Lösung A1

	Wahr	Falsch
a) Ableitung und momentane Änderungsrate beschreiben denselben Sachverhalt.	☒	☐
b) Gilt $f'(-2) = 3$, so hat die Ableitung von f an der Stelle 3 den Wert 2. *Die Ableitung hat an der Stelle -2 den Wert 3.*	☐	☒
c) Existiert für f die momentane Änderungsrate in x_0, so ist f differenzierbar in x_0.	☒	☐

Lösung A2

Der Graph der Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel in $S(0|4)$. Deshalb gilt:

	Positiv	Negativ
a) $x_0 = -3$	☒	☐
b) $x_0 = 30$	☐	☒

Lösung A3

a)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{0{,}2(1{,}5+h)^3-0{,}2\cdot 1{,}5^3}{h} = \frac{0{,}2\cdot(1{,}5^3+6{,}75h+4{,}5h^2+h^3-1{,}5^3)}{h} = \frac{0{,}2\cdot(h^3+4{,}5h^2+6{,}75h)}{h}$$
$$= \frac{0{,}2h(h^2+4{,}5h+6{,}75)}{h} = \frac{0{,}2(h^2+4{,}5h+6{,}75)}{1}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(1{,}5) = \lim_{h\to 0} 0{,}2(h^2+4{,}5h+6{,}75) = 1{,}35$$

b)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\frac{1}{-5+h}-\frac{1}{-5}}{h} = \frac{-\frac{1}{(5-h)}+\frac{1}{5}}{h} = \frac{\frac{-5+5-h}{5\cdot(5-h)}}{h} = \frac{-h}{5h\cdot(5-h)} = -\frac{1}{5\cdot(5-h)}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(5) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{5\cdot(5-h)} = -\frac{1}{25}$$

Aufgabe A4

a)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+h)-f(u)}{u+h-h} = \frac{(u+h)^4-u^4}{h} = \frac{u^4+4u^3h+6u^2h^2+4uh^3+h^4-u^4}{h} = \frac{h(h^3+4uh^2+6u^2h+4u^3)}{h}$$
$$= (h^3+4uh^2+6u^2h+4u^3)$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(u) = \lim_{h\to 0}(h^3+4uh^2+6u^2h+4u^3) = 4u^3$$

b)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+h)-f(u)}{u+h-u} = \frac{5\cdot(u+h)^3-7\cdot(u+h)+2-(5u^3-7u+2)}{h}$$
$$= \frac{5\cdot(u^3+3u^2h+3uh^2+h^3)-7u-7h+2-5u^3+7u-2}{h}$$
$$= \frac{\cancel{5u^3}+15u^2h+15uh^2+5h^3\cancel{-7u}-7h\cancel{+2}\cancel{-5u^3}\cancel{+7u}\cancel{-2}}{h} = \frac{15u^2h+15uh^2+5h^3-7h}{h} = \frac{h(15u^2+15uh+5h^2-7)}{h}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(u) = \lim_{h\to 0}(15u^2+15uh+5h^2-7) = 15u^2-7$$

) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+h)-f(u)}{u+h-u} = \frac{4\cdot(u+h)^3-4u^3}{h} - \left(\frac{\frac{2}{u+h}-\frac{2}{u}}{h}\right) = \frac{4(\cancel{u^3}+3u^2h+3uh^2+h^3\cancel{-u^3})}{h} - \frac{\frac{2u-2(u+h)}{u\cdot(u+h)}}{h}$

$= \frac{4h(3u^2+3uh+h^2)}{h} - \frac{-2h}{uh\cdot(u+h)} = 4(3u^2+3uh+h^2) + \frac{2}{u(u+h)}$

$\frac{dy}{dx} = f'(u) = \lim\limits_{h\to 0} 4(3u^2+3uh+h^2) + \frac{2}{u(u+h)} = 12u^2 + \frac{2}{u^2}$

Lösung A5

a) $\boxed{-1}$ b) $\boxed{2{,}75}$

Lösung A6

a) $T(16) - T(4) = 40\cdot\sqrt{16} + 20 - \left(40\cdot\sqrt{4}+20\right) = 180 - 100 = 80.$

b) $T(17) - T(16) = 40\cdot\sqrt{17} + 20 - \left(40\cdot\sqrt{16}+20\right) > 0$

Für $t = 16$ steigt die Temperatur.

c) In der nächsten Minute steigt die Temperatur um etwa 10 Grad an.

Lösung A7

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{4-(1+h)^2-(4-1)}{h} = \frac{4-\left(1+2h+h^2\right)-3}{h} = \frac{3-2h-h^2-3}{h} = \frac{-h(2+h)}{h}$

$\frac{dy}{dx} = f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} -(2+h) = -2$

$f(1) = 4 - 1 = 3$

$t(x) = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$

$t(x) = -2\cdot(x-1) + 3 = -2x + 5$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} = \frac{4-h^2-4}{h} = \frac{-h^2}{h} = -h$

$\frac{dy}{dx} = f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} -h = 0$

$f(0) = 4 - 0 = 4$

$t(x) = f'(0)\cdot(x-0) + f(0)$

$t(x) = 0\cdot(x-0) + 4 = 4$

Lösung A8

Falsch ist die Tangente in C.

Lösung A9

Richtig ist $\boxed{CDBA}$

Lösung A10

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h) - f(3)}{1+h-1} = \frac{0{,}2 \cdot (3+h)^3 - 0{,}2 \cdot 3^3}{h} = \frac{0{,}2 \cdot (27 + 27h + 9h^2 + h^3) - 0{,}2 \cdot 27}{h}$$

$$= \frac{5{,}4 + 5{,}4h + 1{,}8h^2 + 0{,}2h^3 - 5{,}4}{h} = \frac{h(0{,}2h^2 + 1{,}8h + 5{,}4)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(3) = \lim_{h \to 0} (0{,}2h^2 + 1{,}8h + 5{,}4) = 5{,}4$$

$$f(3) = 0{,}2 \cdot 27 = 5{,}4$$

$$t(x) = f'(3) \cdot (x-3) + f(3)$$

$$t(x) = 5{,}4 \cdot (x-3) + 5{,}4 = 5{,}4x - 10{,}8$$

Lösung A11

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + 2 - (-x_0^2 + 2)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -\frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = -(x + x_0)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} -(x + x_0) = -2x_0$$

$$f'(x_0) = 4 = -2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -2$$

An der Stelle $x_0 = -2$ nimmt die Steigung der Tangente den Wert $m = 4$ an.

Lösung A12

Die Steigung in A ist $\boxed{-4}$.

Die Steigung in B ist $\boxed{1}$.

Lösung A13

Das Verkehrsschild gibt ein Gefälle von $22\,\%$ an. Die Tangentensteigung beträgt somit $m = -0{,}22$.
Der Winkel zwischen der Horizontalen und dem Gefällt beträgt:
$\alpha = 180\,° + tan^{-1}(-0{,}22) \approx 167{,}6\,°$.