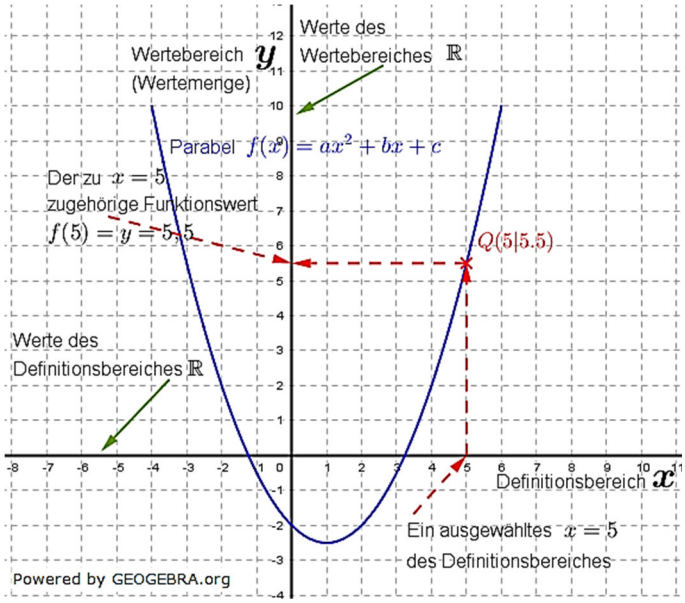
Definition des Begriffs „Funktion"

In der Mathematik ist eine **Funktion** (lateinisch *functio*) oder **Abbildung** eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der Definitionsmenge (Funktionsargument, unabhängige Variable, *x*-Wert) ***genau ein und nur ein*** Element der Wertemenge (Funktionswert, abhängige Variable, *y*-Wert) zuordnet.

Die quadratische Funktion (Parabel)

Den angeführten Definitionsbegriff einer Funktion verdeutlicht die nebenstehende Graphik.
Jedem einzelnen *x* ist durch die Funktionsvorschrift $y = ax^2 + bx + c$ genau ein und nur ein *y*-Wert zugeordnet.



Auffrischung Mittelstufenwissen

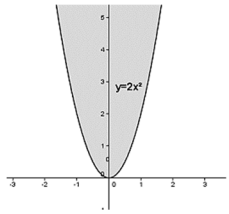
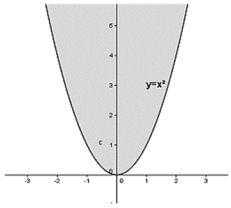
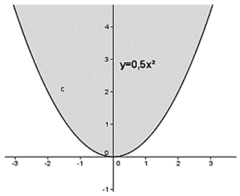
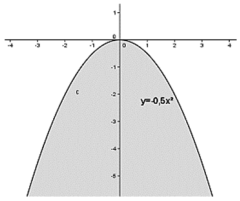
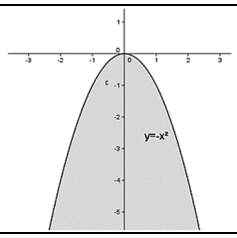
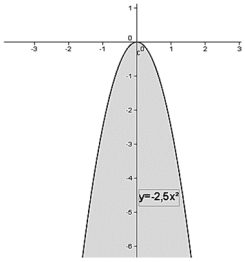
Die allgemeinen Form einer quadratischen Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Die Variablen a, b und c haben dabei die nachfolgend näher beschriebene Bedeutung:

Bedeutung des Parameters a

Der Parameter $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bestimmt die Öffnung (Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung) der Parabel. Es gilt:

Wert von $\boldsymbol{a}$	Auswirkung	Grafik
$\boldsymbol{a} > 1$	Nach oben geöffnete, gestreckte Parabel	
$\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$	Nach oben geöffnete Normalparabel	
$\mathbf{0} < a < 1$	Nach oben geöffnete, gestauchte Parabel	
$-\mathbf{1} < a < 0$	Nach unten geöffnete, gestauchte Parabel	
$\boldsymbol{a} = -\mathbf{1}$	Nach unten geöffnete Normalparabel	
$\boldsymbol{a} < -1$	Nach unten geöffnete, gestreckte Parabel	

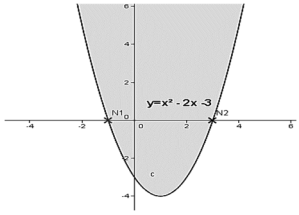
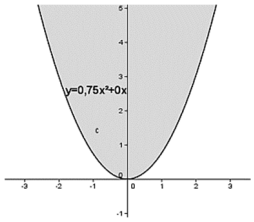
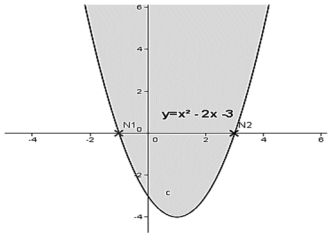
Bedeutung des Parameters b

Der Parameter $b \in \mathbb{R}$ bestimmt eine Verschiebung der Parabel in x-Richtung.
Zur Feststellung der Verschiebungsweite muss die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ in die Scheitelpunktgleichung $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ überführt werden, wobei x_s und y_s die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$ sind.
Die Gleichungsumstellung erfolgt über die quadratische Ergänzung mit

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

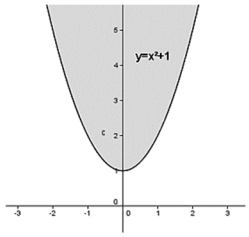
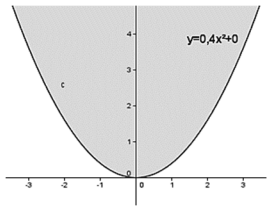
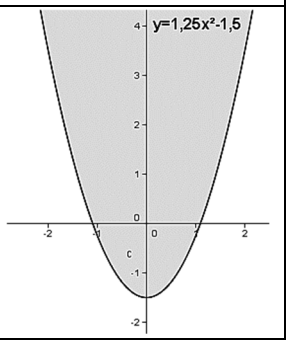
Mit $x_s = -\frac{b}{2a}$ und $y_s = c - \frac{b^2}{4a^2}$ kann der Scheitel jedoch jederzeit auch ohne Formelumstellung ermittelt werden.

Der Wert von x_S bestimmt die Verschiebung der Parabel in x-Richtung. Es gilt:

Wert von x_S	Auswirkung	Grafik
$x_S > 0$	Die Parabel ist in x-Richtung nach **rechts** verschoben.	
$x_S = 0$	Die Parabel ist in x-Richtung **nicht** verschoben.	
$x_S < 0$	Die Parabel ist in x-Richtung nach **rechts** verschoben.	

