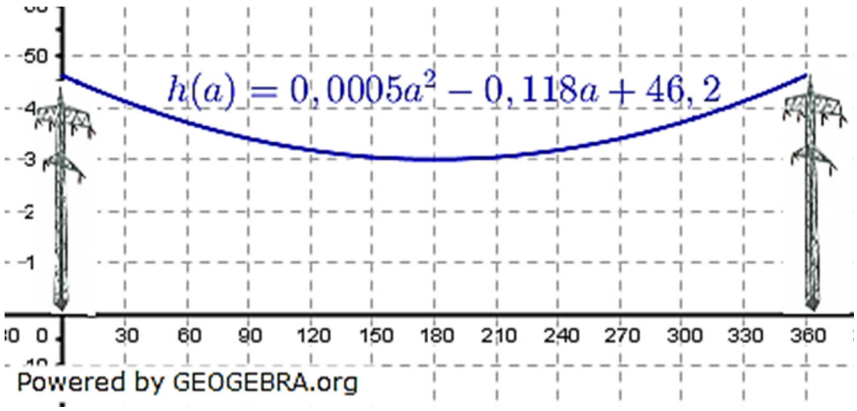
Lösung A1

a) Prüfung der gegebenen Funktionsgleichung über die Wertetabelle:

Abstand a in Metern	20	40	60	80	100	120
Höhe h in Metern (gemessen)	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8
$h(a) = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$	42,8	39,8	37,2	35	33,2	31,8

b) Grafik siehe rechts.



c) Der y-Achsenabschnitt beträgt $46{,}2\,m$.
Das ist die Höhe über dem Erdboden der Seilaufhängung am Mast.

d) Gesucht ist $h(200)$:
$h(200) = 0{,}0005 \cdot 200^2 - 0{,}18 \cdot 200 + 46{,}2 = 30{,}2$
Die Höhe der Stromleitung in $200\,m$ Entfernung zu einem Masten beträgt $30{,}2\,m$ über dem Erdboden.

e) Gesucht wird der zweite Wert a_2 für $h(a) = 46{,}2$. Der erste Wert ist bei $a_1 = 0$.
$46{,}2 = 0{,}0005a^2 - 0{,}18a + 46{,}2$
$0{,}0005a^2 - 0{,}18a = 0$
$a(0{,}0005a - 0{,}18) = 0$
$a_1 = 0; \quad a_2 = 360$
Die Masten sind jeweils $360\,m$ voneinander entfernt.

f) Das Kabel hängt in der Mitte zwischen zwei Masten am tiefsten (Symmetrieachse der Parabel). Dies ist bei $a = 180\,m$ der Fall.
$h(180) = 0{,}0005 \cdot 180^2 - 0{,}18 \cdot 180 + 46{,}2$
$h(180) = 30$
Das Kabel hängt an der tiefsten Stelle $30\,m$ über dem Boden.

g) Infolge des Wärmeausdehnungskoeffizienten von Stoffen verlängert sich das Kabel im Sommer, das heißt, die Parabelform wird schmäler und verkürzt sich im Winter, d.h., die Parabelform wird flacher. Die Aufhängepunkte des Kabels bleiben dieselben.
Wir bestimmen die Beeinflussung der Parabelgleichung über die Veränderung des Scheitels, der sich aus den obigen Berechnungen zu $S(180|30)$ ergeben hat. Durch Wärme / Kälte ändert sich die Höhe des tiefsten Punktes. Je nach Wetterlage liegt dieser somit bei $S(180|k \cdot 30)$. Im Sommer ist $k < 1$ (Tiefster Punkt wird kleiner), im Winter ist $k > 1$ (tiefster Punkt wird größer).
$h(a) = b(x - 180)^2 + 30k$ | Scheitelform mit $S(180|k \cdot 30)$
$46{,}2 = b(0 - 180)^2 + 30k$ | Punktprobe mit $P(0|46{,}2)$ (Aufhängung)
$46{,}2 = 32400b + 30k$
$46{,}2 - 30k = 32400b$
$b = \frac{46{,}2 - 30k}{32400}$

$h(a) = \frac{46{,}2-30k}{32400}(a-180)^2 + 30k$

$= \frac{46{,}2-30k}{32400}a^2 - \frac{46{,}2-30k}{360}a + \frac{46{,}2-30k}{32400} \cdot 32400 + 30k$

$h(a) = \frac{46{,}2-30k}{32400}a^2 - \frac{46{,}2-30k}{360}a + 46{,}2$

Je nach Witterung ändern sich die Koeffizienten von a^2 und a.

