 0$ ist $f(a) - f(a+1) = 4$

Lösung A7

$g(x) = x - 1{,}5$; $f(x) = x^2 - 4x + 2{,}5$
$g(x) \cap f(x)$:
$x^2 - 4x + 2{,}5 = x - 1{,}5$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$ | p/q-Formel
$x_{1,2} = 2{,}5 \pm 1{,}5$
$x_1 = 4$; $x_2 = 1$
$g(1) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5$
$g(4) = 4 - 1{,}5 = 2{,}5$
$S_1(1|-0{,}5$; $S_2(4|2{,}5)$



Lösung A8

$f(x) = x^2 + 2x$
Normalparabel, nach oben geöffnet, Symmetrieachse $x = -1$.
Kein Schnittpunkt mit f:
$p(x) = -x^2 - 2$
Ein Schnittpunkt mit f:
$p(x) = x^2 + 4x$
Zwei Schnittpunkte mit f:
$p(x) = \frac{1}{2}x^2$

Lösung A9

$f(x) = 9 \cdot g(x)$
f ist gegenüber g mit dem Faktor $k = 9$ in y-Richtung gestreckt.

Lösung A10

a)	$f(x) = x + 1$ Nicht quadratisch	b)	$f(x) = \frac{1}{x^2}$ Nicht quadratisch	c)	$f(x) = 2x^2 + 4 + x^3$ Nicht quadratisch
d)	$f(x) = -4x^2 + 5x + 9$ Quadratisch	e)	$f(x) = \sqrt{5}x^2$ Quadratisch	f)	$f(x) = x^2$ Quadratisch

Lösung A11

a) $x^2 - 2x - 2 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2}$ | p/q-Formel
$x_1 \approx 2{,}73;\quad x_2 = -0{,}73$

b) Martina:
Bestimmt die Lösungen über die Schnittstellen der Normalparabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = 2x + 2$.
Jutta:
Bestimmt die Lösungen über die Schnittstellen der Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2x$ und der Geraden $y = 2$.
Konrad:
Bestimmt die Lösungen über die Nullstellen der Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2x - 2$.

c) $x^2 + 3x + 2 = 0$
Verfahren Martina:
$f(x) = x^2;\quad g(x) = -3x - 2$
$f(x) \cap g(x)$
Verfahren Jutta:
$f(x) = x^2 + 3x;\quad g(x) = -2$
$f(x) \cap g(x)$
Verfahren Konrad:
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2}$ | p/q-Formel
$x_1 = -1;\quad x_2 = -2$
Alle Verfahren führen zum selben Ergebnis.

d) $2x^2 - x - 6 = 0 \quad | \quad :2$

$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{48}{16}} \quad | \quad p/q$-Formel

$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2}$

Jutta ist geschickter vorgegangen, da sie die Gleichung $2x^2 - x - 6 = 0$ zunächst durch 2 geteilt hat und dann die Schnittstellen zwischen der Normalparabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ ermittelt hat.