Bedeutung des Parameters c

Der Parameter $c \in \mathbb{R}$ bestimmt die Verschiebung der Parabel in y-Richtung. Es gilt:

Wert von c	Auswirkung	
$c > 0$	Die Parabel ist in y-Richtung nach **oben** verschoben.	
$c = 0$	Die Parabel ist in y-Richtung **nicht** verschoben.	
$c < 0$	Die Parabel ist in y-Richtung nach **unten** verschoben	

Beispiele

Beispiel 1: Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$. Stelle für jede Funktion die Werte der Koeffizienten a, b und c fest und mache eine Aussage über die Lage der beiden Parabeln.

Lösung 1: Funktion f:
$a = 1;\ b = -4;\ c = 1$
Es ist eine in x-Richtung verschobene nach oben geöffnete Normalparabel, die die y-Achse in $S_y(0|1)$ schneidet.
Funktion g:
$a = -\frac{1}{2};\ b = -1;\ c = \frac{3}{2}$
Es ist eine in x-Richtung verschobene, nach unten geöffnete, mit dem Faktor $k = |a| = \frac{1}{2}$ gestreckte Parabel, die die y-Achse in $S_y\left(0\middle|\frac{3}{2}\right)$ schneidet.

Beispiel 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Bestimme für die Funktion den Verschiebungsfaktor in x– und y-Richtung gegenüber der Funktion h mit $h(x) = x^2$ sowie den Scheitelpunkt.

Lösung 2: Funktion f: $f(x) = x^2 - 4x + 1$

Lösungsmöglichkeit 1:

Formelumstellung in die Scheitelpunktform über die quadratische Ergänzung.

$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$.

Lösungsmöglichkeit 2:

Ermitteln des Scheitels über die Formeln.

$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$

$y_s = c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{(-4)^2}{4\cdot 1} = 1 - 4 = -3$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$

Lösungsmöglichkeit 3:

Ermitteln der x-Koordinate des Scheitels über die Nullstellen und die Symmetrie.

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$

Da die Symmetrieachse zwischen den beiden Nullstellen in der Mitte liegt, ist $x_S = 2$.

$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$

f ist gegenüber h mit $h(x) = x^2$ in x-Richtung um 2 Stellen nach rechts und in y-Richtung um 3 Stellen nach unten verschoben.

Beispiel 3: Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.
Bestimme für die Funktion den Verschiebungsfaktor in x– und y-Richtung gegenüber der Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$, sowie den Scheitelpunkt S.

Lösung 3: Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

Lösungsmöglichkeit 1:

Formelumstellung in die Scheitelpunktform über die quadratische Ergänzung.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \quad | \quad \cdot(-2)$

$-2\cdot f(x) = x^2 + 2x - 3$

$-2\cdot f(x) = (x+1)^2 - 1 - 3 \quad | \quad :(-2)$

$f(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2 + 2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(-1|2)$.

Lösungsmöglichkeit 2:

Ermitteln des Scheitels über die Formeln.

$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$

$y_s = c - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{3}{2} - \frac{(-1)^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(2|-3)$

Lösungsmöglichkeit 3:
Ermitteln der x-Koordinate des Scheitels über die Nullstellen und die Symmetrie.

$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0 \qquad | \qquad \cdot(-2)$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{12} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4}$

Da die Symmetrieachse zwischen den beiden Nullstellen in der Mitte liegt, ist $x_S = -1$.

$f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1) + \frac{3}{2} = 2$

Der Scheitelpunkt lautet $S(-1|2)$

f ist gegenüber h mit $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ in x-Richtung um 1 Stelle nach links und in y-Richtung um 2 Stellen nach oben verschoben.

Erweitertes Wissen quadratischer Funktionen

Zum erweiterten Wissen über die quadratischen Funktionen gehören die Themenkreise

- Scheitelform;
- Symmetrie- und Globalverhalten;
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen;
- Schnittpunkte zweier Parabeln;
- Aufstellung von Funktionsgleichungen;
- Anwendungsorientierte Themen;
- Quadratische Funktionen mit Parameter.

Nachfolgend werden die einzelnen Themenkreise behandelt.

Scheitelform

Eine quadratische Funktionsgleichung hat – je nachdem ob sie nach oben oder nach unten geöffnet ist – einen tiefsten bzw. einen höchsten Punkt. Diesen Punkt nennen wir den Scheitelpunkt (Scheitel) einer Parabel.
Die Funktionsgleichung einer Parabel kann auch über die Scheitelform dargestellt werden mit

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s,$$

mit a als Streckungsfaktor in y-Richtung und $S(x_s|y_s)$ dem Scheitelpunkt und seinen Koordinaten x_s und y_s.

Dabei kann die Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$ jederzeit aus der Scheitelform hergeleitet werden durch Auflösung der binomischen Formel $(x - x_s)^2$. Auf die Auflösung binomischer Formeln wird hier nicht mehr näher eingegangen, siehe hierzu den Portalteil „Binomische Formeln".

Umgekehrt kann die Scheitelform jederzeit aus der Hauptform hergeleitet werden. Hierzu bedienen wir uns der quadratischen Ergänzung, deren Herleitung kurz wiederholt werden soll. Ausführliche Erläuterungen hierzu findest du ebenfalls im Portalteil „Binomische Formeln".

Herleitung der Scheitelform aus der Hauptform

Ausgehend von der Hauptform $f(x) = ax^2 + bx + c$ bilden wir zunächst für das Gleichungsglied $ax^2 + bx$ die quadratische Ergänzung zur Umformung des Gliedes in eine binomische Formel. Hierzu formen wir um:

$ax^2 + bx$ | Ausklammern von a

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$

Nun können wir ja aus $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ nicht einfach $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ machen, denn, wenn wir diese binomische Formel nach den binomischen Regeln wieder auflösen, erhalten wir: $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)$. Zwar entsprechen die ersten beiden Glieder $x^2 + \frac{b}{a}x$ ja wieder den beiden Gliedern in der Klammer unserer Ausgangssituation $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$, allerdings ist jetzt wohl das $+\frac{b^2}{4a^2}$ zu viel. Um dennoch weiterzukommen, ziehen wir also dieses $+\frac{b^2}{4a^2}$ mit $-\frac{b^2}{4a^2}$ wieder ab, erhalten also:

$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$, was zweifelsohne dem Ausdruck $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ entspricht.

Aus den ersten drei Gliedern $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ in der Klammer lässt sich nun aber eine binomische Formel bilden, sodass wir $a \cdot \left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ erhalten. Wenn wir jetzt diesen Ausdruck wieder ausmultiplizieren, erhalten wir

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$.

Somit haben wir $ax^2 + bx$ ungeformt in $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$.Wir setzen diesen Ausdruck in $f(x)$ ein und erhalten die endgültigen Scheitelform $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

Und da die Scheitelform ja auch lautet $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$, ist somit

$$x_s = -\frac{b}{2a}; \quad y_s = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Wie du siehst, ist dies ein sehr aufwendiges Verfahren. Wie man das einfacher machen kann, erfährst du nachfolgend.

