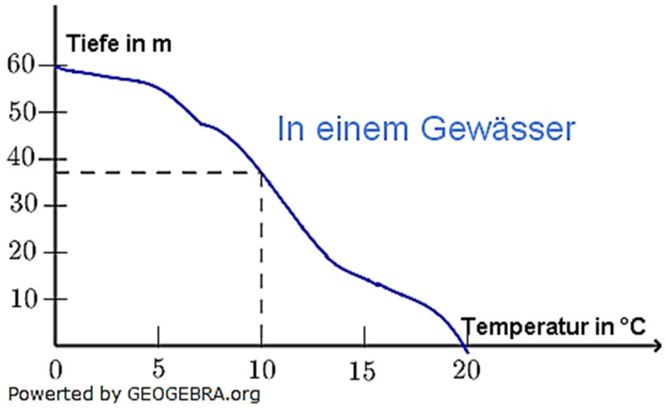
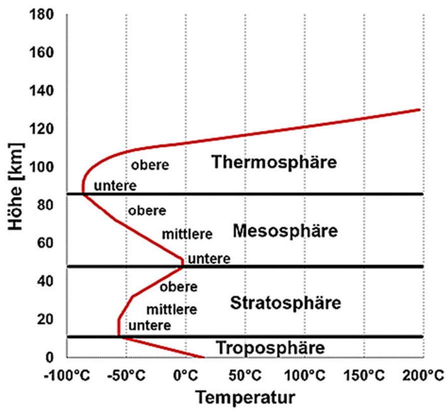
Der Begriff „Funktion“

Um uns klar zu machen, was eine **Funktion** (lateinisch *functio*) ist, betrachten wir uns die Gegenüberstellung nachfolgender Situationen.

Die Temperatur eines Gewässers wird in verschiedenen Tiefen gemessen. Ebenso die Temperatur der Atmosphäre in verschiedenen Höhen. In den nachfolgenden Grafiken sind die diesbezüglichen Messwerte der Temperaturen in Abhängigkeit der Tiefe (Gewässer) bzw. Höhe (Atmosphäre) eingetragen.





Aus der gemessenen Temperatur zwischen $0°\,C$ und $20°\,C$ lässt sich die Tiefe des Gewässers an jeder Stelle eindeutig angeben. So gehört beispielsweise in obiger Grafik zur Temperatur $10°\,C$ die Gewässertiefe etwa $38\,m$.
Die Zuordnung Temperatur $\mapsto$Tiefe (des Gewässers) ist eindeutig und daher eine Funktion.

Aus der Temperatur können wir die zugehörige Höhe in der Atmosphäre nicht ermitteln. Wir entnehmen obiger Grafik, dass z.B. die Temperatur -50 °C in der oberen Troposphäre (etwa 10 km), in der mittlerem Stratosphäre (etwa 30 km), zwischen mittlerer und oberer Mesosphäre (etwa 70 km) und in der oberen Thermosphäre (etwa 110 km) auftritt.
Die Zuordnung Temperatur $\mapsto$ Höhe (in der Atmosphäre) ist nicht eindeutig und daher keine Funktion.

Diese Erkenntnis führt uns zu folgendem

Merksatz Begriff der Funktion

*Eine **Funktion** f ordnet jedem x-Wert genau einen und **nur** einen y-Wert zu.*

*Sie wird meistens angegeben durch einen **Funktionsterm** $f(x)$ und die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ für die zulässigen x-Werte.*
*Die Menge aller möglichen y-Werte bezeichnen wir mit **Wertemenge** von f und bezeichnen diese mit $\mathbb{W}$.*

Darstellungsformen

Nachdem wir nun festgelegt haben, was eine Funktion überhaupt ist, müssen wir uns über die Darstellungsformen unterhalten. Hierzu kennt der Mathematiker vier Arten. Eine dieser Arten haben wir bereits in der Mittelstufe kennengelernt, nämlich die Wertetabelle.

Wertetabelle

Einer Reihe von x-Werten wird in einer Tabelle deren zugehörigen y-Werte zugeordnet, wie nachfolgendes Beispiel zeigt.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	0,9	0,75	0,74	1	2	4	9

Dann gibt es als nächste Bezeichnungsform die Funktionsvorschrift

Funktionsvorschrift

$f\colon x \;\longmapsto\; 3x^2+5$

(Sprich der Funktionsname f bildet das Element x auf den Funktionsterm $3x^2+5$ ab)

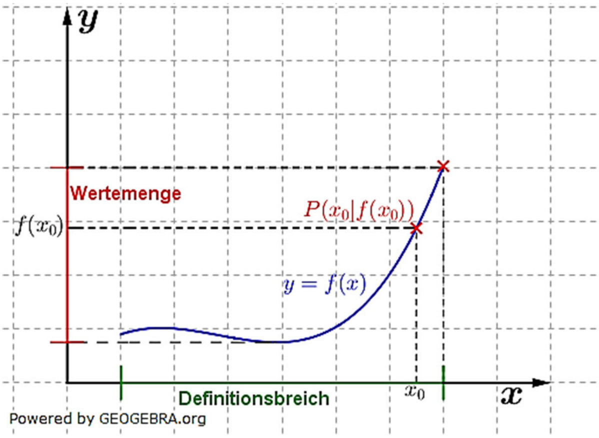
Als weitere Bezeichnungsform ist die Funktionsgleichung zu nennen.

