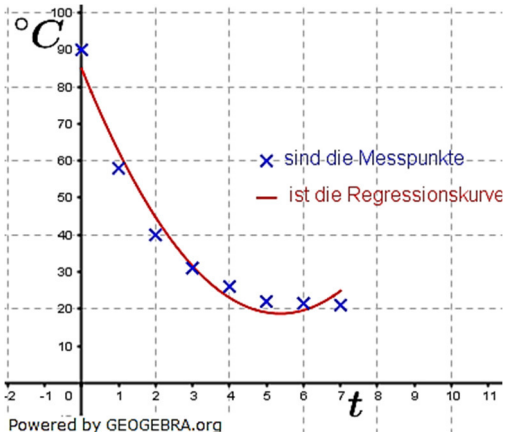
Lösung A1

In nebenstehender Grafik sind die blauen Kreuzchen die eingetragenen Messpunkte und die rote Linie der Graph der über die Regression mithilfe des WTR sich ergebenden Funktionsgleichung
$T(t) = 2{,}3t^2 - 24{,}68t + 84{,}92.$



Diese Funktion ist nicht geeignet den Vorgang zu beschreiben, da die Werte des Graphen ab etwa $t = 5$ wieder ansteigen.

Die Vorgehensweise zur Erstellung einer Regression kannst du im
→ „WIKI quadratische Funktionen (Parabel)" nachlesen.

Lösung A2

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Kostenfunktion als quadratische Funktion feststellen.
Dies sind vor allem:
Die Parabel verläuft durch den Punkt $S_y(0|900)$ (resultierend aus den Fixkosten)
Die Parabel verläuft durch den Punkt $P(10|1050)$ (Gesamtkosten für $10\,ME$)
Die Parabel verläuft durch den Punkt $P(20|1400)$ (Gesamtkosten für $20\,ME$)

a) Funktionsgleichung $K(x) = ax^2 + bx + c$

(I)	$0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 900$	|	Punktprobe mit $S_y(0\|900)$
(II)	$100 \cdot a + 10 \cdot b + 900 = 1050$	|	Punktprobe mit $P(10\|1050)$
(III)	$400 \cdot a + 20 \cdot b + 900 = 1400$	|	Punktprobe mit $P(20\|1400)$
(II)	$100 \cdot a + 10 \cdot b = 150$	|	$\cdot 2$
(III)	$400 \cdot a + 20 \cdot b = 500$		
(II)	$200 \cdot a + 20 \cdot b = 300$		
(III)	$\underline{400 \cdot a + 20 \cdot b = 500}$		
(II)-(III)	$-200 \cdot a = -200$		
	$a = 1$		
$a \to (II)$	$200 \cdot 1 + 20 \cdot b = 300$		
	$20 \cdot b = 100$		
	$b = 5$		

$K(x) = x^2 + 5x + 900$

b) *Produktionsmenge für Gesamtkosten von* 1200 €*:*

$x^2 + 5x + 900 = 1200$
$x^2 + 5x - 300 = 0$
$x_{1,2} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 300}$ | p/q-Formel
$x_1 = 15;\quad x_2 = -20$

Bei der Produktion von $15\,ME$ *entstehen Gesamtkosten von* 1200 €*.*

c) *Gewinnzone und größter Gewinn:*
Ein Gewinn errechnet sich aus Erlöse – Kosten, also
$G(x) = E(x) - K(x)$
Bei Verkäufen von 85 € pro ME lautet die Erlösfunktion:
$E(x) = 85x$
$G(x) = 85x - (x^2 + 5x + 900)$
$G(x) = -x^2 + 80x - 900$
$G(x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Gewinnzone befindet sich zwischen den beiden Nullstellen, denn dort verläuft der Graph der Funktion oberhalb der x-Achse.
Der größte Gewinn wird durch den Scheitelpunkt dargestellt.
$-x^2 + 80x - 900 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 - 80x + 900 = 0$
$x_{1,2} = 40 \pm \sqrt{1600 - 900} \quad |$ p/q-Formel
$x_1 \approx 66{,}46; \quad x_2 \approx 13{,}54$
Die Gewinnzone befindet sich zwischen 14 *und* 66 *verkauften ME.*
Scheitel:
Symmetrieachse bei $x = \frac{x_2+x_1}{2} = \frac{80}{2} = 40$
$G(40) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 900 = -1600 + 3200 - 900 = 700.$
Der größte Gewinn in Höhe von 700 € *wird bei Verkauf und Produktion von* $40\ ME$ *erzielt.*

d) *Mittlere Kostenzuwachs:*
Gesucht ist die mittlere Änderungsrate der Kostenfunktion im Intervall $[10; 30]$.
$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(30)-K(10)}{30-10} = \frac{30^2+5\cdot 30+900-(10^2+5\cdot 10+900)}{20} = \frac{1950-1050}{20} = \frac{900}{20} = 45$
Der mittlere Kostenzuwachs im Intervall $[10; 30]$ *beträgt* 45 €*/Stück.*