Gegeben sei die Parabelgleichung

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 10,$$

die Faktoren sind $a = 3$, $b = 12$ sowie $c = 12$. Unter Verwendung der beiden o. a. Formeln erhalten wir $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot 3} = -2$ und $y_S = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{144}{4 \cdot 3} + 10 = -2$.

Zur manuellen Umrechnung gehen wir wie folgt vor:

Vorbereitender Schritt (nicht erforderlich bei $a = 1$):

$f(x) = 3x^2 + 12x + 10$ | $:3$ Herstellung Koeffizient 1 von a.

$\frac{1}{3} \cdot f(x) = x^2 + 4x + \frac{10}{3}$

Nun können wir mit der rechten Seite der Gleichung die Scheitelform mit 7 einfachen Schritten erstellen:

Der Ausdruck lautet $x^2 + 4x + \frac{10}{3}$

1. Schritt: $(x$
2. Schritt: $(x +$
3. Schritt: $:2$

   $(x + 2$
4. Schritt: $(x + 2)^2 -$
5. Schritt: 2^2

   $(x + 2)^2 - 4$
6. Schritt: $(x + 2)^2 - 4 + \frac{10}{3}$
7. Schritt: $(x + 2)^2 - \frac{2}{3}$

Auf der linken Seite der Gleichung steht aber nicht mehr $f(x)$, sondern $\frac{1}{3} \cdot f(x)$.
$\frac{1}{3} f(x) = (x + 2)^2 - \frac{2}{3}$. Gut, dann multiplizieren wir die Gleichung wieder mit 3 und erhalten
$f(x) = 3(x + 2)^2 - 2$
Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 + 12x + 10$ hat den Scheitel $S(-2|-2)$.

Beispiel 4: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + 8x + 12$. Bestimme den Scheitel und gib den Funktionsterm in der Scheitelform an.

Lösung 4: Wir stellen zunächst die Funktionsgleichung von f um in die Scheitelpunktgleichung.

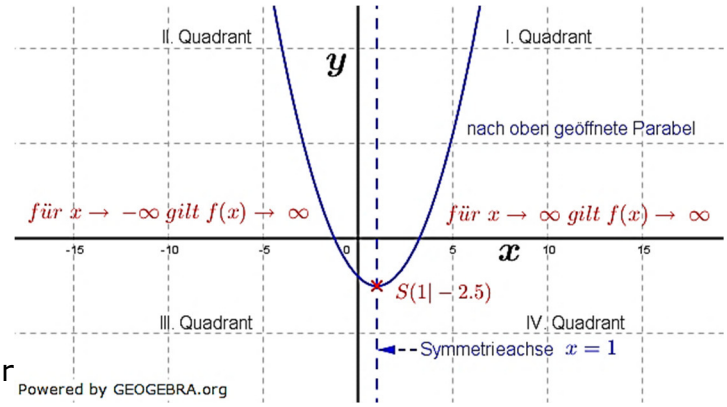
$f(x) = 2x^2 + 8x + 12 \quad | \quad :2$
$\frac{1}{2} f(x) = x^2 + 4x + 6$
$\frac{1}{2} f(x) = (x + 2)^2 - 4 + 6$
$\frac{1}{2} f(x) = (x + 2)^2 + 2 \quad | \quad \cdot 2$

Somit lautet die Scheitelform
$f(x) = 2(x + 2)^2 + 4$
Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(-2|4)$.
Alternativ:
$a = 2;\ b = 8;\ c = 12$
$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2; \quad y_S = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{64}{8} + 12 = 4$
$f(x) = 2(x + 2)^2 + 4; \quad S(-2|4)$.

Symmetrie- und Globalverhalten

Es gibt zwei Arten von Symmetrieverhalten, nämlich die Achsensymmetrie und die Punktsymmetrie. Genaueres hierüber erfährst du um Kapitel „Graphen und Funktionen analysieren".

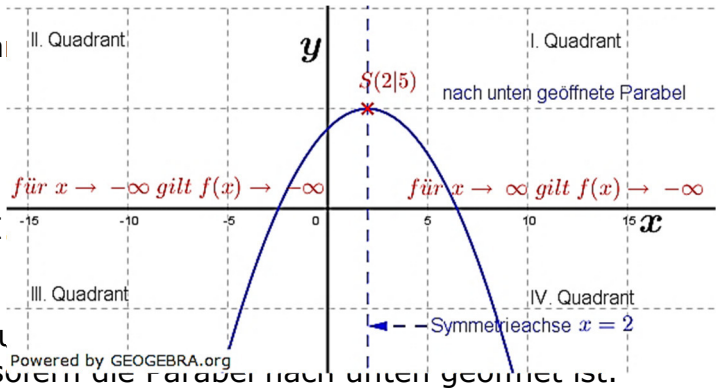
Eine quadratische Funktion ist stets achsensymmetrisch zur Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft.



Beim Globalverhalten will man wissen, wo der Graph einer Funktion herkommt und wo er hinläuft.

Will man wissen, wo der Graph einer Funktion herkommt, muss man den y-Wert der Funktion für den Wert $x = -\infty$ bestimmen.

Will man wissen, wo der Graph einer Funktion hinläuft, muss ma den y-Wert der Funktion für den Wert $x = +\infty$ bestimmen.



Der Graph einer quadratischen Funktion kommt aus dem II. Quadranten und verläuft in den I Quadranten, sofern die Parabel nach oben geöffnet ist.

Der Graph einer quadratischen Fu verläuft in den IV. Quadranten, sofern die Parabel nach unten geöffnet ist.

Beispiel 5: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$. Bestimme die Gleichung der Symmetrieachse und gib das globale Verhalten an.

Lösung 5: Wir stellen zunächst die Funktionsgleichung von f um in die Scheitelpunktgleichung.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \quad | \quad \cdot 2$

$2f(x) = x^2 - 2x - 4$

$2f(x) = (x-1)^2 - 1 - 4$

$2f(x) = (x-1)^2 - 5 \quad | \quad :2$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{2}$

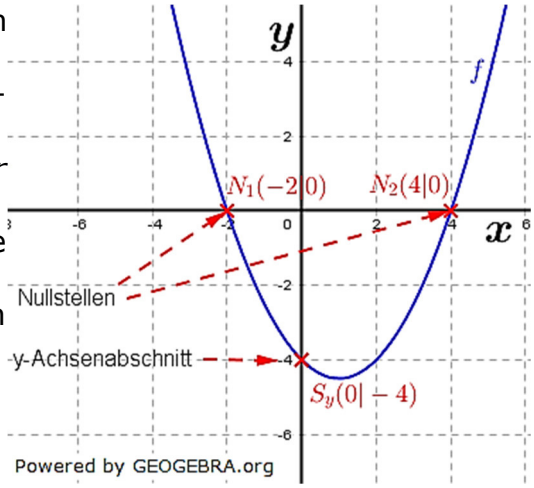
Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S\left(1\middle|-\frac{5}{2}\right)$.

