Aufgabe A1

Insgesamt gibt es (mit Stand Oktober 2010) in Deutschland rund $1{,}5$ Millionen Kilometer Stromleitungen. Davon sind etwas weniger als $30\,\%$ sogenannte ‚Hochspannungs-, oder ‚Höchstspannungsleitungen', das sind Leitungen mit Spannungen von 380000, 220000 und 110000 Volt. Ihre Gesamtlänge beträgt rund $116000\,km$. Wegen der sehr hohen Kosten und der schwierigen Wartung bei der unterirdischen Verlegung lassen sich diese praktisch nur oberirdisch verlegen. Im Mittel stehen dazu im Abstand von 300 bis 400 Metern die Masten, zwischen denen die einzelnen Kabel frei hängen.
Die Messung der Höhe des Kabels über dem Boden in verschiedenen Abständen zum Strommast ergab bei einem Hochspannungskabel die folgende Wertetabelle:

Abstand a in Metern	20	40	60	80	100	120
Höhe h in Metern	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8

Eine quadratische Regression führte zur Funktionsgleichung

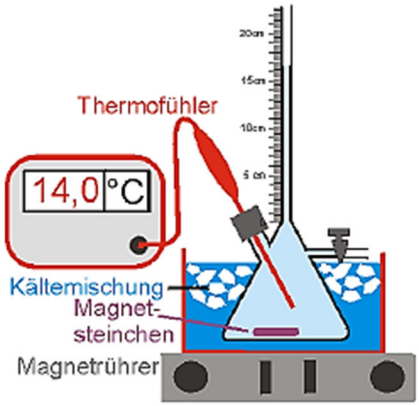
$$h(a) = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$$

wobei a der Abstand in Metern von einem Hochspannungsmast aus gemessen, sowie $h(x)$ die Höhe der Stromleitung über dem Boden in Metern ist.

a) Überprüfe, ob die gemessenen Wertepaare die Funktionsgleichung dieser quadratischen Funktion erfüllen.
b) Zeichne den Graphen dieser Quadratischen Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.
c) Gib den y-Achsenabschnitt dieser Quadratischen Funktion mit Maßeinheit an und erläutere die Bedeutung dieses Wertes für den Zusammenhang zwischen dem Abstand und der Höhe.
d) Berechne die Höhe des Kabels über dem Boden im Abstand von $200\,m$ zum Strommast.
e) Berechne, in welchem Abstand zum ersten Strommast der zweite Strommast mit einer Höhe von $46{,}2\,m$ steht.
f) Berechne, in welchem Abstand zum ersten Strommast das Kabel am tiefsten hängt und wie groß dort die Höhe über dem Boden ist.
g) Bekanntlich dehnen sich Hochspannungsleitung im Sommer aufgrund der Hitze aus und ziehen sich im Winter aufgrund der Kälte wieder zusammen. Gib an, welche Parameter des Funktionsterms sich beim Ausdehnen bzw. Zusammenziehen der Hochspannungsleitung ändern und begründe Deine Entscheidung.

Aufgabe A2

Wasser verhält sich bei kleinen Temperaturen über einem bestimmten Wert noch genau wie andere Flüssigkeiten: Bei Erhöhung der Temperatur wird die Dichte immer kleiner, bei Verringerung der Temperatur wird die Dichte immer größer. Unterhalb dieses Wertes jedoch hat Wasser eine besondere Eigenschaft, die es von fast allen anderen Flüssigkeiten unterscheidet und die für die Natur eine große Bedeutung hat. Diese spezielle Eigenschaft, die man die **Anomalie des Wassers** nennt, wird untersucht, indem man entsprechend dem rechts abgebildeten Versuchsaufbau eine bestimmte Menge Wasser langsam abkühlt und dabei ständig mit einem Thermofühler die Temperatur und anhand der Messung des Volumens und der Masse des Wassers dessen Dichte bestimmt.