Funktionsgleichung

$f(x) = 3x^2+5$

(Sprich der Funktionswert $f(x)=y$ errechnet sich aus dem Funktionsterm $3x^2+5$)

Und als bekannteste (vierte) und wohl auch einsichtigste Darstellungsform ist der Graph einer Funktion zu nennen.



Graph von f

Der ***Graph von f*** besteht aus allen Punkten $P(x|y)$, deren Koordinaten die Gleichung $y=f(x)$ erfüllen (Punktprobe).

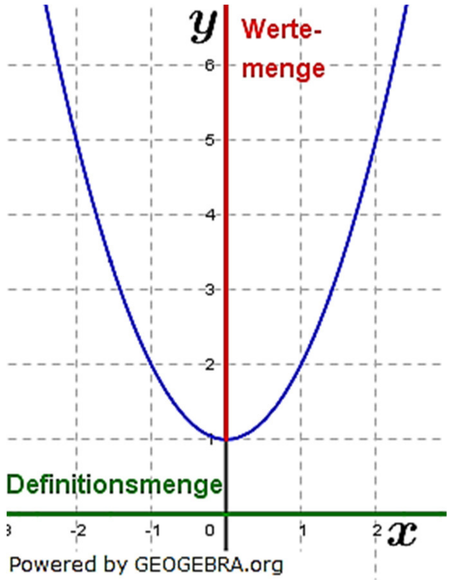
Die Menge aller möglichen y-Werte heißt ***Wertemenge*** von f und wird mit $\mathbb{W}$ bezeichnet.

Die Menge aller möglichen x-Werte heißt ***Definitionsmenge*** von f und wird mit $\mathbb{D}$ bezeichnet.

Beispiele

Beispiel 1
Definitionsmenge und Wertemenge
Bestimme die Definitions- und Wertemenge der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$.

Lösung 1
Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, die Definitionsmenge ist also $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Wie wir dem Graphen entnehmen können, ist $f(0) = 1$ der kleinste Funktionswert von f und $\mathbb{W} = [y|y \geq 1] = [1; \infty[$ die Wertemenge von f.



Beispiel 2
Bezeichnungen und Symbole
Formuliere mithilfe mathematischer Symbole
in Worten
a) Der Funktionswert von f an der Stelle 5 ist 7.
b) Die Funktion g ordnet einer Zahl das Doppelte zu.
c) Die Definitionsmenge von h besteht aus allen positiven Zahlen.
d) g und h haben an der Stelle -1 verschiedene Werte.
e) An der Stelle a ist der Funktionswert von f kleiner als der Funktionswert von g.

Lösung 2
in mathematischen Symbolen
a) $f(5) = 7$
b) $g\colon x \mapsto 2x$ bzw. $g(x) = 2x$
c) $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}_+^*$ bzw. $\mathbb{D}_h =]0; \infty[$
d) $g(-1) \neq h(-1)$
e) $f(a) < g(a)$

Beispiel 3
Wertetabelle, Graph, Definitionsmenge, Wertemenge
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+1}$.
a) Bestimme die maximale Definitionsmenge von f.
b) Berechne den Funktionswert an der Stelle $x_1 = -0{,}5$.
c) Zeichne den Graphen von f mithilfe einer Wertetabelle im Intervall $[-3; 4]$. Runde die x-Werte auf eine Nachkommastelle.
d) Gib die Wertmenge von f an.

Lösung 3

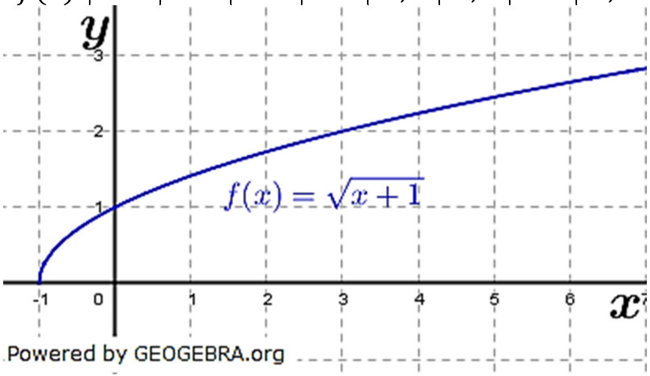
a) Der Wert unter der Wurzel darf nicht kleiner als Null werden, also $\mathbb{D} = [-1; \infty[$

b) $f(-0{,}5) = \sqrt{-0{,}5 + 1} = \sqrt{0{,}5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

c) Graph siehe nebenstehend.