Damit ist $x = 1$ Symmetrieachse von f.

f ist nach oben geöffnet, somit gilt:

Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$; Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen



Es gibt zwei Arten von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.
Die erste Art sind die Schnittpunkte mit der x-Achse, *Nullstellen* genannt.
*Eine **Nullstelle** heißt **Nullstelle**, weil dort der **y-Wert Null** ist.*
Aus dieser Tatsache heraus lassen sich Nullste berechnen, indem man den y-Wert der Funktionsgleichung auf den Wert n setzt und die Gleichung nach x auflöst.
Die zweite Art ist der Schnittpunkt mit der y-Achse, vielfach auch als y-Achsenabschnitt bezeichnet.
*Im **Schnittpunkt** mit der y-Achse ist der **x-Wert Null**.*
Aus dieser Tatsache heraus lässt sich Schnittpunkt mit der y-Achse berechnen, indem man alle Vorkommen von x auf null setzt und y berechnet, also $f(0)$ bildet.

Beispiel 6: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.
Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 6: Nullstellen:
Wir setzen $f(x) = 0$ und lösen die Gleichung nach x auf:
$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \quad | \quad \cdot 2$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 1 + 3 = 4; \quad x_2 = 1 - 3 = -2$
Die Nullstellen haben die Koordinaten $N_1(-2|0)$ und $N_2(4|0)$.
y-Achsenabschnitt:
Wir bilden $f(0)$:
$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - x - 4 = -4$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0|-4)$.

Beispiel 7: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.
Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 7: Nullstellen:
Wir setzen $f(x) = 0$ und lösen die Gleichung nach x auf:
$-\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 0 \quad | \quad \cdot(-4)$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 2$
Die Nullstellen hat die Koordinaten $N_1(2|0)$. Da die quadratische Gleichung nur eine Lösung hat, sprechen wir hier von einer ***doppelten*** Nullstelle.
y-Achsenabschnitt:
Wir bilden $f(0)$:
$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0|-1)$.

Beispiel 8: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 4$.
Bestimme alle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung 8: Nullstellen:
Wir setzen $f(x) = 0$ und lösen die Gleichung nach x auf:

$\frac{1}{8}x^2 - x + 4 \quad | \quad \cdot 8$

$x^2 - 8x + 32 = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 32} \quad | \quad p/q$-Formel

Die Gleichung hat keine Lösung, die Diskriminante ist kleiner null.
Der Graph der Funktion f hat keine Nullstellen.
y-Achsenabschnitt:
Wir bilden $f(0)$:

$f(0) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 - 0 + 4 = 4$

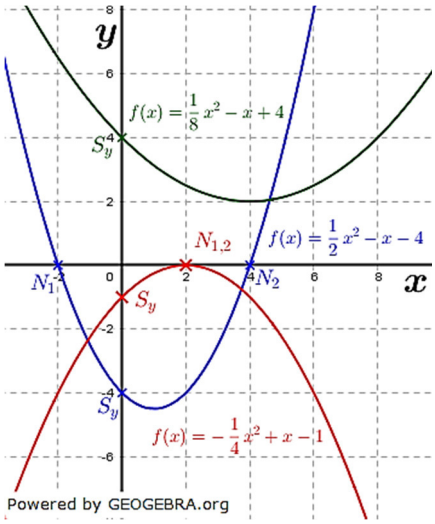
Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $S_y(0|4)$.

Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Die Schnittpunkte einer Funktion f mit der x-Achse heißen Nullstellen.
Wir berechnen Nullstellen, indem wir die Funktionsgleichung $f(x)$ auf null setzen und nach x auflösen.
Hat die auf null gesetzte Funktionsgleichung keine Lösung, so existieren auch keine Nullstellen.

Die Schnittpunkte einer Funktion f mit der y-Achse wird auch als y-Achsenabschnitt bezeichnet.
Wir berechnen den Schnittpunkt mit der y-Achse, indem wir $f(0)$ bilden.



Gegenseitige Lage von Parabeln und Geraden

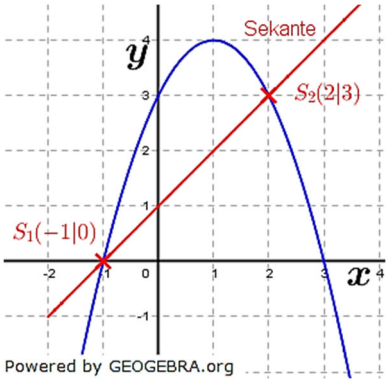
Eine Parabel und eine Gerade können verschiedene Lagen zueinander haben. Zur Untersuchung dieser gegenseitigen Lage prüfen wir, ob es gemeinsame Punkte gibt. Wir erinnern uns an einen Basissatz der Funktionsbetrachtung:

Gemeinsame Punkte von Graphen zweier Funktionen heißen Schnittpunkte.
Schnittpunkte bestimmen wir durch Gleichsetzung der Funktionsgleichungen und Auflösen der dabei entstandenen Gleichung nach der Variablen x.

Die folgenden drei Beispiele veranschaulichen die Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von Parabeln und Geraden.

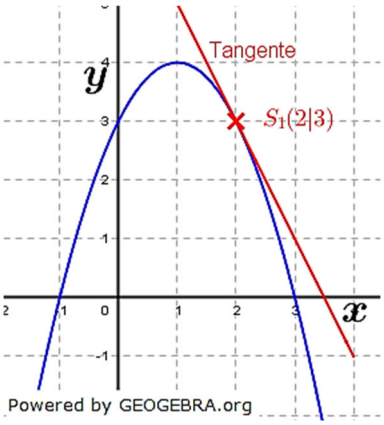
Beispiel 9: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sowie die Gerade g mit $g(x) = x + 1$.
Prüfe die gegenseitige Lage von f und g.

Lösung 9: Gleichsetzung:
$f \cap g$:
$-x^2 + 2x + 3 = x + 1 \quad | \quad -x;\ -1$
$-x^2 + x + 2 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 - x - 2 = 0$
$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 2;\quad x_2 = -1$
$g(2) = 3;\quad g(-1) = 0$
Die Gerade g schneidet die Parabel f zweimal in $S_1(-1|0)$ und $S_2(2|3)$.



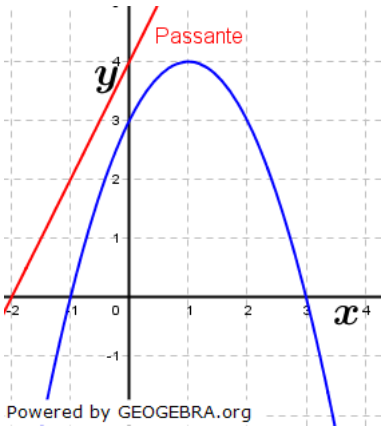
Beispiel 10: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sowie die Gerade g mit $g(x) = -2x + 7$.
Prüfe die gegenseitige Lage von f und g.