Die Messung von Temperatur und Dichte ergab die folgende Wertetabelle:

Temperatur T in $°C$	10	9	8	7	6	5
Dichte ρ in g/cm^3	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992

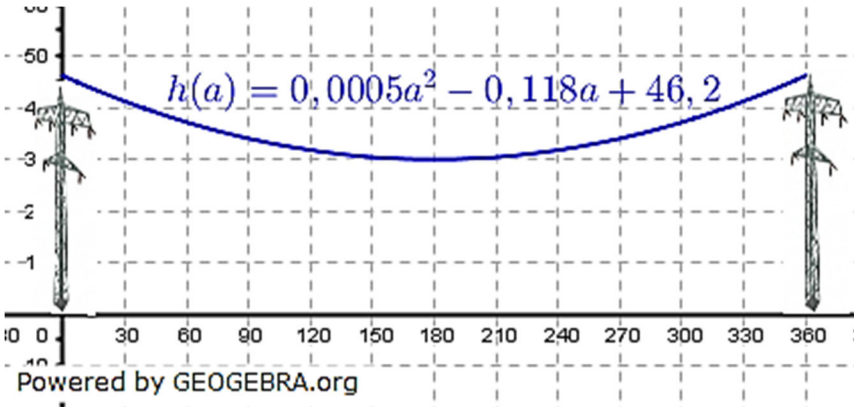
a) Bestimme mit Hilfe von drei Wertepaaren den Funktionsterm dieser Quadratischen Funktion.
b) Überprüfe, ob die anderen gemessenen Wertepaare die Funktionsgleichung dieser Quadratischen Funktion erfüllen.
c) Zeichne den Graphen dieser Quadratischen Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.
d) Gib den y-Achsenabschnitt dieser Quadratischen Funktion mit Maßeinheit an und erläutere die Bedeutung dieses Wertes für den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Dichte von Wasser.
e) Berechne die Dichte von Wasser bei einer Temperatur von $7{,}5\,°C$.
f) Berechne die Temperatur von Wasser bei einer Dichte von $0{,}999982\ g/cm^3$.
g) Berechne, bei welcher Temperatur Wasser die größte Dichte hat und wie groß diese Dichte ist. Informiere dich über die Bedeutung dieses Sachverhaltes für die Natur.

Lösung A1

a) Prüfung der gegebenen Funktionsgleichung über die Wertetabelle:

Abstand a in Metern	20	40	60	80	100	120
Höhe h in Metern (gemessen)	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8
$h(a) = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8

b) Grafik siehe rechts.



c) Der y-Achsenabschnitt beträgt $46{,}2\,m$.
Das ist die Höhe über dem Erdboden der Seilaufhängung am Mast.

d) Gesucht ist $h(200)$:
$h(200) = 0{,}0005 \cdot 200^2 - 0{,}18 \cdot 200 + 46{,}2 = 30{,}2$
Die Höhe der Stromleitung in $200\,m$ Entfernung zu einem Masten beträgt $30{,}2\,m$ über dem Erdboden.

e) Gesucht wird der zweite Wert a_2 für $h(a) = 46{,}2$. Der erste Wert ist bei $a_1 = 0$.
$46{,}2 = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$
$0{,}0005a^2 - 0{,}18a = 0$
$a(0{,}0005a - 0{,}18) = 0$
$a_1 = 0; \quad a_2 = 360$
Die Masten sind jeweils $360\,m$ voneinander entfernt.

f) Das Kabel hängt in der Mitte zwischen zwei Masten am tiefsten (Symmetrieachse der Parabel). Dies ist bei $a = 180\,m$ der Fall.
$h(180) = 0{,}0005 \cdot 180^2 - 0{,}18 \cdot 180 + 46{,}2$
$h(180) = 30$
Das Kabel hängt an der tiefsten Stelle $30\,m$ über dem Boden.

g) Infolge des Wärmeausdehnungskoeffizienten von Stoffen verlängert sich das Kabel im Sommer, das heißt, die Parabelform wird schmäler und verkürzt sich im Winter, d.h., die Parabelform wird flacher. Die Aufhängepunkte des Kabels bleiben dieselben.
Wir bestimmen die Beeinflussung der Parabelgleichung über die Veränderung des Scheitels, der sich aus den obigen Berechnungen zu $S(180|30)$ ergeben hat. Durch Wärme / Kälte ändert sich die Höhe des tiefsten Punktes. Je nach Wetterlage liegt dieser somit bei $S(180|k \cdot 30)$. Im Sommer ist $k < 1$ (Tiefster Punkt wird kleiner), im Winter ist $k > 1$ (tiefster Punkt wird größer).
$h(a) = b(x - 180)^2 + 30k$ | Scheitelform mit $S(180|k \cdot 30)$
$46{,}2 = b(0 - 180)^2 + 30k$ | Punktprobe mit $P(0|46{,}2)$ (Aufhängung)
$46{,}2 = 32400b + 30k$
$46{,}2 - 30k = 32400b$
$b = \frac{46{,}2 - 30k}{32400}$

$h(a) = \frac{46{,}2-30k}{32400}(a-180)^2 + 30k$

$= \frac{46{,}2-30k}{32400}a^2 - \frac{46{,}2-30k}{360}a + \frac{46{,}2-30k}{32400} \cdot 32400 + 30k$

$h(a) = \frac{46{,}2-30k}{32400}a^2 - \frac{46{,}2-30k}{360}a + 46{,}2$

Je nach Witterung ändern sich die Koeffizienten von a^2 und a.

