Lösung A1

a) Detaillierte Lösung:

$f_1(x) = \sqrt{x-1}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\sqrt{4-1+h}-\sqrt{4-1}}{h} = \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{3+h-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$

$= \frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$

$f_1'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$

b) $f_2'(4) = \frac{1}{20}\sqrt{5}$ c) $f_3'(4) = 4$ d) $f_4'(4) = -\frac{1}{16}$

e) $f_5'(4) = \frac{1}{9}$ f) $f_6'(4) = -\frac{17}{16}$ g) $f_7'(4) = -\frac{1}{6}\sqrt{36}$ h) $f_8'(4) = \frac{3}{26}\sqrt{13}$

Lösung A2

a) Detaillierte Lösung

$f(x) = \sqrt{2x+4}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\sqrt{-2+4+h}-\sqrt{-2+4}}{h} = \frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$

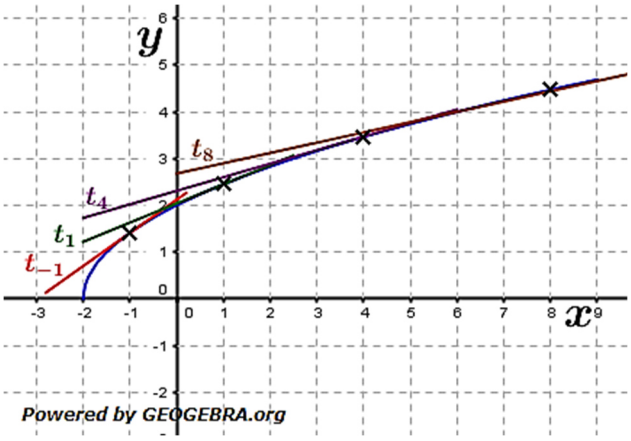
$= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$

$f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-1|\sqrt{2})$ die Steigung $m_t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$t_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x+1) + \sqrt{2}$

$t_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}$



b) Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|\sqrt{6})$ die Steigung $m_t = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

$t_b(x) = \frac{1}{6}\sqrt{6}(x-1) + \sqrt{6}$

$= \frac{1}{6}\sqrt{6}x + \frac{5}{6}\sqrt{6}$

c) Die Tangente an f hat im Punkt $P(4|2\sqrt{3})$ die Steigung $m_c = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

$t_c(x) = \frac{1}{6}\sqrt{3}(x-4) + 2\sqrt{3}$

$= \frac{1}{6}\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{3}$

d) Die Tangente an f hat im Punkt $P(8|2\sqrt{5})$ die Steigung $m_d = \frac{1}{10}\sqrt{5}$.

$t_d(x) = \frac{1}{10}\sqrt{5}(x-8) + 2\sqrt{5}$

$= \frac{1}{10}\sqrt{5}x + \frac{6}{5}\sqrt{5}$

Lösung A3

a) $s_1(t) = 5t^2$

$s_1(9) = 5\cdot 9^2 = 405$

Nach 9 *Sekunden befindet sich der Koffer in* $1000 - 405 = 595\,m$ *Höhe.*

$\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{s_1(t_0+h)-s_1(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{5\cdot(9+h)^2-5\cdot 9^2}{h} = \frac{405+90h+5h^2-405}{h} = \frac{h(5h+90)}{h} = 5h+90$

$\lim\limits_{h\to 0} 5h+90 = 90$

Der Koffer hat in diesem Moment eine Geschwindigkeit v_1 *von* $90\frac{m}{s}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

b) $s_2(t) = 6 - \frac{1}{x+0,5} - \frac{1}{(x+0,5)^2}$

$s_2(3) = 6 - \frac{1}{3+0,5} - \frac{1}{(3+0,5)^2} = 5,6$

Nach 3 *Sekunden befindet sich der Koffer etwa in* $5,6\,m$ *Tiefe.*

$$\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{s_2(t_0+h)-s_2(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{6-\frac{1}{(3+h+0,5)}-\frac{1}{(3+h+0,5)^2}-\left(6-\frac{1}{3+0,5}-\frac{1}{(3+0,5)^2}\right)}{h} = \frac{-\frac{1}{(3,5+h)}-\frac{1}{(3,5+h)^2}+\frac{1}{3,5}+\frac{1}{3,5^2}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-3,5^2\cdot(3,5+h)-3,5^2+3,5\cdot(3,5+h)^2+(3,5+h)^2}{3,5^2\cdot(3,5+h)^2}}{h} = \frac{-3,5^3-3,5^2h-3,5^2+3,5^3+24,5h+3,5h^2+3,5^2+7h+h^2}{h\cdot 3,5^2\cdot(3,5+h)^2}$$

$$= \frac{-3,5^2h+24,5h+3,5h^2+7h+h^2}{h\cdot 3,5^2\cdot(3,5+h)^2} = \frac{h(31,5-3,5^2+4,5h)}{h\cdot 3,5^2\cdot(3,5+h)^2} = \frac{19,25+4,5h}{3,5^2(3,5+h)^2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{19,25+4,5h}{3,5^2(3,5+h)^2} = \frac{19,25}{3,5^4} = 0,1287$$

Nach 3 *Sekunden hat der Koffer eine Sinkgeschwindigkeit* v_2 *von etwa* $0,13\,\frac{m}{s}$.

Lösung A4

Text (A) beschreibt eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Also ist Kärtchen ❹ mit $\frac{v(5)-v(2)}{3}$ das Richtige.

Text (B) beschreibt eine Momentangeschwindigkeit. Die Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit, also ist Kärtchen ❶ mit $s'(2,5)$ das Richtige.

Text (C) beschreibt eine zurückgelegte Strecke, also ist Kärtchen ❸ mit $s(2,5)$ das Richtige.

Text (D) beschreibt eine momentane Änderungsrate und zwar die von v. Also ist Kärtchen ❷ mit $v'(2,5)$ das Richtige.

Text (E) beschreibt eine mittlere Änderungsrate von v im Intervall $[2;5]$. Also ist Kärtchen ❹ mit $\frac{v(5)-v(2)}{3}$ das Richtige.

Beachte:

Text (A) und **Text (E)** beschreiben ein und denselben Sachverhalt, wo hingegen für Kärtchen ❺ keine textuelle Beschreibung vorhanden ist.

Lösung A5

a) $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{450}{8-3} = 90$

Die mittlere Durchflussrate im Intervall $[3;5]$ betrug $90\,m^3/h$.

b) Die mittlere Durchflussrate um 6 Uhr ist $30\,m^3/h$, bzw. $\frac{30}{60}\,m^3/min$, also $0,5\,m^3/min$. Bis $6:10$ Uhr fließen also $10\cdot 0,5\,m^3 = 5\,m^3$ durch die Pipeline.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de