Lösung A2

a) Quadratische Funktionsgleichung durch drei Punkte.

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Punkte:

$Q(10|0{,}999712)$; $R(8|0{,}999872)$; $S(5|0{,}999992)$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$ | $\cdot 64$

(II) $64a + 8b + c = 0{,}999872$ | $\cdot 100$

(III) $25a + 5b + c = 0{,}999992$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$ | $\cdot 25$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$

(III) $25a + 5b + c = 0{,}999992$ | $\cdot 100$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$ | $\cdot 250$

(III) $0 - 250b - 75c = -75{,}0064$ | $\cdot 160$

(I) $100a + 10b + c = 0{,}999712$

(II) $0 - 160b - 36c = -36{,}005632$

(III) $0 + 0 + 3000c = 3479{,}552$

$3000c = 2999{,}616$

$c = 0{,}999872$

$-160b - 36 \cdot 0{,}999872 = -36{,}005632$

$-160b = -0{,}01024$

$b = 0{,}000064$

$100a + 10 \cdot 0{,}000064 + 0{,}999872 = 0{,}999712$

$100a = -0{,}0008$

$a = -0{,}000008$

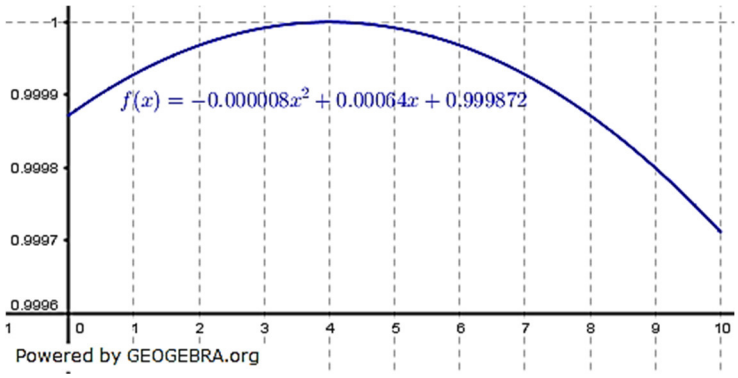
$f(x) = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x + 0{,}999872$

b) Prüfung der anderen Wertepaare über Tabelle:

Temperatur T in $°C$	10	9	8	7	6	5
Dichte ρ in g/cm^3	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992
$f(x) = \cdots$	0,999712	0,999800	0,999872	0,999928	0,999968	0,999992

c) siehe Grafik rechts.

d) Der y-Achsenabschnitt beträgt $0{,}999872\ g/cm^3$. Das ist die Dicht des Wassers (nicht des Eises) bei einer Temperatur von $0\ °C$.



e) Gesucht wird $f(7{,}5)$:
$f(7{,}5) = -0{,}000008 \cdot (7{,}5)^2 + 0{,}000064 \cdot 7{,}5 + 0{,}999872 = 0{,}999902$
Die Dichte des Wassers bei $7{,}5\,°C$ beträgt $0{,}999902\ g/cm^3$.

f) Gesucht ist die Temperatur x für $f(x) = 0{,}999982$
$0{,}999982 = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x + 0{,}999872$
$-0{,}000008x^2 + 0{,}000064x - 0{,}00011 = 0 \quad | \quad :(-0{,}000008)$
$x^2 - 8x + 13{,}75 = 0$
$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 13{,}75} = 4 \pm 1{,}5 \quad |$ p/q-Formel
$x_1 = 5{,}5; \quad x_2 = 2{,}5$
Wasser hat die Dichte $0{,}999982\ g/cm^3$ bei etwa $5{,}5\,°C$ und bei etwa $2{,}5\,°C$.

g) Die gesuchten Werte befinden sich im Scheitelpunkt der Parabelgleichung.
$f(x) = -0{,}000008x^2 + 0{,}000064x - 0{,}00011 \quad | \quad :(-0{,}000008)$
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = x^2 - 8x + 124984$
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = (x-4)^2 - 16 - 124984 \quad |$ quadratische Ergänzung
$-\frac{f(x)}{0{,}000008} = (x-4)^2 - 125000 \quad | \quad \cdot(-0{,}000008)$
$f(x) = -0{,}000008(x-4)^2 + 1$
Die größte Dichte von Wasser ist $1\ g/cm^3$ bei einer Temperatur von $4\,°C$.