Lösung A3

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Parabelfunktion des Brückenbogens feststellen. Dabei müssen wir zunächst die Lage des Koordinatensystems bestimmen.
Wir wählen die y-Achse als Symmetrieachse, sodass wir wegen der Gesamtbreite von zwei Nullstellen erhalten, nämlich $N_1(-85|0)$ und $N_2(85|0)$.
Im Abstand von $2{,}5\ m$ zur Nullstelle ist der Brückenbogen $6{,}28\ m$ hoch.
Dies führt uns zu einem weiteren Punkt, nämlich $P(82{,}5|6{,}28)$.
Aufstellung der Funktionsgleichung des Parabelbogens über zwei Nullstellen und einen weiteren Punkt.
$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \quad |$ Nullstellenform
$f(x) = a \cdot (x - 85)(x + 85) \quad |$ Nullstellen einsetzen
$\quad = a(x^2 - 7225)$
$6{,}28 = a(82{,}5^2 - 7225) \quad |$ Punktprobe mit $P(82{,}5|6{,}28)$
$6{,}28 = -418{,}75a$
$a = -0{,}014997$
$f(x) = -0{,}015 \cdot (x^2 - 7225)$
Symmetrieachse bei $x = 0$
$f(0) = -0{,}015 \cdot (-7225) = 108{,}375$
Der Brückenbogen hat eine Höhe von etwa $108\ m$.

Lösung A4

a) $A_{Rechteck} = x \cdot y$ mit x als Länge und y als Breite.
Laut Aufgabenstellung ist $y = x - 30$.
Die maximale Fläche ist gegeben mit 10800.
Somit ist $A_{Rechteck} = x \cdot (x - 30) \leq 1800$
$x^2 - 30x \leq 10800$
$x^2 - 30x - 10800 \leq 0$

b) $x^2 - 30x - 10800 = 0$
$x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 + 10800}$ | p/q-Formel
$x_1 = 120; \quad x_2 = -90$
x_2 entfällt, da hier keine Lösung.
Laut Aufgabenstellung soll x mindestens $90\,m$ lang sein. Daraus folgt:
Länge: $90 \leq x \leq 120$
Breite: $60 \leq x \leq 90$

Lösung A5

Für die Fixkosten muss gelten $K(0) = 330$. Für $10\,ME$ muss gelten $K(10) = 360$ und für $20\,ME$ muss gelten $K(20) = 410$.
$K(0) = 330$
$K(10) = \frac{1}{10}(10)^2 + 2 \cdot 10 + 330 = 360$
$K(20) = \frac{1}{10}(20)^2 + 2 \cdot 20 + 330 = 410$
Die Gesamtkosten werden durch $K(x)$ richtig dargestellt.

Gewinnfunktion = Erlösfunktion minus Kostenfunktion
$G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = p \cdot x - \left(\frac{1}{10}x^2 + 2x + 330\right) = -\frac{1}{10}x^2 + x \cdot (p - 2) - 330$
Nutzenschwelle 30 bedeutet $G(30) = 0$.
$-\frac{1}{10} \cdot (30)^2 + 30 \cdot (p - 2) - 330 = 0$
$30p = 90 + 60 + 330 = 480$
$p = 16$
Bei einem Verkaufserlös von $16\,GE$ pro ME liegt die Nutzenschwelle bei $30\,ME$.

Gewinnfunktion für $16\,\mathrm{GE}$ pro ME:
$G(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 14x - 330$
$-\frac{1}{10}x^2 + 14x - 330 = 0$ | $\cdot(-10)$
$x^2 - 140x + 3300 = 0$
$x_{1,2} = 70 \pm \sqrt{4900 - 3300}$ | p/q-Formel
$x_1 = 30; \quad x_2 = 110$
Im Bereich zwischen $30\,ME$ und $110\,ME$ wird bei $16\,GE$ pro ME mit Gewinn gearbeitet.

Lösung A6

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Parabelfunktion der Gewinnfunktion feststellen. Wir stellen fest, dass maximaler Gewinn bei $300\,ME$ mit $40000\,€$ Gewinn ist, also ist der Scheitel $S(300|40000)$. Des Weiteren haben wir die Gewinnschwelle (=Nullstelle der Funktionsgleichung) mit $N_1(100|0)$ und damit wegen der Symmetrieachse bei $x = 300$ die zweite Nullstelle mit $N_2(500|0)$.

$G(x) = a(x-100)(x-500)$
$40000 = a \cdot (200) \cdot (-200) = -40000$
$a = -1$
$G(x) = -(x-100)(x-500) = -x^2 + 600x - 50000$

Lösung A7

Lösungshilfe

Aus dem Text der Aufgabenstellung heraus müssen wir die Bedingungen für das Aufstellen der Parabelfunktion der Erlösfunktion feststellen.
Es ist einleuchtend, dass bei null Verkäufen der Erlös ebenfalls null ist, also haben wir eine Nullstelle $N_1(0|0)$. Weiterhin ist die zweite Nullstelle gegeben mit $N_2(16|0)$. Der Größte Erlös liegt im Scheitel mit $320\,€$. Die Symmetrieachse liegt bei $x = 8$ und damit der Scheitel bei $S(8|320)$.

