

Lösung A1

a) Grafik untenstehend.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\Delta F}{\Delta s} &= \frac{F(x+h)-F(x)}{x+h-x} = \frac{0,04(s+h)^3 - 0,6(s+h)^2 + 4(s+h) - (0,04s^3 - 0,6s^2 + 4s)}{h} \\
 &= \frac{0,04(s^3 + 3s^2h + 3sh^2 + h^3) - 0,6(s^2 + 2sh + h^2) + 4s + 4h - 0,04s^3 + 0,6s^2 - 4s}{h} \\
 &= \frac{0,12s^2h + 0,12sh^2 + 0,04h^3 - 1,2sh - 0,6h^2 + 4h}{h} = \frac{h(0,12s^2 + 0,12sh + 0,04h^2 - 1,2s - 0,6h + 4)}{h} \\
 &= 0,12s^2 + 0,12sh + 0,04h^2 - 1,2s - 0,6h + 4
 \end{aligned}$$

$$\frac{dF}{ds} = F'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} 0,12s^2 + 0,12sh + 0,04h^2 - 1,2s - 0,6h + 4 = 0,12s^2 - 1,2s + 4$$

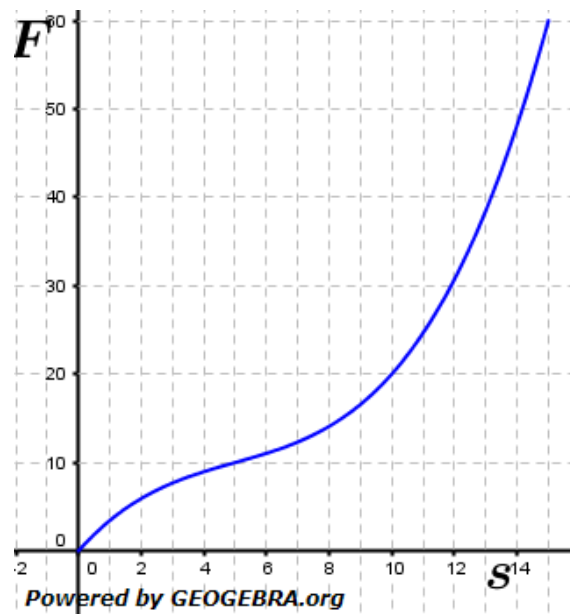
$$F'(2) = 0,12 \cdot 2^2 - 1,2 \cdot 2 + 4 = 3,28$$

$$F'(5) = 0,12 \cdot 5^2 - 1,2 \cdot 5 + 4 = 1$$

$$F'(10) = 0,12 \cdot 10^2 - 1,2 \cdot 10 + 4 = 4$$

c) Gemäß dem Ergebnis von zuvor ist der Wert von $F'(s)$ zunächst groß, fällt dann ab um kurz darauf wieder anzusteigen.

Dies deckt sich mit dem Aufblasen eines Luftballons, was zunächst schwerer, dann wesentlich leichter geht und zum Schluss – kurz vor dem Zerplatzen – wieder schwieriger ist.



Lösung A2

a) Wie berechnen zunächst die mittlere Geschwindigkeit für die ersten fünf Sekunden.

$$s(0) = 0 \text{ m}; \quad s(5) = 1,5 \cdot 5^2 = 37,5 \text{ m}$$

$$\bar{v} = \frac{37,5 - 0}{5} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Strecke für 6 Sekunden mit dieser mittleren Geschwindigkeit:

$$s = \bar{v} \cdot t = 7,5 \cdot 6 = 45 \text{ m}.$$

Strecke für 6 Sekunden mit Formel $s(t)$:

$$s(6) = 1,5 \cdot 6^2 = 54 \text{ m}$$

$$\text{Differenz: } 54 \text{ m} - 45 \text{ m} = 9 \text{ m}$$

b) Die Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{s+h-s} = \frac{1,5 \cdot (t+h)^2 - 1,5t^2}{h} = \frac{1,5t^2 + 3ht + h^2 - 1,5t^2}{h} = \frac{h(3t+h)}{h} = 3t + h$$

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} 3t + h = 3t$$

Damit lautet die Formel für die Geschwindigkeit des Läufers:

$$v(t) = 3t$$

$$v(5) = 3 \cdot 5 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad v(6) = 3 \cdot 6 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- c) $v(t) = 36 \frac{m}{s}$
 $3t = 36 \Rightarrow t = 12$
 Nach 12 Sekunden erreicht der Läufer eine Geschwindigkeit von $36 \frac{m}{s}$.
- d) $s(t) = 96$
 $1,5 \cdot t^2 = 96$
 $t^2 = 144 \Rightarrow t = 12$
 Nach 12 Sekunden ist der Läufer 96 m weit gefahren.

Lösung A3

- a) $f(7) = 60$ bedeutet, dass zwischen 6 Uhr und 13 Uhr $60 m^3$ Öl durch die Pipeline geflossen sind.
 $\frac{f(7)-f(3)}{4} = 11$ bedeutet, dass die mittlere Durchflussmenge zwischen 9 Uhr und 13 Uhr $11 \frac{m^3}{h}$ beträgt.
 $f'(5) = 12$ bedeutet, dass die momentane Durchflussmenge um 11 Uhr $12 \frac{m^3}{h}$ beträgt.
- b) $f'(5) = 12 \frac{m^3}{h} = \frac{12}{60} \frac{m^3}{min}$. Von 11 Uhr bis 11:15 Uhr sind es 15 Minuten:
 $V_{[11;11:15]} = 15 min \cdot \frac{12}{60} \frac{m^3}{min} = 3 m^3$

Lösung A4

- a) Etwa Mitte Mai war mit $6000 m^3$ am meisten Wasser in der Zisterne.
- b) Im Monat April hat es am meisten geregnet, weil in diesem Zeitraum die Wasserzunahme in der Zisterne am Steilsten ist.
- c) Im Monat Februar als auch genau Mitte Mai und Ende Juli sind täglich $100 m^3$ zugeflossen, da die Wasserzunahmen dort den Wert 0 erreichten.
 Im Monat Januar als auch etwa um den 25. Mai als auch den 15. Juli herum sind täglich $50 m^3$ Wasser zugeflossen, da dort die Wasserabnahme etwa $50 m^3$ beträgt.
- d) Direkt nach dem 1.6. hat es zu regnen begonnen, da ab diesem Tag die Wasserabnahme wieder geringer ist als $100 m^3$ pro Tag.
- e) Die Wasserzunahme im September betrug $1000 \frac{m^3}{Monat}$ bzw. $\frac{100}{3} \cdot \frac{m^3}{Tag}$. Da im September auch $100 \frac{m^3}{Tag}$ entnommen wurden, sind somit täglich im Mittel etwa $133,3 \frac{m^3}{Tag}$ durch die Zisterne geflossen.

Lösung A5

a) Umrechnung von km/h in m/s :

$$50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wir benötigen die Beschleunigung des Rennwagens. Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Strecke nach der Zeit, also benötigen wir zunächst die Ableitung $s'(t)$ und danach $s''(t)$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{s+h-s} = \frac{5 \cdot (t+h)^2 + t+h - 5t^2 - t}{h} = \frac{10ht + 5h^2 + h}{h} = \frac{h(10t+5h+1)}{h} = 10t + 5h + 1$$

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} 10t + 5h + 1 = 10t + 1$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+h)-v(t)}{v+h-v} = \frac{10 \cdot (t+h) + 1 - 10t - 1}{h} = \frac{10t + 10h - 10t}{h} = 10$$

$$\frac{dv}{dt} = v'(t) = a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} 10 = 10$$

Mit $v(t) = a \cdot t$ erhalten wir somit;

$$v_1(t) = 13,9 = a \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 1,39$$

$$v_2(t) = 27,8 = a \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 2,78$$

$$\Delta t = 2,78 - 1,39 = 1,39$$

Der Rennfahre beschleunigt in etwa 1,4 s von 50 km/h auf 100 km/g.

b) $s(t) = 100$

$$5t^2 + t - 100 = 0$$

$$t^2 + \frac{t}{5} - 20 = 0$$

$$t_{1,2} = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} + 20} = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{20,01} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$t = 4,3733$$

Der Rennfahrer benötigt etwa 4,4 s für die ersten 100 m.