d) Die Wertemenge besteht aus allen nicht negativen Zahlen. Es ist also $\mathbb{W} = \mathbb{R}_+$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–	–	0	1	1,4	1,7	2	2,2



Funktionsklassen im Einzelnen

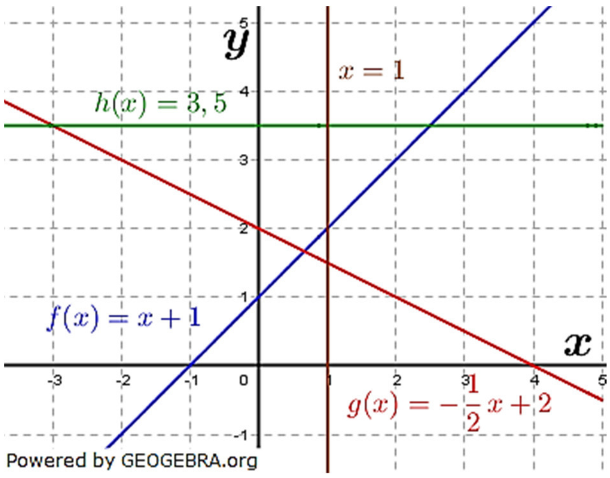
Betrachten wir uns nun die einzelnen Funktionsklassen.

1. Lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind Geraden. Aus früheren Klassenstufen kennen wir schon deren allgemeine Form mit $y = mx + c$. Der Graph linearer Funktionen ist eine Gerade.

In der seitlichen Abbildung erkennen wir Geraden mit positiver Steigung, mit negativer Steigung und mit der Steigung gleich Null. Geraden mit der Steigung Null verlaufen parallel zur x-Achse.

Eine Sonderform nimmt die Gleichung einer parallelen Geraden zur y-Achse ein. Diese lautet $x = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, c gibt dabei den Abstand der Geraden zur y-Achse an.

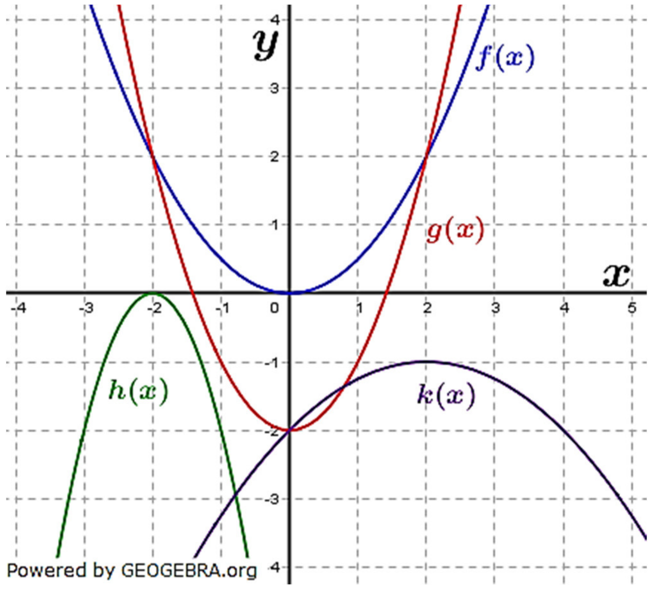


Aus den zuvor aufgeführten Bedingungen ergibt sich für die x-Achse selbst die Funktionsgleichung $y = 0$ und für die y-Achse die Gleichung $x = 0$.

(Beachte zum zuletzt Gesagten: wir sprechen bei $x = c$ nicht von einer Funktionsgleichung, da $x = c$ keine Funktion ist, denn hier wird ja einem einzelnen Wert $x = c$ eine unendliche Anzahl von y-Werten zugeordnet.)

2. Quadratische Funktionen (Parabeln)

Quadratische Funktionen sind Kurven. Aus früheren Klassenstufen kennen wir schon deren allgemeine Form mit $y = ax^2 + bx + c$. Der Graph quadratischer Funktionen heißt Parabel.



In der seitlichen Abbildung erkennen wir Parabeln die nach oben geöffnet sind ($f(x)$ und $g(x)$) und solche, die nach unten geöffnet sind ($h(x)$ und $k(x)$). Außerdem erkennen wir schmäler geöffnete ($h(x)$) als auch breiter geöffnete Parabeln ($k(x)$). Dieses Verhalten wird durch den Parameter a von x^2 verursacht.

Wir erkennen in y-Richtung verschobene Parabeln ($g(x)$ und $k(x)$). Dieses Verhalten wird durch den Parameter c verursacht.

Wir erkennen in x-Richtung verschobene Parabeln ($h(x)$ und $k(x)$). Dieses Verhalten wird durch den Parameter b von x verursacht.