$E(x) = a \cdot (x-8)^2 + 320$ | Scheitelform
$0 = a \cdot (-8)^2 + 320$ | Punktprobe mit $N_1(0|0)$
$64a = -320$
$a = -5$
$E(x) = -5 \cdot (x-8)^2 + 320 = -5x^2 + 80x$

Lösung A8

Lösungshilfe

Zur Aufstellung der Parabelfunktion des Benzinverbrauchs haben wir drei Punkte gegeben (siehe Tabelle). Wir bilden über diese drei Punkte eine quadratische Regression.

$b(v) = rx^2 + sx + t$
Punkte $P(30|6{,}25)$, $P(40|6{,}2)$ und $P(80|7)$
Funktionsgleichung über Regression:
$b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}04v + 7$
Die Vorgehensweise zur Erstellung einer Regression kannst du im
→ „WIKI quadratische Funktionen (Parabel)" nachlesen.
Durchschnittlicher Verbrauch bei $120\,km/h$*:*
$b(120) = 0{,}0005 \cdot 120^2 - 0{,}04 \cdot 120 + 7 = 9{,}4$

Hinweis:

Der Scheitel der Parabel befindet sich bei $S(40|6{,}2)$. Man kann bei einer Geschwindigkeit von $40\,km/h$ mit dem geringsten Verbrauch von 6,2 Liter auf $100\,km$ rechnen.

Lösung A9

Nullstelle von f für $x > 0$:

$-0{,}0135x^2 + 0{,}142x + 2 = 0 \qquad | \qquad :(-0{,}0135)$

$x^2 - 10{,}52x - 148{,}15 = 0$

$x_{1,2} = 5{,}26 \pm \sqrt{27{,}6676 + 148{,}15} \qquad | \qquad p/q$-Formel

$x_1 = 18{,}52$

Wegen $x > 0$ ist x_2 hier nicht relevant.

Die Nullstelle bei $x_1 = 18{,}52$ entspricht der Wurfweite des Kugelstoßers in Metern.

Größte Höhe der Kugel:

Größte Höhe wird im Scheitelpunkt erreicht.

$f(x) = -0{,}0135x^2 + 0{,}142x + 2 \qquad | \qquad :(-0{,}0135)$

$-\frac{f(x)}{0{,}0135} = x^2 - 10{,}52x - 148{,}15$

$-\frac{f(x)}{0{,}0135} = (x - 5{,}26)^2 - 27{,}6676 - 148{,}15 \qquad |$ quadratische Ergänzung

$-\frac{f(x)}{0{,}0135} = (x - 5{,}26)^2 - 172{,}8176 \qquad | \qquad \cdot(-0{,}0135)$

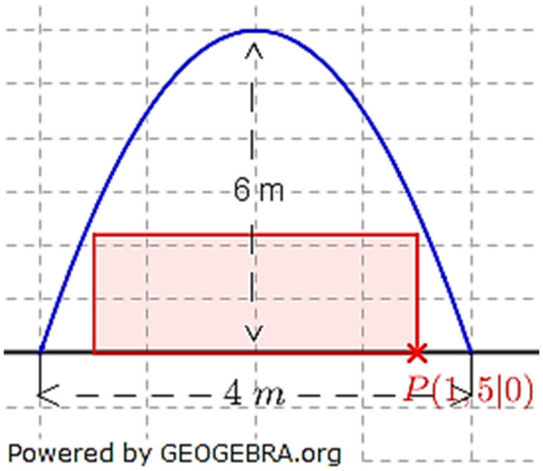
$f(x) = -0{,}0135(x - 5{,}26)^2 + 2{,}373$

$S(5{,}26|2{,}37)$

Die Kugel erreicht ein maximale Höhe von $2{,}37\ m$.

Lösung A10

Die rechte Grafik verdeutlicht die Situation:



Aufstellung der Funktionsgleichung der Parabel:

$N_1(-2|0);\ \ N_2(2|0);\ \ S(0|6)$

$p(x) = a(x+2)(x-2) = ax^2 - 4a$

$6 = a(-4)$

$a = -\frac{3}{2}$

$p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$

Wenn das Fahrzeug in der Mitte fährt, ist sein rechter Rand bei $P(1{,}5|0)$, die obere rechte Ecke bei $P(1{,}5|2{,}2)$.

Ist $p(1{,}5) > 2{,}20$, kann das Fahrzeug unter der Brücke durchfahren.

$p(1{,}5) = -\frac{3}{2}(1{,}5)^2 + 6$

$p(1{,}5) = 2{,}625$

Das Fahrzeug kann unter der Brücke durchfahren.