Lösung A2

a) Quadratische Funktionsgleichung durch drei Punkte.

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Punkte:

$Q(10|0{,}999712)$; $R(8|0{,}999872)$; $S(5|0{,}999992)$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$ | $\cdot 64$

(II) $64a + 8b + c = 0{,}999872$ | $\cdot 100$

(III) $25a + 5b + c = 0{,}999992$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$ | $\cdot 25$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$

(III) $25a + 5b + c = 0{,}999992$ | $\cdot 100$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$ | $\cdot 250$

(III) $0 - 250b - 75c = -75{,}0064$ | $\cdot 160$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$

(III) $0 + 0 + 3000c = 3479{,}552$

$3000c = 2999{,}616$

$c = 0{,}999872$

$-160b - 36 \cdot 0{,}999872 = -36{,}005632$

$-160b = -0{,}01024$

$b = 0{,}000064$

$100a + 10 \cdot 0{,}000064 + 0{,}999872 = 0{,}999712$

$100a = -0{,}0008$

$a = -0{,}000008$

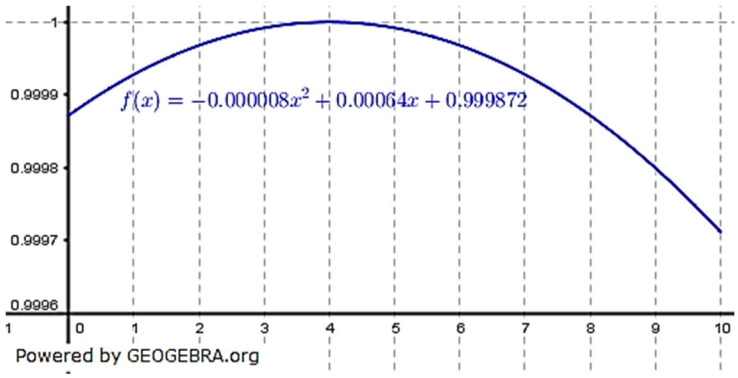
$f(x) = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x + 0{,}999872$

b) Prüfung der anderen Wertepaare über Tabelle:

Temperatur T in $°C$	10	9	8	7	6	5
Dichte ρ in g/cm^3	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992
$f(x) = \cdots$	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992

c) siehe Grafik rechts.

d) Der y-Achsenabschnitt beträgt $0{,}999872\ g/cm^3$. Das ist die Dicht des Wassers (nicht des Eises) bei einer Temperatur von $0\ °C$.



e) Gesucht wird $f(7{,}5)$:
$f(7{,}5) = -0{,}000008 \cdot (7{,}5)^2 + 0{,}000064 \cdot 7{,}5 + 0{,}999872 = 0{,}999902$
Die Dichte des Wassers bei $7{,}5\,°C$ beträgt $0{,}999902\ g/cm^3$.

f) Gesucht ist die Temperatur x für $f(x) = 0{,}999982$
$0{,}999982 = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x + 0{,}999872$
$-0{,}000008x^2 + 0{,}000064x - 0{,}00011 = 0 \quad | \quad :(-0{,}000008)$
$x^2 - 8x + 13{,}75 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 13{,}75} = 4 \pm 1{,}5 \quad |$ p/q-Formel
$x_1 = 5{,}5; \quad x_2 = 2{,}5$
Wasser hat die Dichte $0{,}999982\ g/cm^3$ bei etwa $5{,}5\,°C$ und bei etwa $2{,}5\,°C$.

g) Die gesuchten Werte befinden sich im Scheitelpunkt der Parabelgleichung.
$f(x) = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x - 0{,}00011 \quad | \quad :(-0{,}000008)$
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = x^2 - 8x + 124984$
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = (x-4)^2 - 16 - 124984 \quad |$ quadratische Ergänzung
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = (x-4)^2 - 125000 \quad | \quad \cdot(-0{,}000008)$
$f(x) = -0{,}000008(x-4)^2 + 1$
Die größte Dichte von Wasser ist $1\ g/cm^3$ bei einer Temperatur von $4\,°C$.