Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = 3x \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{x+h-x} = \frac{3\cdot(x+h) - 3x}{h} = \frac{3x+3h-3x}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \\ \frac{dy}{dx} = f_1{}'(x) = \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3 \end{array} \right.$$

b) $f_2'(x) = 6x$ c) $f_3'(x) = 2x - 1$

Detaillierte Lösung für d)

$$f_4(x) = x^3 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{x_0+h-x_0} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ = \frac{h(h^2+3xh+3x^2)}{h} = h^2+3xh+3x^2 \\ \frac{dy}{dx} = f_4{}'(x) = \lim\limits_{h\to 0} h^2+3xh+3x^2 = 3x^2 \end{array} \right.$$

e) $f_5'(x) = 2x$ f) $f_6'(x) = 3x^2$ g) $f_7'(x) = -4x$ h) $f_8'(x) = -4x^3$

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{x+h-x} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} = \frac{x^2-(x+h)^2}{x^2h(x+h)^2} \\ = -\frac{2xh+h^2}{x^2h(x+h)^2} = -\frac{h(2x+h)}{x^2h(x+h)^2} = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \\ \frac{dy}{dx} = f_1'(x) = \lim\limits_{h\to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \end{array} \right.$$

b) $f_2'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ c) $f_3'(x) = 2x - 1$ d) $f_4'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

e) $f_5'(x) = -2x + 1$ f) $f_6'(x) = 2x - 1$ g) $f_7'(x) = \frac{2}{x^3}$ h) $f_8'(x) = -1 + \frac{1}{x^2}$

Lösung A3

a) Die Angabe bedeutet, dass der Taucher von der 10. Bis zur 12. Minute um $3\,\frac{m}{min}$ tiefer sinkt.
$f(12) = f(10) + 2 \cdot 3 = 24 + 6 = 30$
Die Tiefe des Tauchers nach 12 *Minuten beträgt* $30\,m$.

b) Die Angabe bedeutet, dass die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 10\,min$ $2{,}8\frac{m}{min}$ beträgt.
Damit ist: Kärtchen ❶ richtig, Kärtchen ❷ falsch, da hier keine Aussage zum Zeitpunkt gemacht wird, Kärtchen ❸ richtig sowie Kärtchen ❹ ebenfalls richtig.

Lösung A4

a) Die Angabe bedeutet, dass der Radfahrer von der 2. bis zur 5. Stunde mit einer Geschwindigkeit von $15\frac{km}{h}$ unterwegs ist. Die gefahrene Strecke in diesen 3 Stunden ist $45\,km$ lang.

b) $s'(2) = 18$ bedeutet, dass die momentane Geschwindigkeit des Radfahrers zum Zeitpunkt $t = 2$ $18\,km/h$ beträgt.
$18\frac{km}{h} \cdot t_0 = 1{,}5\,km$
$t_0 = \frac{1{,}5}{18} = \frac{1}{6}\,h = 10\,min$
Der Radfahrer benötigt für die nächsten $1{,}5\,km$ *etwa* $10\,min$.

Lösung A5

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}+h-\frac{\pi}{6}}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$

Es gilt das Additionstheorem $sin(\alpha)-sin(\beta)=2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+h+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+h-\frac{\pi}{6}}{2}\right)=2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)$

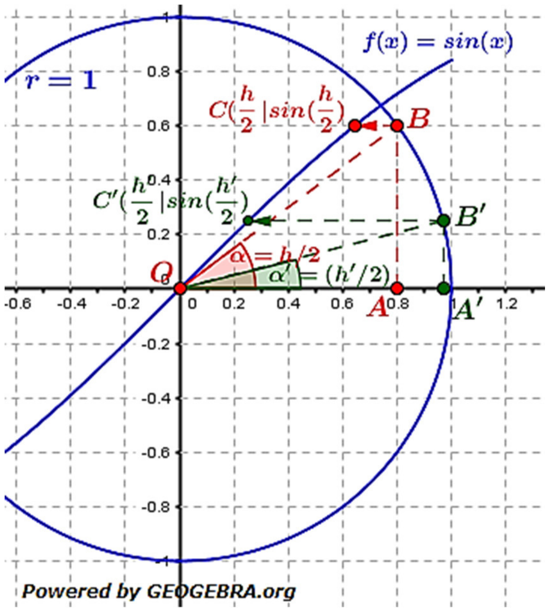
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ | Der Bruch wurde mit $\frac{1}{2}$ erweitert.

Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis.

Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

Mit kleiner werdendem h gilt für h':
$sin\left(\frac{h'}{2}\right)=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{A'B'}}{1}=\overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle|sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.

Mit $h\to 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung. Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.



$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim\limits_{h\to 0}cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)\cdot 1=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$