Lösung 10: Gleichsetzung:
$f \cap g$:
$-x^2 + 2x + 3 = -2x + 7 \quad | \quad +2x;\ -7$
$-x^2 + 4x - 4 = 0 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_1 = 2$
$g(2) = 1$
Die Gerade g berührt die Parabel f in $S_1(2|1)$.



Beispiel 11: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sowie die Gerade g mit $g(x) = x2 + 4$.
Prüfe die gegenseitige Lage von f und g.

Lösung 11: Gleichsetzung:
$f \cap g$:
$-x^2 + 2x + 3 = 2x + 4 \quad | \quad -2x;\ -3$
$-x^2 = 1 \quad | \quad \cdot(-1)$
$x^2 = -1 \quad | \quad \sqrt{\ }$
$\sqrt{\ }$ aus negativem Wert nicht möglich.
Die Gerade g hat keine gemeinsamen Punkte mit f. g passiert f.



Die Lösungsergebnisse führen uns zu folgendem

Merksatz Lage von Gerade und Parabel

Schneidet eine Gerade eine Parabel in zwei verschiedenen Punkten, so heißt diese Gerade ***Sekante***; die beiden Punkte nennen wir ***Schnittpunkte***.

Berührt eine Gerade eine Parabel in einem Punkt, so heißt diese Gerade ***Tangente***, den gemeinsamen Punkt nennen wir ***Berührpunkt***.

Haben eine Gerade und eine Parabel keinen gemeinsamen Punkte, so heißt diese Gerade ***Passante***.

Aufstellen von quadratischen Funktionstermen

Durch welche Parabel kann der Verlauf des Brückenbogens der Yangtze River Brücke (China) näherungsweise beschrieben werden?

In vielen Fällen ist der Term einer quadratischen Funktion nicht von vornherein bekannt. Ausgehend von bestimmten Eigenschaften eines parabelförmigen Gebildes, können wir jedoch einen solchen Term bestimmen.
Im obigen Bild z. B. wäre der höchste Punkt des Brückenbogens von Interesse, denn den könnten wir zum Scheitelpunkt einer Parabel erklären. Weiterhin könnten wir die linke und rechte Verankerung des Bogens am Ufer als Nullstellen einer Parabel in einem geeigneten Koordinatensystem ansehen. Alleine aus diesen beiden Eigenschaften ließe sich dann ein quadratischer Funktionsterm aufstellen.

Ein quadratischer Funktionsterm lässt sich wie folgt darstellen:

Hauptform:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Parameter: a, b, c
Produktform:	$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$	Parameter: a, x_1, x_2
Scheitelform:	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$	Parameter: a, x_S, y_S

Alle drei Darstellungsformen enthalten jeweils drei Parameter. Um einen Funktionsterm aufzustellen, müssen diese drei Parameter aus bekannten Eigenschaften bestimmt werden.

Wollen wir nun einen Funktionsterm bestimmen, so kommt es darauf an, was gegeben ist. Ist der Scheitel bekannt, wird man den Funktionsterm in der Scheitelform ansetzen. Sind zwei Nullstellen bekannt, wählen wir die Produktform. Die Hauptform hat drei Unbekannte a, b, und c, dazu benötigen wir drei bekannte Punkte, die auf der Parabel liegen.
Die genaue Vorgehensweise kannst du in den nächsten vier Beispielen sehen.

Beispiel 12: Bestimme den Funktionsterm einer quadratischen Funktion, wenn der Graph…

a) …achsensymmetrisch zur y-Achse ist und durch die Punkte $P(1|-2)$ und $Q(2|1)$ geht.

b) …die y-Achse in $S(0|1)$ schneidet und durch die Punkte $P(2|-1)$ und $Q(-1|-4)$ geht.

c) …eine verschobene, an der x-Achse gespiegelte Normalparabel ist, die durch die Punkte $P(1|0)$ und $Q(-2|3)$ geht.

Lösung 12: Diese Aufgaben sind vom Typ „Funktionsterm mit zwei bekannten Punkten und besonderen Eigenschaften".

a) Eine zur y-Achse achsensymmetrische Parabel ist in x-Richtung nicht verschoben, damit erhalten wir den Funktionsansatz:

$f(x) = ax^2 + c$

(1)	$-2 = a \cdot 1^2 + c$	|	Punktprobe mit $P(1\|-2)$
(2)	$1 = a \cdot 2^2 + c$	|	Punktprobe mit $Q(2\|1)$
(1)-(2)	$-3 = -3a$	|	$:-3$
	$a = 1$		
$a \to (1)$	$-1 = 1 + c$	|	-1
	$c = -2$		
	$f(x) = x^2 - 2$		

b) Parabel durch drei bekannte Punkte, damit erhalten wir den Funktionsansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Aus dem Punkt $S(0|1)$ heraus ergibt sich $c = 1$.

(1)	$-1 = a \cdot 2^2 + 2b + 1$	|	Punktprobe mit $P(2\|-1)$
(2)	$4 = a \cdot (-1)^2 - b + 1$	|	Punktprobe mit $Q(-1\|4)$
(1)	$-1 = a \cdot 2^2 + 2b + 1$	|	-1
(2)	$4 = a \cdot (-1)^2 - b + 1$	|	$-1;\ \cdot 2$
(1)	$4a + 2b = -2$		
(2)	$2a - 2b = 6$		
(1)+(2)	$6a = 4$	|	$:6$
	$a = \frac{2}{3}$		
$a \to (1)$	$4 \cdot \frac{2}{3} + 2b = -2$	|	$-\frac{8}{3}$
	$2b = -\frac{14}{3}$	|	$:2$
	$b = -\frac{7}{3}$		
	$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$		

c) Eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel hat den Parameterwert $a = -1$. Zwei weitere Punkte sind bekannt, damit erhalten wir den Funktionsansatz:

$f(x) = -x^2 + bx + c$

(1)	$0 = -1 \cdot 1^2 + b + c$	|	Punktprobe mit $P(1\|0)$
(2)	$3 = -1 \cdot (-2)^2 - 2b + c$	|	Punktprobe mit $Q(-2\|3)$
(1)	$0 = -1 + b + c$	|	-1
(2)	$3 = -4 - 2b + c$	|	$+4$
(1)	$b + c = 1$		
(2)	$-2b + c = 7$		

(1)-(2)	$3b = -6$	|	$:3$
	$b = -2$		
$b \to (1)$	$-2 + c = 1$	|	$+2$
	$c = 3$		
	$f(x) = -x^2 - 2x + 3$		

Beispiel 13: Der Graph einer quadratischen Funktion geht durch $P(1|-2)$. Er schneidet die x-Achse in den Punkten $N_1(-1|0)$ und $N_2(3|0)$. Bestimme den Funktionsterm in der Hauptform.

