Aufgabenblatt
Vom Differenzenquotienten zur Ableitung

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Berechne wie im Beispiel mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung im Punkt $x_0 = 3$.

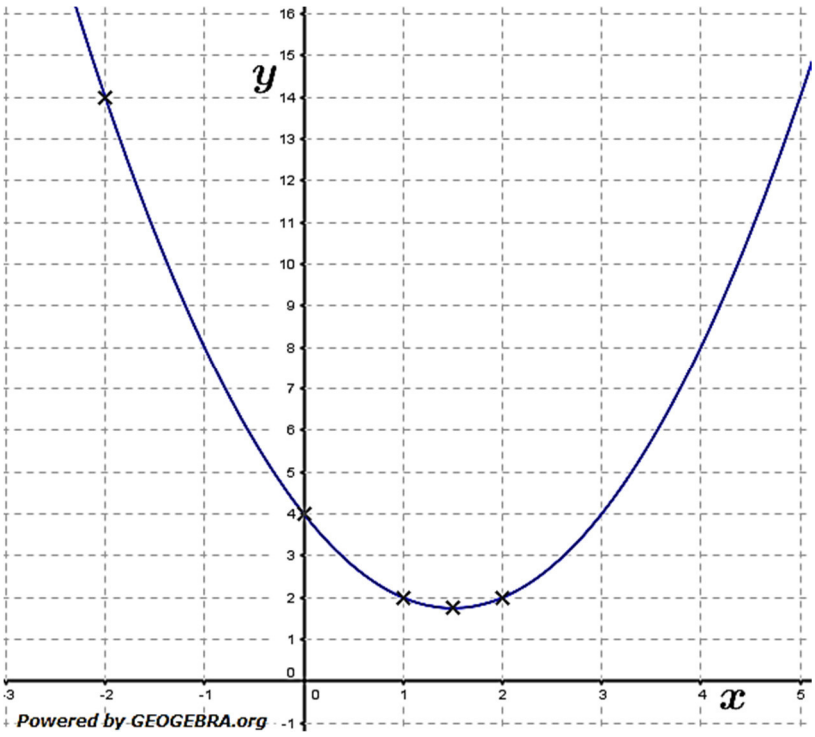
Beispiel	Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen
$f(x) = x^2$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{h(h+6)}{h}$ $= h + 6$ $\frac{dy}{dx} = f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} h + 6 = 6$

a) $g(x) = 3x$ b) $h(x) = 3x^2$ c) $i(x) = x^2 - x$ d) $j(x) = x^3$
e) $k(x) = x^2 + 5$ f) $l(x) = x^3 + 1$ g) $m(x) = -2x^2$ h) $n(x) = -x^4$

Aufgabe A2

Berechne für die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 + x$ mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung der Tangente und des Graphen von f an den Stellen x_0. Bestimme auch die Gleichung der Tangente und zeichne sie in die Grafik ein.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 1{,}5$
d) $x_0 = 2$
e) $x_0 = -2$



Aufgabe A3

Ulrike fährt mit ihrer Mutter Schlitten. Die zurückgelegte Strecke (in Metern) beim Anfahren kann mit der Funktion $s_1(t) = t^2 + t$ annähernd beschrieben werden.

a) Ulrike holt nach 4 Sekunden ihre Mutter ein, die vorausgefahren war. Wie schnell ist sie in dem Moment, in dem sie an ihr vorbeifährt?
Berechne die Geschwindigkeit v_1 mithilfe des Differenzenquotienten.

Nachdem sie 5 Sekunden gefahren ist, erreicht sie das Ende der Abfahrt und Ulrikes Schlitten wird immer langsamer. Der zurückgelegte Weg kann von diesem Moment an durch die Funktion $s_2(t) = 11t - t^2$ beschrieben werden.

b) Wie schnell ist sie nach weiteren 5 Sekunden? Berechne die Geschwindigkeit v_2 wieder mithilfe des Differenzenquotienten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$g(x) = 3x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{3\cdot(3+h)-3}{h} = \frac{9+3h-9}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = g'(3) = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

b) $h'(3) = 18$ c) $i'(3) = 5$

Detaillierte Lösung für d)

$j(x) = x^3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{j(x_0+h)-j(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(3+h)^3-27}{h} = \frac{(3+h)^2\cdot(3+h)-27}{h}$$

$$= \frac{(9+6h+h^2)\cdot(3+h)-27}{h} = \frac{27+27h+9h^2+h^3-27}{h} = \frac{h^3+9h^2+27h}{h} = \frac{h(h^2+9h+27)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = j'(3) = \lim_{h\to 0} h^2+9h+27 = 27$$

e) $k'(3) = 6$ f) $l'(3) = 27$ g) $m'(3) = -12$ h) $n'(3) = -101$

Lösung A2

a) $f(x) = (x-2)^2 + x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(0+h-2)^2+0+h-((0-2)^2+0)}{h} = \frac{h^2-3h+4-4}{h} = \frac{h(h-3)}{h} = h-3$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h-3 = -3$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(0|4)$ die Steigung $m_t = -3$.

$t_0(x) = -3x+4$

b) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h-2)^2+1+h-((1-2)^2+1)}{h} = \frac{h^2-2h+1+1+h-2}{h} = \frac{h(h-1)}{h} = h-1$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} h-1 = -1$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|2)$ die Steigung $m_t = -1$.

$t_1(x) = -1(x-1)+2 = -x+3$

c) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1{,}5+h-2)^2+1{,}5+h-((1{,}5-2)^2+1{,}5)}{h} = \frac{h^2-h+0{,}25+1{,}5+h-1{,}75}{h} = \frac{h^2}{h} = h$$

$$f'(1{,}5) = \lim_{h\to 0} h = 0$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(1{,}5|1{,}75)$ die Steigung $m_t = 0$.

$t_{1,5}(x) = 1{,}75$

d) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h-2)^2+2+h-((2-2)^2+2)}{h} = \frac{h^2+2+h-2}{h} = \frac{h(h+1)}{h} = h+1$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} h+1 = 1$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(2|2)$ die Steigung $m_t = 1$.

$t_2(x) = x$

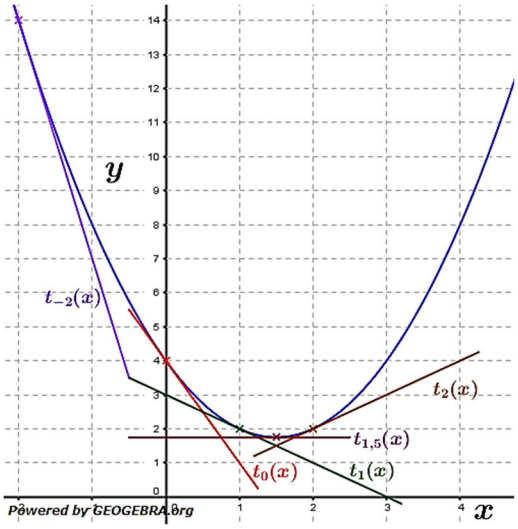
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

e) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-2+h-2)^2-2+h-((-2-2)^2-2)}{h} = \frac{h^2-8h+16-2+h-14}{h} = \frac{h(h-7)}{h} = h-7$

$f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} h-7 = -7$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-2|14)$ die Steigung $m_t = -7$.

$t_{-2}(x) = -7(x+2)+14 = -7x$



Lösung A3

a) $s_1(t) = t^2 + t$

$\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{s_1(t_0+h)-s_1(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{(4+h)^2+4+h-((4)^2+4)}{h} = \frac{16+8h+h^2+4+h-(16+4)}{h} = \frac{h(h+9)}{h} = h+9$

$s_1'(4) = \lim\limits_{h\to 0} h+9 = 9$

Ulrike hat in diesem Moment eine Geschwindigkeit v_1 von $9\frac{m}{s}$.

b) $s_2(t) = 11t - t^2$

$\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{s_2(t_0+h)-s_2(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{11(5+h)-(5+h)^2-(11\cdot 5-25)}{h} = \frac{55+11h-25-10h-h^2-55+25}{h} = \frac{h(1-h)}{h}$

$= 1-h$

$s_2'(5) = \lim\limits_{h\to 0} 1-h = 1$

Ulrike hat eine Geschwindigkeit v_2 von $1\frac{m}{s}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de