Lösung 13: Diese Aufgabe ist vom Typ „Funktionsterm mit zwei bekannten Nullstellen und einem weiteren bekannten Punkt". Damit erhalten wir den Ansatz:
$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
mit x_1 und x_2 als den beiden Nullstellen.
$f(x) = a(x + 1) \cdot (x - 3)$
$-2 = a(1 + 1) \cdot (1 - 3)$ | Punktprobe mit $P(1|-2)$
$-2 = a \cdot 1 \cdot (-2)$
$-2 = -2a \quad => \quad a = 1$
$f(x) = 1 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$ | Produktform
$f(x) = x^2 - 2x - 3$ | Hauptform

Beispiel 14: Eine quadratische Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ den kleinsten Funktionswert -2. Bei $x = 3$ hat sie den Funktionswert -1. Gib den Funktionsterm in der Hauptform an.

Lösung 14: Diese Aufgabe ist vom Typ „Funktionsterm mit Scheitel und weiterem Punkt". Damit erhalten wir den Ansatz:
$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$
mit x_S und y_S als Koordinaten des Scheitels.
$f(x) = a \cdot (x - 1)^2 - 2$
$-1 = a \cdot (3 - 1)^2 - 2$ | Punktprobe mit $P(3|-1)$
$-1 = 4a - 2$ | $+2$
$1 = 4a \quad => \quad a = \frac{1}{4}$
$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 1)^2 - 2$ | Scheitelform
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ | Hauptform

Beispiel 15: Der kleinste Funktionswert einer quadratische Funktion f ist -2. Ihre Nullstellen sind bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Bestimme den Funktionsterm in der Hauptform.

Lösung 15: Diese Aufgabe ist vom Typ „Funktionsterm mit Nullstellen und kleinstem Funktionswert". Aus Symmetriegründen liegt der kleinste Funktionswert ja genau in der Mitte der beiden Nullstellen. Somit haben wir den Scheitelpunkt $S(1|-2)$.
Die Aufstellung des Funktionsterms kann somit wie in Beispiel 13 erfolgen, alternativ über die Produktform gemäß Beispiel 12.
Scheitelform:
$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$
mit x_S und y_S als Koordinaten des Scheitels.
$f(x) = a \cdot (x - 1)^2 - 2$

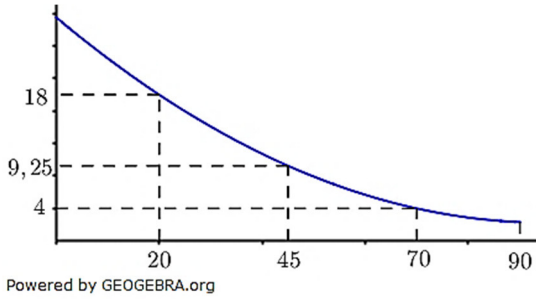
$0 = a \cdot (-1-1)^2 - 2$ | Punktprobe mit $N_1(-1|0)$
$0 = 4a - 2$ | $+2$
$2 = 4a \quad => \quad a = \frac{1}{2}$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - 2$ | Scheitelform
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ | Hauptform

Quadratische Funktionen der Anwendungsorientierung

Viele Realsituationen unserer Umwelt lassen sich durch Parabelfunktionen beschreiben. Mit ihrer Hilfe kann man z. Bsp. den Verlauf eines Brückenbogens beschreiben. Eine große Anzahl von Naturgesetzen kann durch Parabelfunktionen dargestellt werden, wie zum Beispiel die Strecke im freien Fall, der Weg einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung, die kinetische Energie eines bewegten Körpers, der Energieinhalt eines Kondensators usw.

Die nachfolgenden zwei Beispiele zeigen uns Situationen im Realleben.

Beispiel 16: Wir betrachten eine Skisprungschanze. Die nebenstehende Abbildung zeigt deren Querschnitt in m. Die Form der Anlaufspur ähnelt in ihrer Form einer quadratischen Funktion, einer Parabel. Uns ist bewusst, dass dies nur eine Annäherung sein kann. Dennoch wollen wir versuchen, einen Funktionsterm aufzustellen, der die Realität so nah als möglich trifft.



Lösung 16: Für die Bestimmung einer quadratischen Funktion benötigen wir maximal drei Punkte, siehe auch Aufgabe 11b) im Kapitel „Aufstellen von quadratischen Funktionstermen". Wir legen den Koordinatenursprung nach unten links bei 0 Meter Höhe und 0 Meter Abstand. Dadurch können wir drei Koordinatenpunkte definieren mit $P_1(20|18)$, $P_2(45|9{,}25)$ und $P_3(70|4)$. Damit erhalten wir den Funktionsansatz:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

(1) $18 = 400a + 20b + c$ | Punktprobe mit $P_1(20|18)$
(2) $9{,}25 = 2025a + 45b + c$ | Punktprobe mit $P_2(45|9{,}25)$
(3) $4 = 4900a + 70b + c$ | Punktprobe mit $P_3(70|4)$

(1) umstellen nach c:
$18 - 400a - 20b = c$

$c \rightarrow (2); (3)$
(2) $9{,}25 = 2025a + 45b + 18 - 400a - 20b$
(3) $4 = 4900a + 70b + 18 - 400a - 20b$
(2) $9{,}25 = 1625a + 25b + 18$ | -18
(3) $4 = 4500a + 50b + 18$ | -18
(2) $1625a + 25b = -8{,}75$
(3) $4500a + 50b = -14$

(2) umstellen nach $25b$:

$$25b = -1625a - 8{,}75$$

$25b \rightarrow (3)$

(3) $$4500a + 2 \cdot (-1625a - 8{,}75) = -14$$
$$4500a - 3250a - 17{,}5 = -14$$
$$1250a = 3{,}5$$
$$a = 0{,}0028$$

$a \rightarrow (2)$ $$25b = -1625 \cdot 0{,}0028 - 8{,}75 = -13{,}3$$
$$b = -0{,}532$$

$a; b \rightarrow (1)$ $$c = 18 - 400 \cdot 0{,}0028 - 20 \cdot (-0{,}532) = 27{,}52$$

Die Funktion f, die den Verlauf der Skisprungschanze beschreibt hat die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}0028x^2 - 0{,}532x + 27{,}52$.

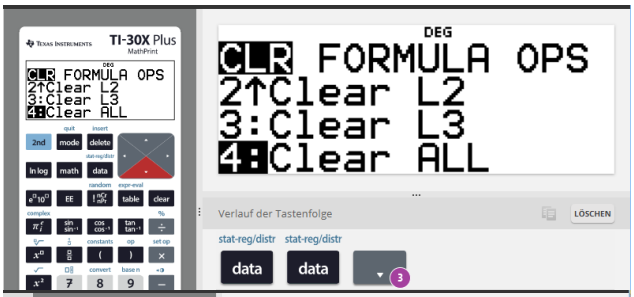
Beispiel 17: Die Gesamtkosten eines Betriebes in € können in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x der folgenden Tabelle entnommen werden.

x	20	50	100
$K(x)$	212	237,5	300

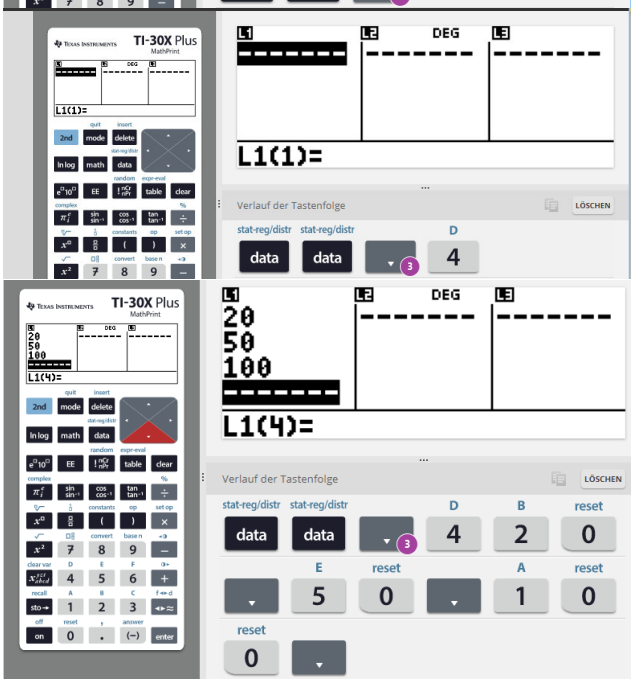
Bestimme die Kostenfunktion K unter der Annahme, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt, über eine Regression.

Lösung 17: Regression bedeutet Bestimmung mittels GR/WTR.
Die nachfolgenden Grafiken zeigen die erforderlichen Schritte auf einem TI-30X Plus Multiview.

Lösche zunächst alle L-Speicher, indem du zweimal die Taste „DATA" drückst und dann mit der Pfeiltaste nach unten auf die „4: Clear All" gehst. Drücke dann auf die „4" und du erhältst nebenstehende Anzeige.



Unter „L1" gibst du jetzt die Werte der ersten Tabellenzeile ein.
Nachdem du eine Zahl eingegebene hast, betätige die „Pfeil nach unten"-Taste zur Eingabe der nächsten Zahl.



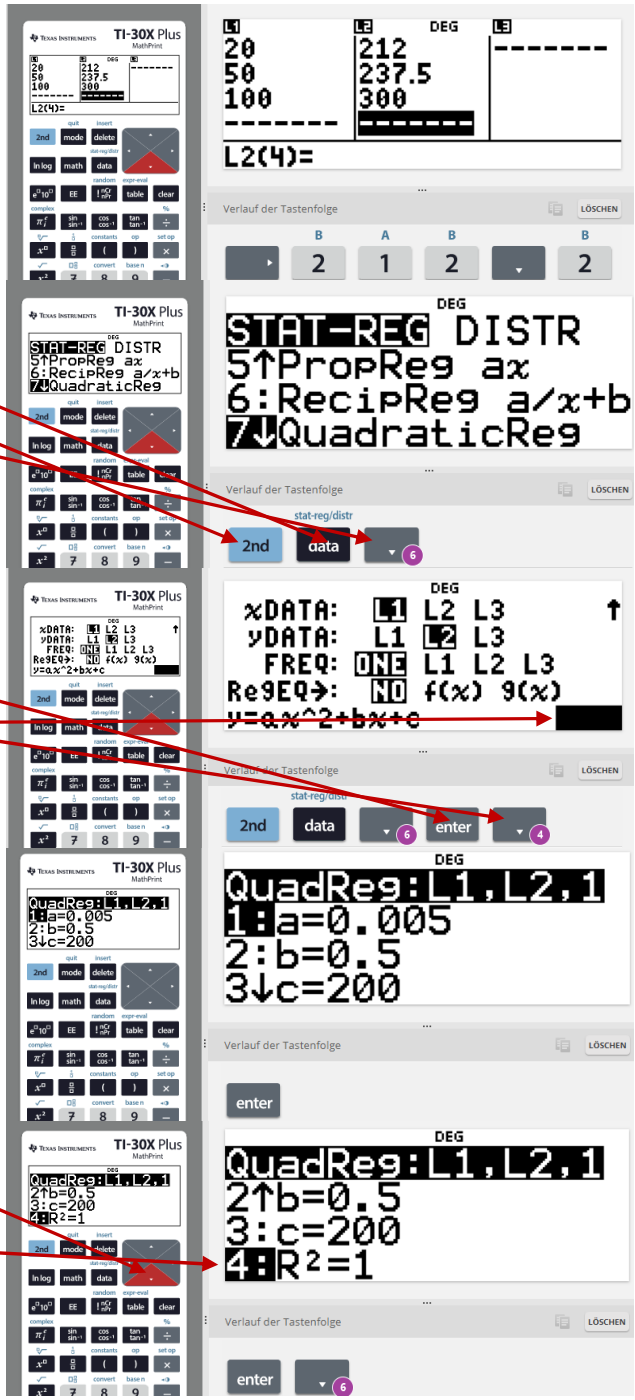
Ist der L1-Speicher eingegeben, betätige die „Pfeil nach rechts"-Taste, und due gelangst zur Eingabe der zweiten Tabellenzeile.

Sind alle Werte eingegeben, so drücke die „2nd"-Taste und danach auf „data". Positioniere dich dann mit der „Pfeil nach unten" Taste auf die „7: QuadraticReg".

Drücke danach die „Enter"-Taste und betätige die „Pfeil nach unten"-Taste solange, bis der Cursor auf „Calc" blinkt.

Nun noch einmal die „Enter"-Taste drücken und schon siehst du das Ergebnis mit:
$a = 0{,}05;\ \ b = 0{,}5$ und $c = 200$.

Betätige noch ein paarmal die „Pfeil nach unten"-Taste, bis du „4: R²" siehst. Je näher dieser Wert an „1" ist, umso genauer ist die Regression. In diesem Falle ist sie sogar ganz genau.



Die Kostenfunktion lautet:
$K(x) = 0{,}05x^2 + 0{,}5x + 200$

Quadratische Funktionen mit Parameter

Bei Funktionen, deren Funktionsterm einen Parameter enthält – also eine zusätzliche Variable zu x - heißen Funktionen mit Parameter. Je nach Wert dieses Parameters – der Mathematiker bezeichnet diesen Parameter üblicherweise mit t - ändert sich der globale Verlauf des Graphen der Funktion in der Regel nicht, wohl aber ganz bestimmte Funktionswerte. Ein ganzrationaler Funktionsterm 2. Ordnung mit Parameter stellt eine *Parabelschar* dar.
Die folgenden Beispiele stellen nur einen kleinen Einblick in die Funktionen mit Parameter dar. Weitere Aufgaben und Erläuterungen findest du in den Aufgabenblättern Level 3 / Expert.

Beispiel 18: Gegeben ist die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = tx^2 - 3tx; x; t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. K_t ist das Schaubild von f_t. Beschreibe den Verlauf von K_t in Abhängigkeit von t.

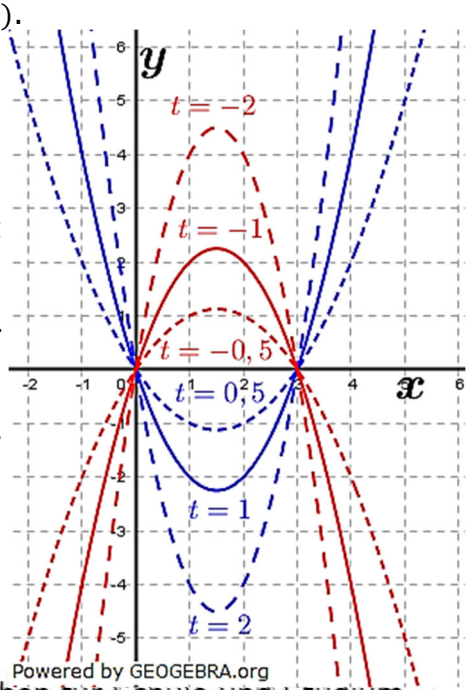
Lösungslogik 18

Wir überlegen zunächst. Der Parameter t ist eine reelle Zahl. Je nach Wahl des Wertes von t ist es möglich, viele Parabeln zu beschreiben. Für jedes gewählte t erhalten wir einen anderen Funktionsterm. Der Parameter t beeinflusst im Ursprungsterm den Koeffizienten von x^2. Wir wissen jedoch, dass der Koeffizient von x^2 eine Streckung der Parabel in y-Richtung als auch die Öffnungsrichtung (nach oben geöffnet, nach unten geöffnet) beeinflusst.
Wir wissen weiterhin, dass der Koeffizient von x die Verschiebung einer Parabel in x–Richtung beeinflusst. Weiterhin muss die Parabelschar ihren Schnittpunkt mit der y–Achse im Ursprung haben, denn das absolute Glied c fehlt. Sind also noch die Nullstellen der Parabelschar von Interesse. Hierzu bilden wir aus $f_t(x) = tx^2 - 3tx$ durch Ausklammern $f_t(x) = tx(x-3)$. Wir erkennen, dass die Parabelschar in x-Richtung um 3 Stellen nach rechts verschoben ist und dass über den Satz vom Nullprodukt die Nullstellen bei $tx = 0$ und $x - 3 = 0$ liegen.
Da gemäß Aufgabe $t \neq 0$ ist, liegen die Nullstellen jeder Parabel der Parabelschar somit bei $N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$.

Lösung 18: Nullstellen:
$f_t(x) = tx^2 - 3tx = tx(x-3)$
$tx(x-3) = 0$
$x_1 = 0; \quad x_2 = 3$ | Satz vom Nullprodukt
Die Parabelschar hat bei $N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$ gemeinsame Nullstellen und ist achsen-symmetrisch zur Achse $x = 3$.

Die Parabeln sind nach oben geöffnet für $t > 0$.

Die Parabeln sind nach unten geöffnet für $t < 0$.



Beispiel 19: Gegeben ist für jedes reelle die Funktionsschar f_t mit $f_t(x) = -x^2 + 2tx - t^2 - t;\ x \in \mathbb{R}$. K_t ist das Schaubild von f_t.
Beschreibe den Verlauf von K_t in Abhängigkeit von f_t.

Lösungslogik 19:

Wir erkennen aus der gegebenen Funktion f_t:

1. Alle Parabeln der Parabelschar sind nach unten geöffnete Normalparabeln (der Koeffizient von x^2 ist konstant mit -1).
2. Die Parabelschar ist in x-Richtung in Abhängigkeit von t verschoben (es existiert ein x–Glied mit dem Koeffizienten $2t$).
3. Die einzelnen Parabeln schneiden die y–Achse in Abhängigkeit von t (das absolute Glied lautet $-t^2 - t$).

Da in dieser Aufgabe lediglich die Verschiebung in x–Richtung und der Schnittpunkt mit der y–Achse durch den Parameter t beeinflusst wird, bilden wir zunächst die Scheitelpunktgleichung.

$$f_t(x) = -((x-t)^2 - t^2) - t^2 - t$$
$$f_t(x) = -(x-t)^2 + t^2 - t^2 - t$$
$$f_t(x) = -(x-t)^2 - t$$

Jetzt erkennen wir, dass lediglich die Scheitelpunkte der Parabelschar vom Parameter t abhängig sind. Die Koordinaten der Scheitelpunkte lauten $S_t(t|-t)$. Wenn aber eine Punkteschar S_t vorliegt, deren x–Koordinate und y-Koordinate einen lediglich durch das Minuszeichen veränderten Wert darstellen, so muss diese Punkteschar auf einer Geraden mit der Steigung $m = -1$ liegen.

Lösung 19: Scheitelpunktgleichung:

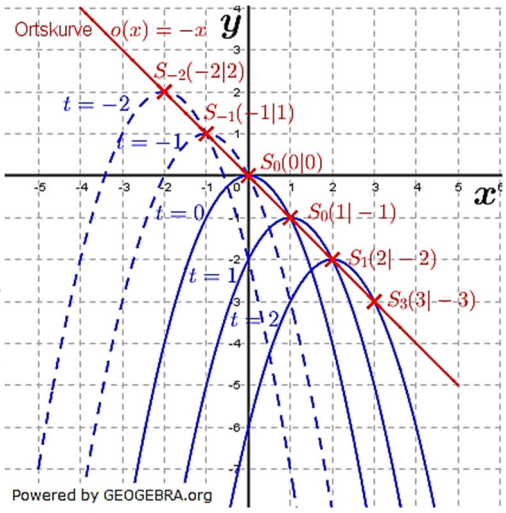
$f_t(x) = -(x-t)^2 - t$

$x_S = t;\quad y_S = -t;\quad S_t(t|-t)$

$t = x_s$

Für Ortskurve der Scheitelpunkte:

$t \to y_s$

$o(x) = -x$

Die Parabelschar besteht aus nach unten geöffneten Normalparabeln deren Scheitelpunkte auf der Geraden mit der Gleichung $o(x) = -x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ liegen. Die Parabelschar hat keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse.