Vom Differenzenquotienten zur Ableitung

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis
Vom Differenzenquotienten zur Ableitung

Kapitel mit 142 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(15 Aufgaben)*	07
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	08
Aufgabenblatt 2 *(17 Aufgaben)*	10
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	12
Aufgabenblatt 3 *(29 Aufgaben)*	14
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	18
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 *(17 Aufgaben)*	21
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	23
Aufgabenblatt 2 *(13 Aufgaben)*	25
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	27
Aufgabenblatt 3 *(21 Aufgaben)*	29
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	30
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(10 Aufgaben)*	32
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	33
Aufgabenblatt 2 *(16 Aufgaben)*	34
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	36
Level 4 Universität	
Aufgabenblatt 1 *(4 Aufgaben)*	39
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	40

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Im Kapitel „Momentane Änderungsrate" haben wir gelernt, dass die momentane Änderungsrate der Steigung des Graphen einer Funktion f in einem bestimmten Punkt entspricht, und gleich der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt ist. Berechnet haben wir dort über eine umständliche Tabellenkalkulation.
Nun fragen wir uns natürlich, ob dies auch effizienter über eine einfache Rechenoperation möglich ist.

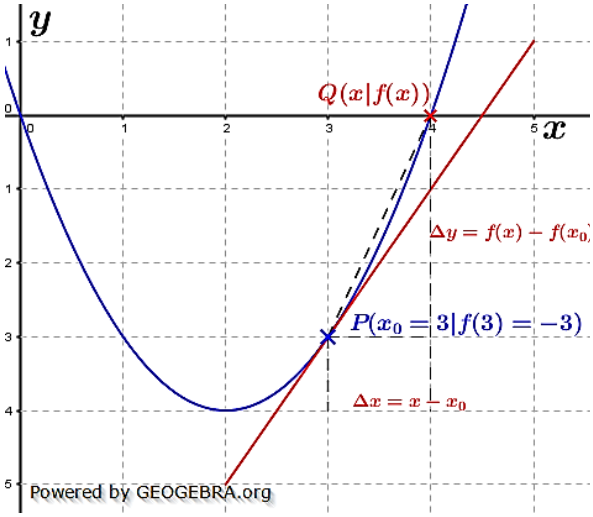
Dieses Kapitel bringt dir nun diese Rechenoperation näher. Wir unterscheiden dabei zwei wesentliche Operationen, nämlich

- **Steigungsbestimmung in einem bestimmten Punkt.**
- **Steigungsbestimmung in beliebigen Punkt.**

Betrachten wir zunächst die Steigungsbestimmung in einem bestimmten Punkt.
Der Mathematiker unterscheidet hier nach zwei Methoden, zum einen der sogenannten "x"–Methode und zum anderen der sogenannten "h"–Methode.

Beispiel 1
Bestimme für die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x$ die Steigung im Punkt $P(3|f(3))$.

Lösung 1: "x"–Methode



Auch hier müssen wir den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aufstellen. Ein beliebiger Punkt Q auf f hat die Koordinaten $Q(x|f(x))$.
Wir bilden den Differenzenquotienten mit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-4x-(3^2-4\cdot 3)}{x-3}$$
$$= \frac{x^2-4x+3}{x-3};\ x \neq 3$$

Der Zähler $x^2 - 4x + 3$ lässt sich faktorisieren zu $(x-3)\cdot(x-1)$, sodass gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x-3)\cdot(x-1)}{x-3} = x - 1 = m(x)$$

Die Grenzwertbetrachtung führt zu:
$m(x)$ für $x \longrightarrow 3$:

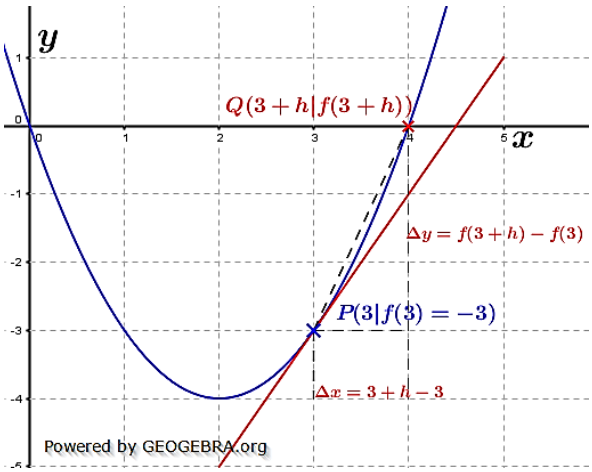
$$\frac{dy}{dx}(3) = \lim_{x\to 3} m(x) = \lim_{x\to 3} x - 1 = 2$$

Die Steigung der Tangente an f in $P(3|-3)$ und damit auch die Steigung der Kurve beträgt $m = 2$.

Hinweis:
Die "x"–Methode ist im gymnasialen Schulbetrieb unüblich, wird jedoch an Universitäten behandelt.

Lösung 1: "h"–Methode

Im Gegensatz zur "x"–Methode wird hier ein beliebiger Abstand h der x-Koordinate, den der Punkt Q zu P hat, herangezogen (siehe Grafik).



Die Aufstellung des Differenzenquotienten führt damit zu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{(3+h)^2-4(3+h)-(3^2-4\cdot 3)}{h}$$
$$= \frac{9+6h+h^2-12-4h-9+12}{h}$$
$$= \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} \quad | \text{ mit } h \text{ gekürzt}$$
$$= h+2$$

Läuft nun h gegen Null, so bedeutet dies, dass der Punkt Q auf dem Graphen der Kurve solange verschoben wird, bis Q mit P zusammenfällt.

In diesem Fall wird dann aus der Sekante durch Q und P die Tangente in P.

$$\frac{dy}{dx}(3) = \lim_{h\to 0} h+2 = 2$$

Die Steigung der Tangente an f in $P(3|-3)$ und damit auch die Steigung der Kurve beträgt $m = 2$.

Betrachten wir nun die Steigungsbestimmung in einem beliebigen Punkt. (auf die "x"–Methode wird hier nicht mehr näher eingegangen).

Zunächst führen wir hier einen neuen Begriff ein, die ***„Ableitung"***. Spricht der Mathematiker nämlich von der Steigungsbestimmung in einem beliebigen Punkt des Graphen einer Funktion f, so sagt er hier kurz „Ableitung von f". Und selbstverständlich hat er sich auch ein diesbezügliches Formelzeichen ausgedacht, nämlich f' (sprich f Strich). f' wiederum ist eine Abkürzung für den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, der wiederum aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ herrührt.

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird zum Differenzialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in dem Moment, wo die beiden Punkte P und Q zusammenfallen und aus der Sekante eine Tangente wird.

Merksatz

Definition:

Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert und es sei $x_0 \in I$. Wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \longrightarrow 0$ einen Grenzwert besitzt, so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar (oder ableitbar). Ist f für alle $x_0 \in I$ differenzierbar, so nennt man f eine auf I differenzierbare Funktion.

*Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt **Differenzialquotient** oder **Ableitung von** f an der Stelle x_0. Dafür schreibt man kurz $\boldsymbol{f'(x_0)}$ und liest „f Strich von x_0".*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x;\ x \in \mathbb{R}$. Bilde mithilfe der "$h$"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{-\frac{1}{2}(x+h)^2+3(x+h)-(-\frac{1}{2}x^2+3x)}{h} = \frac{-\frac{1}{2}(x^2+2xh+h^2)+3x+3h+\frac{1}{2}x^2-3x}{h}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^2-xh-\frac{1}{2}h^2+3x+3h+\frac{1}{2}x^2-3x}{h} = \frac{-\frac{1}{2}h^2-xh+3h}{h} = \frac{h(-\frac{1}{2}h-x+3)}{h} \qquad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$= -\frac{1}{2}h - x + 3$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{2}h - x + 3 = -x + 3$$

Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - x^2;\ x \in \mathbb{R}$. Bilde mithilfe der "$h$"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{2(x+h)^3-(x+h)^2-(2x^3-x^2)}{h}$$

In dieser Lösungsformel befindet sich nun das $(x+h)^3$. Die einfachste Form binomische Formeln mit einer Potenz größer als 2 aufzulösen, ist über das Pascalsche Dreieck, weshalb wir es hier noch einmal behandeln.

Das Pascalsche Dreieck

$(a+b)^0$	1	$= 1$
$(a+b)^1$	1 1	$= 1a + 1b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$= 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1h^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1h^5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-(x^2+2xh+h^2)-2x^3+x^2}{h} = \frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-x^2-2xh-h^2-2x^3+x^2}{h}$$

$$= \frac{6x^2h+6xh^2+2h^3-2xh-h^2}{h} = \frac{h(6x^2+6xh+2h^2-2x-h)}{h} \qquad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$= 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h = 6x^2 - 2x$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Bilde mithilfe der "$h$"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}}{h} = \frac{\frac{x+1-(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \frac{-h}{h\cdot(x+h+1)(x+1)} \quad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$= \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Beispiel 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \geq 1$. Bilde mithilfe der "h"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 5

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})} \quad | \quad \text{erweitert mit}$$

$$| \quad (\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})$$

$$= \frac{x+h-1-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})} \quad | \quad \text{Auflösung 3. Binomische Formel}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}} \quad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne wie im Beispiel mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung im Punkt $x_0 = 3$.

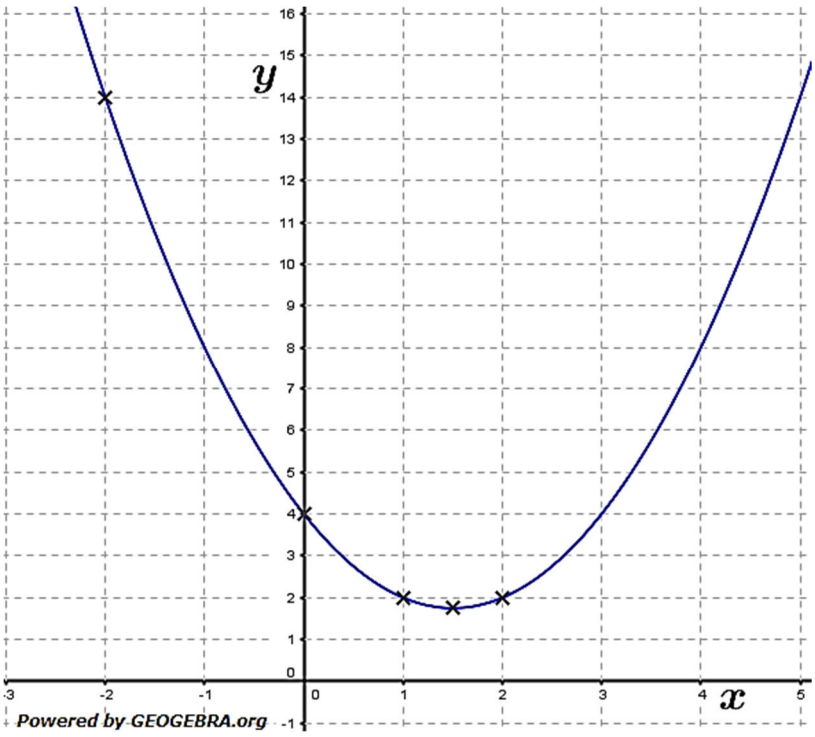
Beispiel	Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen
$f(x) = x^2$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{h(h+6)}{h}$ $= h + 6$ $\frac{dy}{dx} = f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} h + 6 = 6$

a) $g(x) = 3x$ b) $h(x) = 3x^2$ c) $i(x) = x^2 - x$ d) $j(x) = x^3$
e) $k(x) = x^2 + 5$ f) $l(x) = x^3 + 1$ g) $m(x) = -2x^2$ h) $n(x) = -x^4$

Aufgabe A2

Berechne für die Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 + x$ mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung der Tangente und des Graphen von f an den Stellen x_0. Bestimme auch die Gleichung der Tangente und zeichne sie in die Grafik ein.

a) $x_0 = 0$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 1{,}5$
d) $x_0 = 2$
e) $x_0 = -2$



Aufgabe A3

Ulrike fährt mit ihrer Mutter Schlitten. Die zurückgelegte Strecke (in Metern) beim Anfahren kann mit der Funktion $s_1(t) = t^2 + t$ annähernd beschrieben werden.

a) Ulrike holt nach 4 Sekunden ihre Mutter ein, die vorausgefahren war. Wie schnell ist sie in dem Moment, in dem sie an ihr vorbeifährt?
Berechne die Geschwindigkeit v_1 mithilfe des Differenzenquotienten.

Nachdem sie 5 Sekunden gefahren ist, erreicht sie das Ende der Abfahrt und Ulrikes Schlitten wird immer langsamer. Der zurückgelegte Weg kann von diesem Moment an durch die Funktion $s_2(t) = 11t - t^2$ beschrieben werden.

b) Wie schnell ist sie nach weiteren 5 Sekunden? Berechne die Geschwindigkeit v_2 wieder mithilfe des Differenzenquotienten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$g(x) = 3x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{3\cdot(3+h)-3}{h} = \frac{9+3h-9}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = g'(3) = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

b) $h'(3) = 18$ c) $i'(3) = 5$

Detaillierte Lösung für d)

$j(x) = x^3$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{j(x_0+h)-j(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(3+h)^3-27}{h} = \frac{(3+h)^2\cdot(3+h)-27}{h}$$

$$= \frac{(9+6h+h^2)\cdot(3+h)-27}{h} = \frac{27+27h+9h^2+h^3-27}{h} = \frac{h^3+9h^2+27h}{h} = \frac{h(h^2+9h+27)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = j'(3) = \lim_{h\to 0} h^2+9h+27 = 27$$

e) $k'(3) = 6$ f) $l'(3) = 27$ g) $m'(3) = -12$ h) $n'(3) = -101$

Lösung A2

a) $f(x) = (x-2)^2 + x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(0+h-2)^2+0+h-((0-2)^2+0)}{h} = \frac{h^2-3h+4-4}{h} = \frac{h(h-3)}{h} = h-3$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} h-3 = -3$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(0|4)$ die Steigung $m_t = -3$.

$t_0(x) = -3x+4$

b) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h-2)^2+1+h-((1-2)^2+1)}{h} = \frac{h^2-2h+1+1+h-2}{h} = \frac{h(h-1)}{h} = h-1$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} h-1 = -1$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|2)$ die Steigung $m_t = -1$.

$t_1(x) = -1(x-1)+2 = -x+3$

c) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1{,}5+h-2)^2+1{,}5+h-((1{,}5-2)^2+1{,}5)}{h} = \frac{h^2-h+0{,}25+1{,}5+h-1{,}75}{h} = \frac{h^2}{h} = h$$

$$f'(1{,}5) = \lim_{h\to 0} h = 0$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(1{,}5|1{,}75)$ die Steigung $m_t = 0$.

$t_{1,5}(x) = 1{,}75$

d) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h-2)^2+2+h-((2-2)^2+2)}{h} = \frac{h^2+2+h-2}{h} = \frac{h(h+1)}{h} = h+1$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} h+1 = 1$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(2|2)$ die Steigung $m_t = 1$.

$t_2(x) = x$

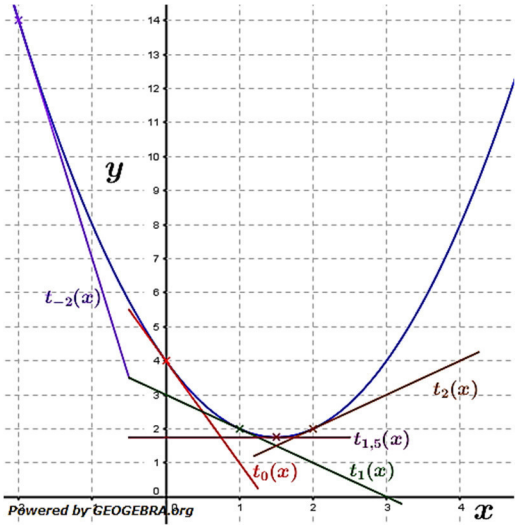
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

e) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-2+h-2)^2-2+h-((-2-2)^2-2)}{h} = \frac{h^2-8h+16-2+h-14}{h} = \frac{h(h-7)}{h} = h-7$

$f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} h-7 = -7$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-2|14)$ die Steigung $m_t = -7$.

$t_{-2}(x) = -7(x+2)+14 = -7x$



Lösung A3

a) $s_1(t) = t^2 + t$

$\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{s_1(t_0+h)-s_1(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{(4+h)^2+4+h-((4)^2+4)}{h} = \frac{16+8h+h^2+4+h-(16+4)}{h} = \frac{h(h+9)}{h} = h+9$

$s_1'(4) = \lim\limits_{h\to 0} h+9 = 9$

Ulrike hat in diesem Moment eine Geschwindigkeit v_1 von $9\frac{m}{s}$.

b) $s_2(t) = 11t - t^2$

$\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{s_2(t_0+h)-s_2(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{11(5+h)-(5+h)^2-(11\cdot 5-25)}{h} = \frac{55+11h-25-10h-h^2-55+25}{h} = \frac{h(1-h)}{h}$

$= 1-h$

$s_2'(5) = \lim\limits_{h\to 0} 1-h = 1$

Ulrike hat eine Geschwindigkeit v_2 von $1\frac{m}{s}$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne wie im Beispiel mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung im Punkt $x_0 = 2$.

Beispiel — Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}$$

$$= \frac{-h}{2h(2+h)} = -\frac{1}{4+2h}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(2) = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{4+2h} = -\frac{1}{4}$$

a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f_3(x) = x^2 - x$ d) $f_4(x) = x + \frac{1}{x}$

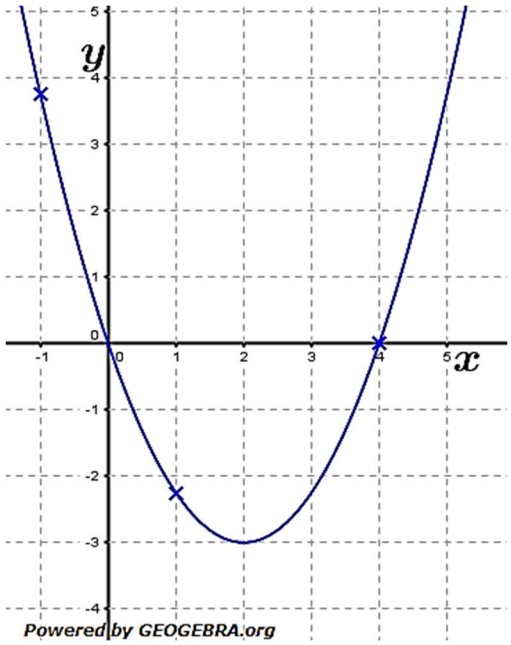
e) $f_5(x) = -x^2 + x$ f) $f_6(x) = x^2 - x + 1$ g) $f_7(x) = -\frac{1}{x^2}$ h) $f_8(x) = -x - \frac{1}{x}$

Aufgabe A2

Berechne für die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung der Tangente und des Graphen von f an den Stellen x_0.

Bestimme auch die Gleichung der Tangente und zeichne sie in die Grafik ein.

a) $x_0 = -1$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 2$
d) $x_0 = 4$



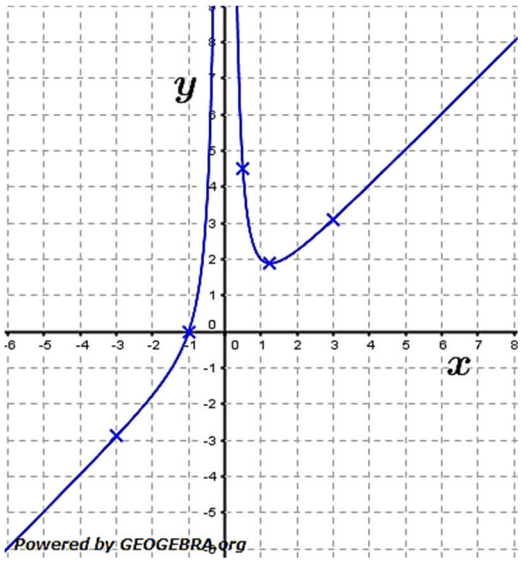
Aufgabe A3

Die Grafik zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$.

Berechne mit Hilfe des Differenzenquotienten die Tangentensteigungen für:

a) $x_0 = 0{,}5$
b) $x_0 = \sqrt[3]{2}$
c) $x_0 = 3$
d) $x_0 = -1$
e) $x_0 = -3$

Gib die Funktionsgleichungen der Tangenten an und zeichne sie in nebenstehende Grafik ein.



Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}}{h} = \frac{\frac{4-(2+h)^2}{4(2+h)^2}}{h} = \frac{4-(2+h)^2}{4h(2+h)^2} \\ \quad = -\frac{4h+h^2}{4h(2+h)^2} = -\frac{h(4+h)}{4h(2+h)^2} = -\frac{4+h}{4(2+h)^2} \\ \frac{dy}{dx} = f_1{}'(2) = \lim\limits_{h\to 0} -\frac{4+h}{4(2+h)^2} = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

b) $f_2'(2) = -\frac{1}{9}$ c) $f_3'(2) = 2$ d) $f_4'(2) = \frac{3}{4}$

e) $f_5'(2) = -2$ f) $f_6'(2) = 2$ g) $f_7'(2) = \frac{1}{4}$ h) $f_8'(2) = -\frac{3}{4}$

Lösung A2

$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\frac{3}{4}(-1+h)^2-3(-1+h)-\left(\frac{3}{4}+3\right)}{h} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{2}h+\frac{3}{4}h^2+3-3h-\frac{3}{4}-3}{h} = \frac{\frac{3}{4}h^2-\frac{9}{2}h}{h} = \frac{h\left(\frac{3}{4}h-\frac{9}{2}\right)}{h}$

$f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3}{4}h - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-1|\frac{15}{4})$ die Steigung $m_t = -\frac{9}{2}$.

$t_{-1}(x) = -\frac{9}{2}(x+1) + \frac{15}{4} = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{4}$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4}(1+h)^2-3(1+h)-\left(\frac{3}{4}\cdot 1^2-3\cdot 1\right)}{h} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}h+\frac{3}{4}h^2-3-3h-\frac{3}{4}+3}{h} = \frac{\frac{3}{4}h^2-\frac{3}{2}h}{h} = \frac{h\left(\frac{3}{4}h-\frac{3}{2}\right)}{h} = \frac{3}{4}h - \frac{3}{2}$

$f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3}{4}h - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|-\frac{9}{4})$ die Steigung $m_t = -\frac{3}{2}$.

$t_1(x) = -\frac{3}{2}(x-1) - \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

c) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4}(2+h)^2-3(2+h)-\left(\frac{3}{4}\cdot 2^2-3\cdot 2\right)}{h} = \frac{3+3h+\frac{3}{4}h^2-6-3h-3+6}{h} = \frac{\frac{3}{4}h^2}{h} = \frac{h\left(\frac{3}{4}h\right)}{h} = \frac{3}{4}h$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3}{4}h = 0$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(2|-3)$ die Steigung $m_t = 0$.

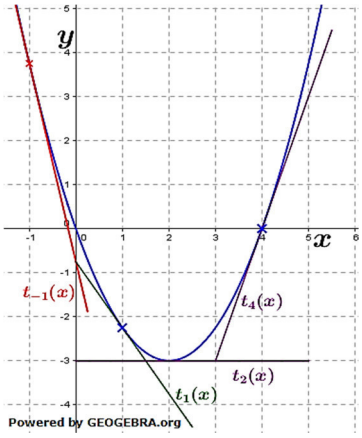
$t_3(x) = -3$

d) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4}(4+h)^2-3(4+h)-\left(\frac{3}{4}\cdot 4^2-3\cdot 4\right)}{h} = \frac{12+6h+\frac{3}{4}h^2-12-3h-12-12}{h} = \frac{\frac{3}{4}h^2+3h}{h} = \frac{h\left(\frac{3}{4}h+3\right)}{h} = \frac{3}{4}h + 3$

$f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3}{4}h + 3 = 3$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(4|0)$ die Steigung $m_t = 3$.

$t_4(x) = 3(x-4) = 3x - 12$



© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+x$$

a) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{\frac{1}{(0{,}5+h)^2}+0{,}5+h-(4+0{,}5)}{h}=\frac{\frac{1}{(0{,}5+h)^2}+h-4}{h}=\frac{\frac{1+(h-4)\cdot(0{,}5+h)^2}{(0{,}5+h)^2}}{h}=\frac{h^3-3h^2-3{,}75h}{h(0{,}5+h)^2}$$
$$=\frac{h(h^2-3h-3{,}75)}{h(0{,}5+h)^2}=\frac{h^2-3h-3{,}75}{(0{,}5+h)^2}$$

$$f'(0{,}5)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-3h-3{,}75}{(0{,}5+h)^2}=-\frac{3{,}75}{0{,}25}=-15$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(0{,}5|4{,}5)$ die Steigung $m_t=-15$.

$t_{0,5}(x)=-15(x-0{,}5)+4{,}5=-15x+12$

b) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{(\sqrt[3]{2}+h)^2}+\sqrt[3]{2}+h-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}^2}+\sqrt[3]{2}\right)}{h}=\frac{\frac{1}{(\sqrt[3]{2}+h)^2}+h-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}{h}=\frac{\frac{1+\left(h-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2}+h\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}+h\right)^2}}{h}=\frac{\frac{2h^3+3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot h^2}{2}}{h\left(\sqrt[3]{2}+h\right)^2}=\frac{h(2h+3\cdot\sqrt[3]{2})}{2\left(\sqrt[3]{2}+h\right)^2}$$

$$f'\left(\sqrt[3]{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h+3\cdot\sqrt[3]{2})}{2\left(\sqrt[3]{2}+h\right)^2}=0$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(\sqrt[3]{2}|\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$ die Steigung $m_t=0$.

$t_{\sqrt[3]{2}}(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\approx 1{,}9$

c) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{(3+h)^2}+3+h-\left(\frac{1}{9}+3\right)}{h}=\frac{\frac{1}{(3+h)^2}+h-\frac{1}{9}}{h}=\frac{\frac{1+(h-\frac{1}{9})\cdot(3+h)^2}{(3+h)^2}}{h}=\frac{h^3+53h^2+75h}{9h(3+h)^2}=\frac{h^2+53h+75}{9(3+h)^2}$$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+53h+75}{9(3+h)^2}=\frac{75}{81}\approx 0{,}926$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(3|\frac{28}{9})$ die Steigung $m_t=\frac{75}{81}$.

$t_3(x)=\frac{75}{81}(x-3)+\frac{28}{9}=0{,}93x+1/3$

d) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{(-1+h)^2}-1+h-(1-1)}{h}=\frac{\frac{1}{(h-1)^2}-1+h}{h}=\frac{\frac{1+(h-1)\cdot(h-1)^2}{(h-1)^2}}{h}=\frac{h^3+3h^2+3h}{h(h-1)^2}=\frac{h^2+3h+3}{(h-1)^2}$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h+3}{(h-1)^2}=3$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-1|0)$ die Steigung $m_t=3$.

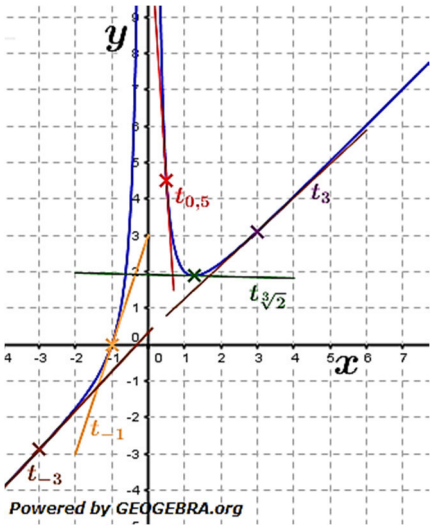
$t_4(x)=3(x+1)=3x+3$

e) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{(-3+h)^2}-3+h-\left(\frac{1}{9}-3\right)}{h}=\frac{\frac{1}{(-3+h)^2}+h-\frac{1}{9}}{h}=\frac{\frac{1+(h-\frac{1}{9})\cdot(-3+h)^2}{(-3+h)^2}}{h}=\frac{9h^3-55h^2+57h}{9h(-3+h)^2}=\frac{9h^2-53h+87}{9(-3+h)^2}$$

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-53h+87}{9(-3+h)^2}=\frac{87}{81}\approx 1{,}07$$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-3|-\frac{26}{9})$ die Steigung $m_t=\frac{87}{81}$.

$t_{-3}(x)=\frac{87}{81}(x+3)-\frac{26}{9}=1{,}1x+\frac{1}{3}$



Aufgabe A1

Berichtige die eventuell falsche Aussage.

	Wahr	Falsch
a) Ableitung und momentane Änderungsrate beschreiben denselben Sachverhalt. *Korrektur, falls falsch:* _____	❒	❒
b) Gilt $f'(-2) = 3$, so hat die Ableitung von f an der Stelle 3 den Wert 2. *Korrektur, falls falsch:* _____	❒	❒
c) Existiert für f die momentane Änderungsrate in x_0, so ist f differenzierbar in x_0. *Korrektur, falls falsch:* _____	❒	❒

Aufgabe A2

Entscheide, ohne zu rechnen, welches Vorzeichen die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^2$ an der Stelle x_0 mit

	Positiv	Negativ
a) $x_0 = -3$ hat.	❒	❒
b) $x_0 = 30$ hat.	❒	❒

Aufgabe A3

Bestimme die Ableitung in x_0 mithilfe des Differenzenquotienten.

a) $f(x) = 0{,}2x^3;\ x_0 = 1{,}5$

b) $f(x) = \frac{1}{x};\ x_0 = -5$

Aufgabe A4

Bestimme die Ableitung in $x_0 = u$ mithilfe des Differenzenquotienten.

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = 5x^3 - 7x + 2$

c) $f(x) = 4x^3 - \frac{2}{x}$

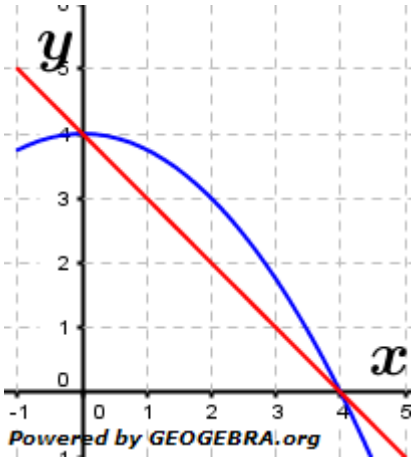
Tipp: Verwende das Pascalsche Dreieck.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A5

Entscheide, welchen Wert die Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$ besitzt. Kreuze die richtige Lösung an.

a)

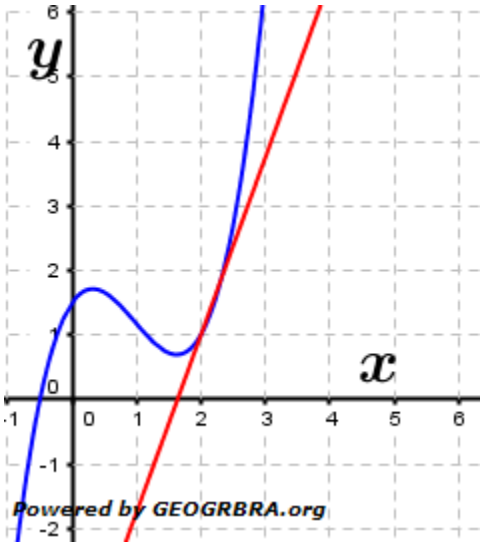


-1

$-0{,}9$

1

b)



$1{,}5$

$2{,}75$

$3{,}25$

Aufgabe A6

Der Temperaturverlauf in einem Ofen lässt sich durch die Funktion T mit $T(t) = 40 \cdot \sqrt{t} + 20$ ($0 \leq t \leq 20$, t in Minuten, T in $°C$) beschreiben.

a) Berechne $T(16) - T(4)$.

b) Steigt oder fällt die Temperatur für $t = 16$?

c) Was bedeutet $T'(4) = 10$:

I.) In der nächsten Minute steigt die Temperatur um etwa 10 Grad an.

II.) In der nächsten Minute steigt die Temperatur um genau 10 Grad an.

Aufgabe A7

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - x^2$. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f für:

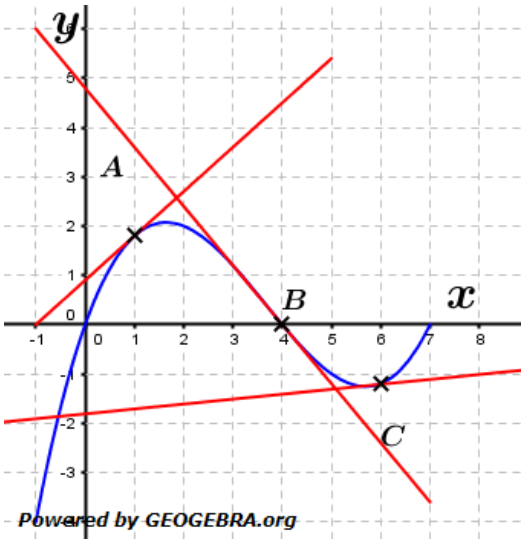
a) $x_0 = 1$

b) $x_1 = 0$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A8

In welchem der Punkte A, B oder C ist die Tangenten an den Graphen falsch eingezeichnet?



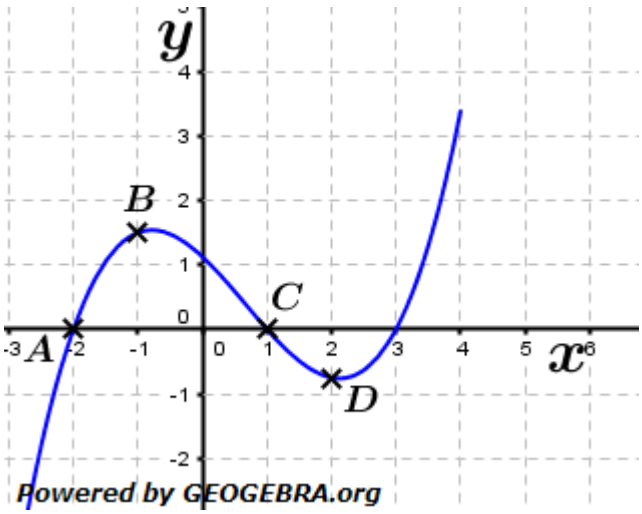
A

B

C

Aufgabe A9

In den Punkten A, B, C und D sollen die Steigungen des Graphen der Funktion verglichen werden. Ordne die Punkte nach ansteigenden Steigungswerten.



Welches ist die richtige Reihenfolge?

$BADC$

$CDBA$

$DCAB$

$CBDA$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A10

Bestimme für f mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x^3$ die Gleichung der Tangente durch den Punkt $P(3|f(3))$.

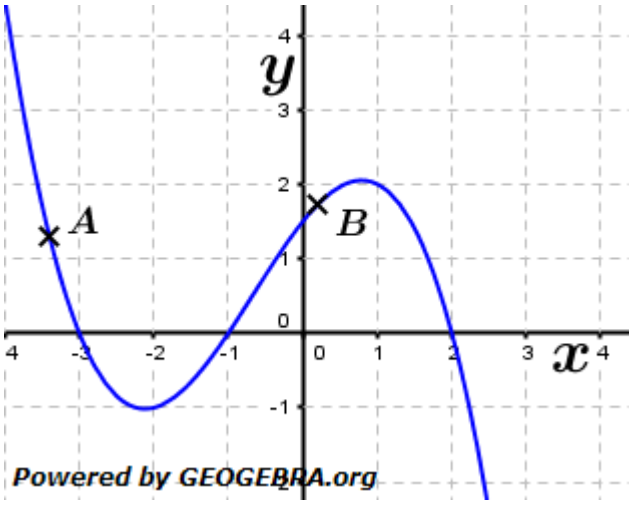
Tipp: Verwende das Pascalsche Dreieck.

Aufgabe A11

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2$. An welcher Stelle x_0 nimmt die Steigung der Tangente den Wert $m = 4$ an?

Aufgabe A12

Bestimme zeichnerisch die Steigung der Tangente an den Graphen in den Punkten A und B und kreuze die richtige Lösung an.



Steigung

in A	in B
$-2{,}5$	$0{,}5$
-4	1
-5	$1{,}5$

Aufgabe A13

Zu welcher Tangentensteigung m gehört dieses Verkehrsschild?
Wie groß ist der Winkel zwischen der Horizontalen und dem Anstieg?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

	Wahr	Falsch
a) Ableitung und momentane Änderungsrate beschreiben denselben Sachverhalt.	☒	☐
b) Gilt $f'(-2) = 3$, so hat die Ableitung von f an der Stelle 3 den Wert 2. *Die Ableitung hat an der Stelle -2 den Wert 3.*	☐	☒
c) Existiert für f die momentane Änderungsrate in x_0, so ist f differenzierbar in x_0.	☒	☐

Lösung A2

Der Graph der Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel in $S(0|4)$. Deshalb gilt:

	Positiv	Negativ
a) $x_0 = -3$	☒	☐
b) $x_0 = 30$	☐	☒

Lösung A3

a)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{0{,}2(1{,}5+h)^3-0{,}2\cdot 1{,}5^3}{h} = \frac{0{,}2\cdot(1{,}5^3+6{,}75h+4{,}5h^2+h^3-1{,}5^3)}{h} = \frac{0{,}2\cdot(h^3+4{,}5h^2+6{,}75h)}{h}$$
$$= \frac{0{,}2h(h^2+4{,}5h+6{,}75)}{h} = \frac{0{,}2(h^2+4{,}5h+6{,}75)}{1}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(1{,}5) = \lim_{h\to 0} 0{,}2(h^2+4{,}5h+6{,}75) = 1{,}35$$

b)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\frac{1}{-5+h}-\frac{1}{-5}}{h} = \frac{-\frac{1}{(5-h)}+\frac{1}{5}}{h} = \frac{\frac{-5+5-h}{5\cdot(5-h)}}{h} = \frac{-h}{5h\cdot(5-h)} = -\frac{1}{5\cdot(5-h)}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(5) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{5\cdot(5-h)} = -\frac{1}{25}$$

Aufgabe A4

a)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+h)-f(u)}{u+h-h} = \frac{(u+h)^4-u^4}{h} = \frac{u^4+4u^3h+6u^2h^2+4uh^3+h^4-u^4}{h} = \frac{h(h^3+4uh^2+6u^2h+4u^3)}{h}$$
$$= (h^3+4uh^2+6u^2h+4u^3)$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(u) = \lim_{h\to 0}(h^3+4uh^2+6u^2h+4u^3) = 4u^3$$

b)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+h)-f(u)}{u+h-u} = \frac{5\cdot(u+h)^3-7\cdot(u+h)+2-(5u^3-7u+2)}{h}$$
$$= \frac{5\cdot(u^3+3u^2h+3uh^2+h^3)-7u-7h+2-5u^3+7u-2}{h}$$
$$= \frac{\cancel{5u^3}+15u^2h+15uh^2+5h^3\cancel{-7u}-7h\cancel{+2}\cancel{-5u^3}\cancel{+7u}\cancel{-2}}{h} = \frac{15u^2h+15uh^2+5h^3-7h}{h} = \frac{h(15u^2+15uh+5h^2-7)}{h}$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(u) = \lim_{h\to 0}(15u^2+15uh+5h^2-7) = 15u^2-7$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+h)-f(u)}{u+h-u}=\frac{4\cdot(u+h)^3-4u^3}{h}-\left(\frac{\frac{2}{u+h}-\frac{2}{u}}{h}\right)=\frac{4(\cancel{u^3}+3u^2h+3uh^2+h^3\cancel{-u^3})}{h}-\frac{\frac{2u-2(u+h)}{u\cdot(u+h)}}{h}$$
$$=\frac{4h(3u^2+3uh+h^2)}{h}-\frac{-2h}{uh\cdot(u+h)}=4(3u^2+3uh+h^2)+\frac{2}{u(u+h)}$$
$$\frac{dy}{dx}=f'(u)=\lim_{h\to 0}4(3u^2+3uh+h^2)+\frac{2}{u(u+h)}=12u^2+\frac{2}{u^2}$$

Lösung A5

a) $\boxed{-1}$ b) $\boxed{2{,}75}$

Lösung A6

a) $T(16)-T(4)=40\cdot\sqrt{16}+20-\left(40\cdot\sqrt{4}+20\right)=180-100=80.$

b) $T(17)-T(16)=40\cdot\sqrt{17}+20-\left(40\cdot\sqrt{16}+20\right)>0$
Für $t=16$ steigt die Temperatur.

c) In der nächsten Minute steigt die Temperatur um etwa 10 Grad an.

Lösung A7

a)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}=\frac{4-(1+h)^2-(4-1)}{h}=\frac{4-\left(1+2h+h^2\right)-3}{h}=\frac{3-2h-h^2-3}{h}=\frac{-h(2+h)}{h}$$
$$\frac{dy}{dx}=f'(1)=\lim_{h\to 0}-(2+h)=-2$$
$$f(1)=4-1=3$$
$$t(x)=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$$
$$t(x)=-2\cdot(x-1)+3=-2x+5$$

b)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}=\frac{4-h^2-4}{h}=\frac{-h^2}{h}=-h$$
$$\frac{dy}{dx}=f'(0)=\lim_{h\to 0}-h=0$$
$$f(0)=4-0=4$$
$$t(x)=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$$
$$t(x)=0\cdot(x-0)+4=4$$

Lösung A8

Falsch ist die Tangente in C.

Lösung A9

Richtig ist $\boxed{CDBA}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A10

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h) - f(3)}{1+h-1} = \frac{0{,}2 \cdot (3+h)^3 - 0{,}2 \cdot 3^3}{h} = \frac{0{,}2 \cdot (27 + 27h + 9h^2 + h^3) - 0{,}2 \cdot 27}{h}$$

$$= \frac{5{,}4 + 5{,}4h + 1{,}8h^2 + 0{,}2h^3 - 5{,}4}{h} = \frac{h(0{,}2h^2 + 1{,}8h + 5{,}4)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(3) = \lim_{h \to 0} (0{,}2h^2 + 1{,}8h + 5{,}4) = 5{,}4$$

$$f(3) = 0{,}2 \cdot 27 = 5{,}4$$

$$t(x) = f'(3) \cdot (x-3) + f(3)$$

$$t(x) = 5{,}4 \cdot (x-3) + 5{,}4 = 5{,}4x - 10{,}8$$

Lösung A11

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + 2 - (-x_0^2 + 2)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -\frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = -(x + x_0)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} -(x + x_0) = -2x_0$$

$$f'(x_0) = 4 = -2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -2$$

An der Stelle $x_0 = -2$ nimmt die Steigung der Tangente den Wert $m = 4$ an.

Lösung A12

Die Steigung in A ist $\boxed{-4}$.

Die Steigung in B ist $\boxed{1}$.

Lösung A13

Das Verkehrsschild gibt ein Gefälle von $22\,\%$ an. Die Tangentensteigung beträgt somit $m = -0{,}22$.
Der Winkel zwischen der Horizontalen und dem Gefällt beträgt:
$\alpha = 180\,° + tan^{-1}(-0{,}22) \approx 167{,}6\,°$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne - wie im Beispiel - mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung im Punkt $x_0 = 4$.

Beispiel: Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen:

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$$

$$= \frac{x_0+h-x_0}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

Grenzwert ermitteln: $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

a) $f_1(x) = \sqrt{x-1}$ b) $f_2(x) = \sqrt{x+16}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ d) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

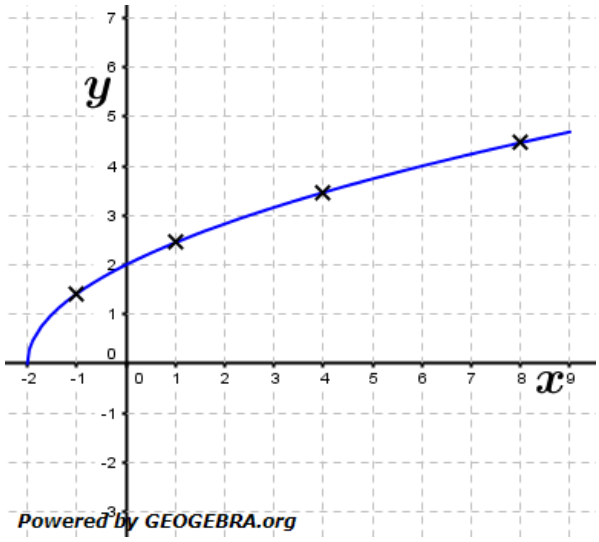
e) $f_5(x) = -\frac{1}{x-1}$ f) $f_6(x) = -x + \frac{1}{x}$ g) $f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$ h) $f_8(x) = \sqrt{3x+1}$

Aufgabe A2

Die Grafik zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2x+4}$. Berechne mit Hilfe des Differenzenquotienten die Tangentensteigungen für:

a) $x_0 = -1$
b) $x_0 = 1$
c) $x_0 = 4$
d) $x_0 = 8$

Gib die Funktionsgleichungen der Tangenten an und zeichne sie in nebenstehender Grafik ein.



Aufgabe A3

Ein Koffer fällt aus einem in $1000\,m$ Höhe über dem Meer fliegenden Flugzeug aus der Ladeklappe. Die Fallhöhe des Koffers kann mit der Funktion $s_1(t) = 5t^2$ annähernd beschrieben werden ($s_1(t)$ in Metern, t in Sekunden).

a) In welcher Höhe befindet sich der Koffer nach 9 Sekunden? Wie groß ist seine Fallgeschwindigkeit in v_1 in km/h in diesem Moment? Berechne diese Geschwindigkeit v_1 mithilfe des Differenzenquotienten.
Nach welcher Zeit trifft der Koffer auf der Meeresoberfläche auf?

Nach dem Auftreffen auf der Meeresoberfläche kann der Sinkweg des Koffers in den ersten 5 Sekunden annähernd beschrieben werden durch die Funktion $s_2(t) = 6 - \frac{1}{x+0{,}5} - \frac{1}{(x+0{,}5)^2}$ ($s_2(t)$ in Metern, t in Sekunden).

b) Wie tief ist der Koffer 3 Sekunden nach dem Auftreffen auf die Meeresoberfläche gesunken? Welche Sinkgeschwindigkeit v_2 in km/h hat er zu diesem Zeitpunkt. Berechne v_2 wiederum mithilfe des Differenzenquotienten.

Aufgabe A4

Ein $100\,m$-Läufer hat zum Zeitpunkt t die Strecke $s(t)$ (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter) zurückgelegt. Die zugehörige Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist $v(t)$. Ordne den beschriebenen Sachverhalten (A) – (E) das richtige Kärtchen ❶, ❷, ❸, ❹ oder ❺ zu.

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
Laut seines Trainers lag die Durchschnittsgeschwindigkeit des Läufers zwischen 2 s und 5 s auf Rekord-niveau	Einen tollen Laufstil. Seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 2,5 s zeigte deutlich, dass	Tatsächlich war die Strecke, die der Läufer zum Zeitpunkt 2,5 s zurückgelegt hat, so gewaltig, dass die	Laut seines Trainers lag die Durchschnittsgeschwindigkeit des Läufers zwischen 2 s und 5 s auf Rekord-niveau	Sportbegeisterte wird vor allem die mittlere Änderungsrate von v im Intervall $[2;5]$ beeindrucken

❶ $s'(2{,}5)$

❷ $v'(2{,}5)$

❸ $s(2{,}5)$

❹ $\frac{v(5)-v(2)}{3}$

❺ $\frac{s(5)-s(2)}{5-2}$

Aufgabe A5

Bei einer Pipeline wird die seit Mitternacht durchgeflossene Ölmenge durch die Funktion $f(t)$ beschrieben (t in s, $s(t)$ in m^3).

a) Zwischen 3 Uhr und 8 Uhr sind $450\,m^3$ durch die Pipeline geflossen. Wie hoch ist die mittlere Durchschnittsrate im Intervall $[3;8]$?

b) Um 6 Uhr ist die momentane Durchflussrate $30\,m^3/h$. Wie viel Öl fließt bis $6{:}10$ Uhr durch die Pipeline, wenn die Durchflussrate in diesem Zeitraum konstant bleibt?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) Detaillierte Lösung:

$f_1(x) = \sqrt{x-1}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\sqrt{4-1+h}-\sqrt{4-1}}{h} = \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{3+h-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}$

$= \frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$

$f_1'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$

b) $f_2'(4) = \frac{1}{20}\sqrt{5}$ c) $f_3'(4) = 4$ d) $f_4'(4) = -\frac{1}{16}$

e) $f_5'(4) = \frac{1}{9}$ f) $f_6'(4) = -\frac{17}{16}$ g) $f_7'(4) = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ h) $f_8'(4) = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

Lösung A2

a) Detaillierte Lösung

$f(x) = \sqrt{2x+4}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{\sqrt{-2+4+h}-\sqrt{-2+4}}{h} = \frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$

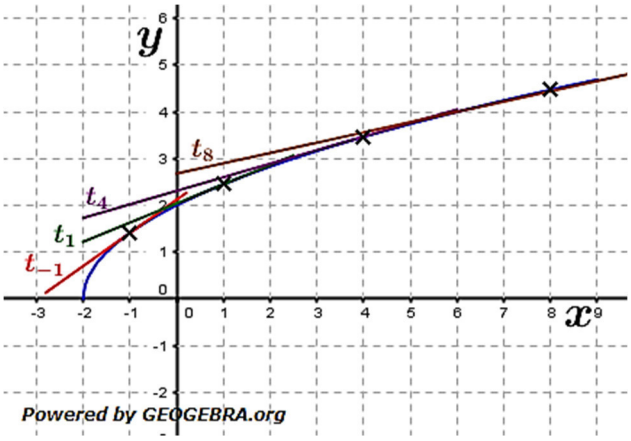
$= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$

$f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Die Tangente an f hat im Punkt $P(-1|\sqrt{2})$ die Steigung $m_t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$t_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x+1) + \sqrt{2}$

$t_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}$



b) Die Tangente an f hat im Punkt $P(1|\sqrt{6})$ die Steigung $m_t = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

$t_b(x) = \frac{1}{6}\sqrt{6}(x-1) + \sqrt{6}$

$= \frac{1}{6}\sqrt{6}x + \frac{5}{6}\sqrt{6}$

c) Die Tangente an f hat im Punkt $P(4|2\sqrt{3})$ die Steigung $m_c = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

$t_c(x) = \frac{1}{6}\sqrt{3}(x-4) + 2\sqrt{3}$

$= \frac{1}{6}\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{3}$

d) Die Tangente an f hat im Punkt $P(8|2\sqrt{5})$ die Steigung $m_d = \frac{1}{10}\sqrt{5}$.

$t_d(x) = \frac{1}{10}\sqrt{5}(x-8) + 2\sqrt{5}$

$= \frac{1}{10}\sqrt{5}x + \frac{6}{5}\sqrt{5}$

Lösung A3

a) $s_1(t) = 5t^2$

$s_1(9) = 5\cdot 9^2 = 405$

Nach 9 *Sekunden befindet sich der Koffer in* $1000 - 405 = 595\,m$ *Höhe.*

$\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{s_1(t_0+h)-s_1(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{5\cdot(9+h)^2-5\cdot 9^2}{h} = \frac{405+90h+5h^2-405}{h} = \frac{h(5h+90)}{h} = 5h+90$

$\lim\limits_{h\to 0} 5h+90 = 90$

Der Koffer hat in diesem Moment eine Geschwindigkeit v_1 *von* $90\frac{m}{s}$.

b) $s_2(t) = 6 - \frac{1}{x+0{,}5} - \frac{1}{(x+0{,}5)^2}$

$s_2(3) = 6 - \frac{1}{3+0{,}5} - \frac{1}{(3+0{,}5)^2} = 5{,}6$

Nach 3 *Sekunden befindet sich der Koffer etwa in* $5{,}6\,m$ *Tiefe.*

$$\frac{\Delta s_2}{\Delta t} = \frac{s_2(t_0+h)-s_2(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{6-\frac{1}{(3+h+0{,}5)}-\frac{1}{(3+h+0{,}5)^2}-\left(6-\frac{1}{3+0{,}5}-\frac{1}{(3+0{,}5)^2}\right)}{h} = \frac{-\frac{1}{(3{,}5+h)}-\frac{1}{(3{,}5+h)^2}+\frac{1}{3{,}5}+\frac{1}{3{,}5^2}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-3{,}5^2\cdot(3{,}5+h)-3{,}5^2+3{,}5\cdot(3{,}5+h)^2+(3{,}5+h)^2}{3{,}5^2\cdot(3{,}5+h)^2}}{h} = \frac{-3{,}5^3-3{,}5^2h-3{,}5^2+3{,}5^3+24{,}5h+3{,}5h^2+3{,}5^2+7h+h^2}{h\cdot 3{,}5^2\cdot(3{,}5+h)^2}$$

$$= \frac{-3{,}5^2h+24{,}5h+3{,}5h^2+7h+h^2}{h\cdot 3{,}5^2\cdot(3{,}5+h)^2} = \frac{h(31{,}5-3{,}5^2+4{,}5h)}{h\cdot 3{,}5^2\cdot(3{,}5+h)^2} = \frac{19{,}25+4{,}5h}{3{,}5^2(3{,}5+h)^2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{19{,}25+4{,}5h}{3{,}5^2(3{,}5+h)^2} = \frac{19{,}25}{3{,}5^4} = 0{,}1287$$

Nach 3 *Sekunden hat der Koffer eine Sinkgeschwindigkeit* v_2 *von etwa* $0{,}13\,\frac{m}{s}$.

Lösung A4

Text (A) beschreibt eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Also ist Kärtchen ❹ mit $\frac{v(5)-v(2)}{3}$ das Richtige.

Text (B) beschreibt eine Momentangeschwindigkeit. Die Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit, also ist Kärtchen ❶ mit $s'(2{,}5)$ das Richtige.

Text (C) beschreibt eine zurückgelegte Strecke, also ist Kärtchen ❸ mit $s(2{,}5)$ das Richtige.

Text (D) beschreibt eine momentane Änderungsrate und zwar die von v. Also ist Kärtchen ❷ mit $v'(2{,}5)$ das Richtige.

Text (E) beschreibt eine mittlere Änderungsrate von v im Intervall $[2;5]$. Also ist Kärtchen ❹ mit $\frac{v(5)-v(2)}{3}$ das Richtige.

Beachte:

Text (A) und **Text (E)** beschreiben ein und denselben Sachverhalt, wo hingegen für Kärtchen ❺ keine textuelle Beschreibung vorhanden ist.

Lösung A5

a) $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{450}{8-3} = 90$

Die mittlere Durchflussrate im Intervall $[3;5]$ betrug $90\,m^3/h$.

b) Die mittlere Durchflussrate um 6 Uhr ist $30\,m^3/h$, bzw. $\frac{30}{60}\,m^3/min$, also $0{,}5\,m^3/min$. Bis $6{:}10$ Uhr fließen also $10\cdot 0{,}5\,m^3 = 5\,m^3$ durch die Pipeline.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne wie im Beispiel mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung der Funktion f.

Beispiel — Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen

$$f(x) = x^2 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{h(h+2x)}{h} = h+2x$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} h+2x = 2x$$

a) $f_1(x) = 3x$ b) $f_2(x) = 3x^2$ c) $f_3(x) = x^2 - x$ d) $f_4(x) = x^3$
e) $f_5(x) = x^2 + 5$ f) $f_6(x) = x^3 + 1$ g) $f_7(x) = -2x^2$ h) $f_8(x) = -x^4$

Tipp: Aufgabe d), f) und h) mit dem Pascalsche Dreieck.

Aufgabe A2

Berechne wie im Beispiel mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung der Funktion f.

Beispiel — Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{xh(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

a) $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f_3(x) = x^2 - x$ d) $f_4(x) = x + \frac{1}{x}$
e) $f_5(x) = -x^2 + x$ f) $f_6(x) = x^2 - x + 1$ g) $f_7(x) = -\frac{1}{x^2}$ h) $f_8(x) = -x - \frac{1}{x}$

Aufgabe A3

Ein Taucher befindet sich zum Zeitpunkt t in der Tiefe $f(t)$ unter der Wasseroberfläche (t in min, $f(t)$ in m). Nach zehn Minuten befindet er sich in $24\,m$ Tiefe und sinkt weiter nach unten.

a) Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[10; 12]$ ist 3. Was bedeutet dies in diesem Zusammenhang? Berechne die Tiefe des Tauchers nach 12 Minuten.

b) Die momentane Änderungsrate von f nach 10 Minuten beträgt $2{,}8$. Welche der Angaben auf den Kärtchen sind richtig, welche Angaben sind möglicherweise falsch.

❶ $\boldsymbol{f'(2,8)}$

❷ Die Tiefe des Tauchers nimmt pro Minute um $2{,}8\,m$ zu.

❸ Die Sinkgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ min beträgt $2{,}8\,\frac{m}{min}$.

❹ $\boldsymbol{f(11) = 26{,}8}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A4

Ein Radfahrer hat zum Zeitpunkt t nach einem Start die Strecke $s(t)$ seiner Fahrstrecke zurückgelegt (t in h, $s(t)$ in km).

a) Die mittlere Änderungsrate von s im Intervall $[2;5]$ ist 15. Was bedeutet dies in diesem Zusammenhang? Wie weit ist der Radfahrer in diesem Zeitraum gefahren?

b) Die momentane Änderungsrate von $s'(2)$ ist 18. Was bedeutet dies in diesem Zusammenhang? Wie lange benötigt der Radfahrer für die nächsten $1{,}5\,km$, wenn diese Änderungsrate bleibt?

Aufgabe A5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = sin(x)$. Bestimme mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lösungshinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe benötigst du das Additionstheorem

$$sin(\alpha) - sin(\beta) = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = 3x \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{x+h-x} = \frac{3\cdot(x+h) - 3x}{h} = \frac{3x+3h-3x}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \\ \frac{dy}{dx} = f_1{}'(x) = \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3 \end{array} \right.$$

b) $f_2'(x) = 6x$ c) $f_3'(x) = 2x - 1$

Detaillierte Lösung für d)

$$f_4(x) = x^3 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{x_0+h-x_0} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ \quad = \frac{h(h^2+3xh+3x^2)}{h} = h^2+3xh+3x^2 \\ \frac{dy}{dx} = f_4{}'(x) = \lim\limits_{h\to 0} h^2+3xh+3x^2 = 3x^2 \end{array} \right.$$

e) $f_5'(x) = 2x$ f) $f_6'(x) = 3x^2$ g) $f_7'(x) = -4x$ h) $f_8'(x) = -4x^3$

Lösung A2

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{x+h-x} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} = \frac{x^2-(x+h)^2}{x^2h(x+h)^2} \\ \quad = -\frac{2xh+h^2}{x^2h(x+h)^2} = -\frac{h(2x+h)}{x^2h(x+h)^2} = -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \\ \frac{dy}{dx} = f_1'(x) = \lim\limits_{h\to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \end{array} \right.$$

b) $f_2'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ c) $f_3'(x) = 2x - 1$ d) $f_4'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

e) $f_5'(x) = -2x + 1$ f) $f_6'(x) = 2x - 1$ g) $f_7'(x) = \frac{2}{x^3}$ h) $f_8'(x) = -1 + \frac{1}{x^2}$

Lösung A3

a) Die Angabe bedeutet, dass der Taucher von der 10. Bis zur 12. Minute um $3\frac{m}{min}$ tiefer sinkt.
$f(12) = f(10) + 2\cdot 3 = 24 + 6 = 30$
Die Tiefe des Tauchers nach 12 *Minuten beträgt* $30\,m$.

b) Die Angabe bedeutet, dass die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 10\,min$ $2{,}8\frac{m}{min}$ beträgt.
Damit ist: Kärtchen ❶ richtig, Kärtchen ❷ falsch, da hier keine Aussage zum Zeitpunkt gemacht wird, Kärtchen ❸ richtig sowie Kärtchen ❹ ebenfalls richtig.

Lösung A4

a) Die Angabe bedeutet, dass der Radfahrer von der 2. bis zur 5. Stunde mit einer Geschwindigkeit von $15\frac{km}{h}$ unterwegs ist. Die gefahrene Strecke in diesen 3 Stunden ist $45\,km$ lang.

b) $s'(2) = 18$ bedeutet, dass die momentane Geschwindigkeit des Radfahrers zum Zeitpunkt $t = 2$ $18\,km/h$ beträgt.
$18\frac{km}{h}\cdot t_0 = 1{,}5\,km$
$t_0 = \frac{1{,}5}{18} = \frac{1}{6}\,h = 10\,min$
Der Radfahrer benötigt für die nächsten $1{,}5\,km$ *etwa* $10\,min$.

Lösung A5

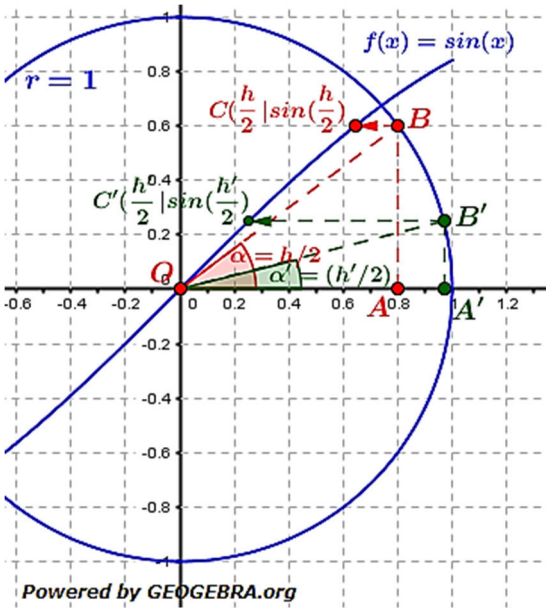
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}+h-\frac{\pi}{6}}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

Es gilt das Additionstheorem $sin(\alpha)-sin(\beta)=2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+h+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+h-\frac{\pi}{6}}{2}\right)=2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\,cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$ | Der Bruch wurde mit $\frac{1}{2}$ erweitert.

Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis.



Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

Mit kleiner werdendem h gilt für h':
$sin\left(\frac{h'}{2}\right)=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{A'B'}}{1}=\overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle|sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.

Mit $h\longrightarrow 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung. Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\longrightarrow 0}cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{h}{2}\right)\cdot 1=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Berechne $f'(x)$ mit der „x"-Methode, überprüfe dein Ergebnis mit dem GTR/WTR.

a) $f_1(x) = 2x^2 + x;\ x_0 = 4$ b) $f_2(x) = \frac{5}{x};\ x_0 = -2$

c) $f_3(x) = \sqrt{x};\ x_0 = 3$ d) $f_4(x) = x^2 + 6x;\ x_0 = 2$

e) $f_5(x) = x^2 - 6x;\ x_0 = 2.$ f) $f_6(x) = 2x - x^4;\ x_0 = -3$

Tipp: Nutze für Aufgabe f) das Pascalsche Dreieck

Aufgabe A2

Berechne $f'(x)$ mit der „h"-Methode, überprüfe dein Ergebnis mit dem GTR/WTR.

a) $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2;\ x_0 = 3$ b) $f_2(x) = 2x^2 - x;\ x_0 = -1$

c) $f_3(x) = -x^3 + 4x^2;\ x_0 = 2$ d) $f_4(x) = x^2 - x + 2;\ x_0 = \frac{4}{3}$

e) $f_5(x) = \frac{2}{x};\ x_0 = -3$ f) $f_6(x) = \sqrt{4x + 4};\ x_0 = 2$

Tipp: Nutze für Aufgabe c) das Pascalsche Dreieck

Aufgabe A3

Berechne - wie im Beispiel - mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Ableitung der Funktion f.

Beispiel:

$f(x) = \sqrt{x}$

Differenzenquotient aufstellen und vereinfachen:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Grenzwert ermitteln: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

a) $f_1(x) = \sqrt{x-1}$ b) $f_2(x) = \sqrt{x+16}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ d) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f_5(x) = -\frac{1}{x-1}$ f) $f_6(x) = -x + \frac{1}{x}$ g) $f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$ h) $f_8(x) = \sqrt{3x+1}$

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = cos(x)$. Bestimme mit Hilfe des Differenzenquotienten die Steigung im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Lösungshinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe benötigst du das Additionstheorem

$$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2\,sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = 2x^2 + x \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x) - f_1(4)}{x-4} = \frac{2x^2 + x - 36}{x-4} = \frac{(2x+9)(x-4)}{x-4} = 2x + 9 \\ \frac{dy}{dx} = f_1{}'(4) = \lim\limits_{x \to 4} 2x + 9 = 17 \end{array} \right.$$

Detaillierte Lösung für b)

$$f_2(x) = \frac{5}{x} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x) - f_2(-2)}{x-2} = \frac{\frac{5}{x} - \frac{5}{2}}{x-2} = \frac{\frac{10-5x}{2x}}{x-2} = \frac{10-5x}{2x \cdot (x-2)} = \frac{5(2-x)}{2x \cdot (x-2)} \\ \quad = -\frac{5(x-2)}{2x \cdot (x-2)} = -\frac{5}{2x} \\ \frac{dy}{dx} = f_2{}'(-2) = \lim\limits_{x \to -2} -\frac{5}{2x} = \frac{5}{4} \end{array} \right.$$

c) $f_3'(3) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}$ d) $f_4'(2) = 14$ e) $f_5'(2) = -2$ f) $f_6'(-3) = 110$

Lösung A2

a) $f_1'(3) = 3$ b) $f_2'(-1) = -5$ c) $f_3'(2) = 4$ d) $f_4'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$

e) $f_5'(-3) = -\frac{2}{9}$ f) $f_6'(2) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Lösung A3

Detaillierte Lösung für a)

$$f_1(x) = \sqrt{x-1} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{x+h-x} = \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})}{h \cdot (\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} \\ \quad = \frac{x+h-1-(x-1)}{h \cdot (\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \\ \frac{dy}{dx} = f_1{}'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-1}} \end{array} \right.$$

b) $f_2'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+16}}$ c) $f_3'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$

Detaillierte Lösung für d)

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+h}}}{h} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+h}} \\ \quad = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{h \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+h} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{x - (x+h)}{h \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+h} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{-1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+h} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \\ \frac{dy}{dx} = f_4'(x) = \lim\limits_{h \to 0} -\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+h} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = -\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \end{array}$$

e) $f_5'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ f) $f_6'(x) = -1 - \frac{1}{x^2}$ g) $f_7'(x) = -\frac{2}{\sqrt{(2x-2)^3}}$ h) $f_8'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

Lösung A4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3} + h - \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}$$

Es gilt das Additionstheorem $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + h + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + h - \frac{\pi}{3}}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

| Der Bruch wurde mit $\frac{1}{2}$ erweitert.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

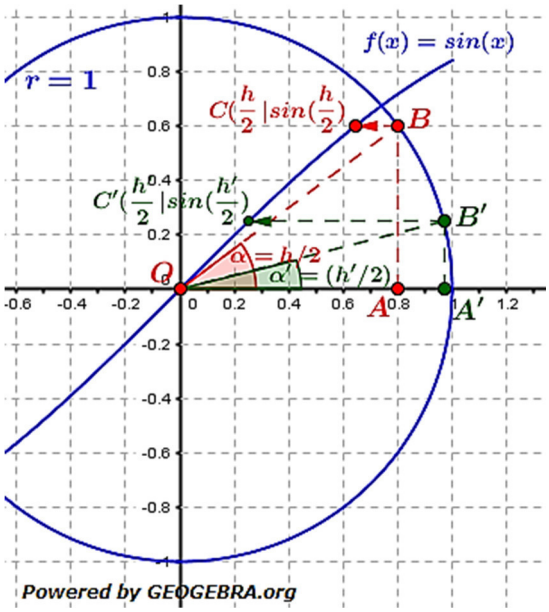
Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis.

Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

Mit kleiner werdendem h gilt für h':

$sin\left(\frac{h'}{2}\right)=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{A'B'}}{1}=\overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle|sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.

Mit $h\longrightarrow 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung.



Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{h}{2}\right)\cdot 1=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

Aufgabe A1

Ein Fahrzeug wird abgebremst. Für den in der Zeit t (in Sekunden) zurückgelegten
Weg $s(t)$ (in Metern) gilt: $s(t) = 20t - t^2;\ t \in [0; 10]$.

a) Berechne den zurückgelegten Weg nach 5 Sekunden bzw. nach 8 Sekunden.

b) Bestimme mithilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die momentane Änderungsrate $s'(t)$ des Fahrzeugs nach 6 und nach 10 Sekunden.

c) Warum kann die angegebene Formel nicht für $t = 11\,s$ gelten?

Aufgabe A2

Ein Körper bewegt sich so, dass er in der Zeit t den Weg $s(t) = 4t^2$ (s in m, t in s) zurücklegt.
Bestimme mithilfe des Differenzenquotienten die momentane Änderungsrate von $s(t)$ zu den Zeiten $t_0 = 1$ und $t_1 = 5$.
Welche Bedeutung hat die momentane Änderungsrate von $s(t)$?

Aufgabe A3

Begründe (ohne zu rechnen), welches Vorzeichen die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 5$ an der Stelle x_0 hat.

a) $x_0 = 3$ b) $x_0 = -5$ c) $x_0 = 100$ d) $x_0 = 0$.

Welche Bedeutung hat die momentane Änderungsrate von $s(t)$?

Aufgabe A4

Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}0075x^2 + 3x$ beschreibt modellhaft die Baukosten für eine Wohnung von $x\ m^2$ Wohnfläche ($20 \le x \le 200$, $f(x)$ in $1000\,€$). Es ist $f'(x) = -0{,}015x + 3$.

a) Berechne $f(80)$ und $f'(80)$. Was bedeuten diese Größen in diesem Kontext?

b) Berechne durch lineare Näherung mithilfe von $f(80)$ und $f'(80)$ näherungsweise die Herstellkosten für ein $82\,m^2$ große Wohnung und vergleiche mit dem Funktionswert $f(82)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $s(5) = 20 \cdot 5 - 5^2 = 75$
$s(8) = 20 \cdot 8 - 8^2 = 96$
Das Fahrzeug hat nach 5 *Sekunden* $75\,m$ *und nach* 8 *Sekunden* $96\,m$ *zurückgelegt.*

b) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{t+h-t} = \frac{20(t+h)-(t+h)^2-(20t-t^2)}{h} = \frac{20t+20h-t^2-2th-h^2-20t+t^2}{h} = \frac{h(20-2t-h)}{h}$
$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \lim\limits_{h \to 0} 20 - 2t - h = 20 - 2t$
$s'(6) = 20 - 12 = 8$
$s'(10) = 20 - 20 = 0$

c) Da das Fahrzeug nach 10 Sekunden bereits zum Stillstand gekommen ist wegen $s'(10) = 0$ (siehe Aufgabenteil b)) kann die Formel nicht für $t = 11\,s$ gelten.

Lösung A2

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{t+h-t} = \frac{4(t+h)^2-4t^2}{h} = \frac{4(t^2+2th+h^2)-4t^2}{h} = \frac{8th+h^2}{h} = \frac{h(8t+h)}{h} = 8t + h$
$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \lim\limits_{h \to 0} 8t + h = 8t$
$s'(1) = 8 \cdot 1 = 8$
$s'(5) = 8 \cdot 5 = 40$

Lösung A3

Der Graph der Funktion f ist für $x \in \mathbb{R}$ monoton fallend und hat in $x_0 = 0$ einen Sattelpunkt, also eine Stelle mit waagrechter Tangente (Steigung = 0).
Somit hat die Ableitung von f außer in $x_0 = 0$ negatives Vorzeichen. In $x_0 = 0$ hat sie gar kein Vorzeichen, da die Null weder positiv noch negativ ist.
Die Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit.

Lösung A4

a) $f(80) = -0{,}0075 \cdot 80^2 + 3 \cdot 80 = 188{,}81$
$f'(80) = -0{,}015 \cdot 80 + 3 = 1{,}8$
$f(80)$ bedeutet, dass eine $80\,m^2$ Wohnung $188810\,€$ kostet.
$f'(80)$ bedeutet, dass die m^2-Kosten einer $80\,m^2$ Wohnung bei $1800\,€/m^2$ liegen.

b) Lineare Näherung: $K(82) = f(80) + 2 \cdot f'(80) = 188{,}81 + 2 \cdot 1{,}8 = 192{,}41$.
Funktionswert: $f(82) = -0{,}0075 \cdot 82^2 + 3 \cdot 82 = 195{,}57$
Zwischen linearer Näherung und echtem Funktionswert besteht ein Unterschied von $3{,}16$. Die echten Kosten für eine $82\,m^2$ Wohnung sind also $3160\,€$ höher als über die lineare Näherung.

Aufgabe A1

Bei einem Belastungstest mit einem Gummiexpander wird gemessen, wie viel Kraft F (in N) man braucht, damit sich der Expander um eine Strecke s (in cm) verlängert. Die Auswertung der Daten ergab den rechnerischen Zusammenhang $F(s) = 0{,}04s^3 - 0{,}6s^2 + 4s$.

a) Stelle die Abhängigkeit der Kraft von der Verlängerung für $s \leq 12\ cm$ graphisch dar.

b) Berechne die Ableitung $F'(s)$ bei $s = 2\ cm$ ($s = 5\ cm$ bzw. $s = 10\ cm$).

c) Wenn man einen Luftballon aufbläst, geht dies zu Beginn verhältnismäßig schwer und dann allmählich leichter. Kannst du diese Beobachtung mit den für den Gummiexpander gewonnenen Erkenntnissen erklären?

Aufgabe A2

Ein Skiabfahrtsläufer legt in der Zeit t die Strecke $s(t) = 1{,}5t^2$ zurück (t in Sekunden nach dem Start, $s(t)$ in Meter).

a) Berechne die Geschwindigkeit fünf Sekunden nach dem Start. Berechne durch lineare Näherung mithilfe dieser Geschwindigkeit näherungsweise die nach sechs Sekunden zurückgelegte Strecke. Bestimme die Abweichung zu $s(6)$.

b) Bestimme die Formel für die Geschwindigkeit mit Hilfe der Ableitung und berechne die die Geschwindigkeit des Läufers fünf Sekunden und sechs Sekunden nach dem Start.

c) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start hat der Skifahrer die Geschwindigkeit $36\ m/s$?

d) Wann ist der Skifahrer $96\ m$ weit gefahren?

Aufgabe A3

Bei einer Pipeline gibt f die seit 6 Uhr durchgeflossene Ölmenge an (x in h nach 6 Uhr, $f(x)$ in m^3).

a) Erläutere die folgenden Angaben in dieser Sachsituation:

(1) $f(7) = 60$ (2) $\frac{f(7)-f(3)}{4} = 11.$ (3) $f'(5) = 12$

b) Berechne mit Hilfe von $f'(5) = 12$ näherungsweise die zwischen 11 und und $11{:}15$ Uhr durch die Pipeline geflossene Ölmenge.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A4

In eine Zisterne strömt Regenwasser. Jeden Tag werden aus der Zisterne ca. $100\,m^3$ Wasser für die Wasserversorgung eines Stadtteils entnommen. Beantworte die Teilaufgaben mithilfe der Grafik.

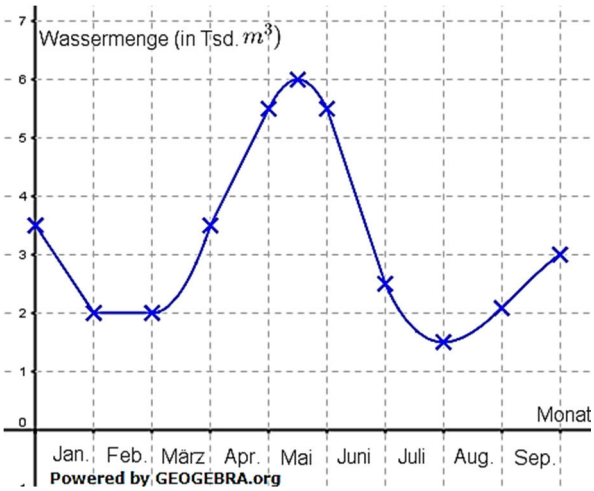
a) An welchem Tag war am meisten Wasser in der Zisterne?

b) In welchem Monat hat es am meisten geregnet? In welchem Monat hat es gar nicht geregnet?

c) In welchem Monat sind täglich $100\,m^3$ zugeflossen, in welchem Monat täglich $50\,m^3$?

d) An welchem Tag nach dem $1.6.$ hat es zu regnen begonnen?

e) Wie viel Wasser ist im September täglich im Mittel durch die Zisterne geflossen?



Zisterne der Festung El Jadida in Marokko
Von Guilandre - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0

Aufgabe A5

Ein Rennwagen legt in den ersten Sekunden nach einem fliegenden Start die Strecke $s(t) = 5t^2 + t$ zurück (t in s, $s(t)$ in m).

a) In welcher Zeit beschleunigt er von $50\,km/h$ auf $100\,km/h$?

b) Wie lange braucht er für die ersten $100\,m$ nach dem Start?

Lösung A1

a) Grafik untenstehend.

b) $\frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{F(x+h)-F(x)}{x+h-x} = \frac{0{,}04(s+h)^3-0{,}6(s+h)^2+4(s+h)-(0{,}04s^3-0{,}6s^2+4s)}{h}$

$= \frac{0{,}04(s^3+3s^2h+3sh^2+h^3)-0{,}6(s^2+2sh+h^2)+4s+4h-0{,}04s^3+0{,}6s^2-4s}{h}$

$= \frac{0{,}12s^2h+0{,}12sh^2+0{,}04h^3-1{,}2sh-0{,}6h^2+4h}{h} = \frac{h(0{,}12s^2+0{,}12sh+0{,}04h^2-1{,}2s-0{,}6h+4)}{h}$

$= 0{,}12s^2 + 0{,}12sh + 0{,}04h^2 - 1{,}2s - 0{,}6h + 4$

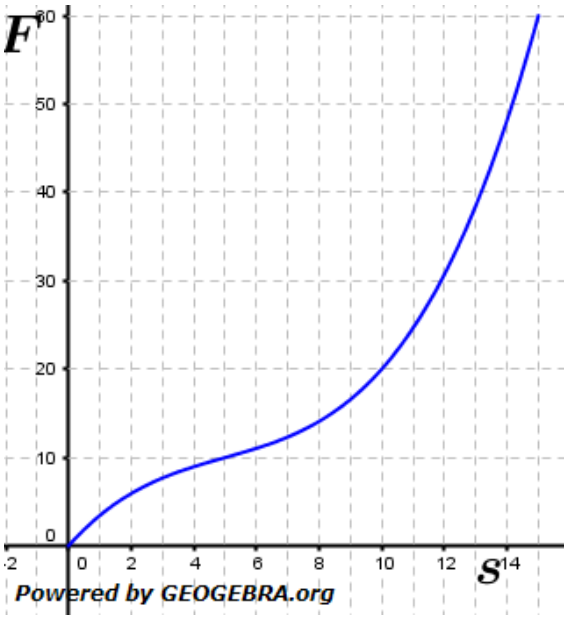
$\frac{dF}{ds} = F'(s) = \lim_{h\to 0} 0{,}12s^2 + 0{,}12sh + 0{,}04h^2 - 1{,}2s - 0{,}6h + 4 = 0{,}12s^2 - 1{,}2s + 4$

$F'(2) = 0{,}12 \cdot 2^2 - 1{,}2 \cdot 2 + 4 = 3{,}28$

$F'(5) = 0{,}12 \cdot 5^2 - 1{,}2 \cdot 5 + 4 = 1$

$F'(10) = 0{,}12 \cdot 10^2 - 1{,}2 \cdot 10 + 4 = 4$

c) Gemäß dem Ergebnis von zuvor ist der Wert von $F'(s)$ zunächst groß, fällt dann ab um kurz darauf wieder anzusteigen.
Dies deckt sich mit dem Aufblasen eines Luftballons, was zunächst schwerer, dann wesentlich leichter geht und zum Schluss – kurz vor dem Zerplatzen – wieder schwieriger ist.



Lösung A2

a) Wie berechnen zunächst die mittlere Geschwindigkeit für die ersten fünf Sekunden.

$s(0) = 0\,m; \quad s(5) = 1{,}5 \cdot 5^2 = 37{,}5\,m$

$\overline{v} = \frac{37{,}5-0}{5} = 7{,}5\frac{m}{s}.$

Strecke für 6 Sekunden mit dieser mittleren Geschwindigkeit:

$s = \overline{v} \cdot t = 7{,}5 \cdot 6 = 45\,m.$

Strecke für 6 Sekunden mit Formel $s(t)$:

$s(6) = 1{,}5 \cdot 6^2 = 54\ m$

Differenz: $54\ m - 45\,m = 9\,m$

b) Die Ableitung des Weges nach der Zeit ist die Geschwindigkeit.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{s+h-s} = \frac{1{,}5\cdot(t+h)^2-1{,}5\,t^2}{h} = \frac{1{,}5t^2+3ht+h^2-1{,}5t^2}{h} = \frac{h(3t+h)}{h} = 3t + h$

$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \lim_{h\to 0} 3t + h = 3t$

Damit lautet die Formel für die Geschwindigkeit des Läufers:

$v(t) = 3t$

$v(5) = 3 \cdot 5 = 15\frac{m}{s}; \quad v(6) = 3 \cdot 6 = 18\frac{m}{s}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) $v(t) = 36\frac{m}{s}$
$3t = 36 \implies t = 12$
Nach 12 *Sekunden erreicht der Läufer eine Geschwindigkeit von* $36\frac{m}{s}$.

d) $s(t) = 96$
$1{,}5 \cdot t^2 = 96$
$t^2 = 144 \implies t = 12$
Nach 12 *Sekunden ist der Läufer* $96\,m$ *weit gefahren.*

Lösung A3

a) $f(7) = 60$ bedeutet, dass zwischen 6 Uhr und 13 Uhr $60\,m^3$ Öl durch die Pipeline geflossen sind.
$\frac{f(7)-f(3)}{4} = 11$ bedeutet, dass die mittlere Durchflussmenge zwischen 9 Uhr und 13 Uhr $11\frac{m^3}{h}$ beträgt.
$f'(5) = 12$ bedeutet, dass die momentane Durchflussmenge um 11 Uhr $12\frac{m^3}{h}$ beträgt.

b) $f'(5) = 12\,\frac{m^3}{h} = \frac{12}{60}\frac{m^3}{min}$. Von 11 Uhr bis $11{:}15$ Uhr sind es 15 Minuten:
$V_{[11;11:15]} = 15\,min \cdot \frac{12}{60}\frac{m^3}{min} = 3\,m^3$

Lösung A4

a) Etwa Mitte Mai war mit $6000\,m^3$ am meisten Wasser in der Zisterne.

b) Im Monat April hat es am meisten geregnet, weil in diesem Zeitraum die Wasserzunahme in der Zisterne am Steilsten ist.

c) Im Monat Februar als auch genau Mitte Mai und Ende Juli sind täglich $100\,m^3$ zugeflossen, da die Wasserzunahmen dort den Wert 0 erreichten.
Im Monat Januar als auch etwa um den 25. Mai als auch den 15. Juli herum sind täglich $50\,m^3$ Wasser zugeflossen, da dort die Wasserabnahme etwa $50\,m^3$ beträgt.

d) Direkt nach dem 1.6. hat es zu regnen begonnen, da ab diesem Tag die Wasserabnahme wieder geringer ist als $100\,m^3$ pro Tag.

e) Die Wasserzunahme im September betrug $1000\frac{m^3}{Monat}$ bzw. $\frac{100}{3} \cdot \frac{m^3}{Tag}$. Da im September auch $100\,\frac{m^3}{Tag}$ entnommen wurden, sind somit täglich im Mittel etwa $133{,}3\,\frac{m^3}{Tag}$ durch die Zisterne geflossen.

Lösung A5

a) Umrechnung von km/h in m/s:

$50\ \frac{km}{h} = \frac{50}{3{,}6}\frac{m}{s} = 13{,}9\frac{m}{s}$

$100\ \frac{km}{h} = \frac{100}{3{,}6}\frac{m}{s} = 27{,}8\frac{m}{s}$

Wir benötigen die Beschleunigung des Rennwagens. Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Strecke nach der Zeit, also benötigen wir zunächst die Ableitung $s'(t)$ und danach $s''(t)$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{s+h-s} = \frac{5\cdot(t+h)^2+t+h-5\,t^2-t}{h} = \frac{10ht+5h^2+h}{h} = \frac{h(10t+5h+1)}{h} = 10t+5h+1$$

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = v(t) = \lim_{h\to 0} 10t+5h+1 = 10t+1$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+h)-v(t)}{v+h-v} = \frac{10\cdot(t+h)+1-10\,t-1}{h} = \frac{10t+10h-10t}{h} = 10$$

$$\frac{dv}{dt} = v'(t) = a(t) = \lim_{h\to 0} 10 = 10$$

Mit $v(t) = a\cdot t$ erhalten wir somit;

$v_1(t) = 13{,}9 = a\cdot t_1 \Longrightarrow\ t_1 = 1{,}39$

$v_2(t) = 27{,}8 = a\cdot t_2 \Longrightarrow\ t_2 = 2{,}78$

$\Delta t = 2{,}78 - 1{,}39 = 1{,}39$

Der Rennfahre beschleunigt in etwa $1{,}4\ s$ *von* $50\ km/h$ *auf* $100\ km/g$.

b) $s(t) = 100$

$5t^2 + t - 100 = 0$

$t^2 + \frac{t}{5} - 20 = 0$

$t_{1,2} = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100}+20} = -\frac{1}{10} \pm \sqrt{20{,}01}$ | p/q-Formel

$t = 4{,}3733$

Der Rennfahrer benötigt etwa $4{,}4\ s$ *für die ersten* $100\ m$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = sin(x)$. Bestimme mit Hilfe des Differenzenquotienten die Funktionsgleichung der Ableitung $f'(x)$.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = cos(x)$. Bestimme mit Hilfe des Differenzenquotienten die Funktionsgleichung der Ableitung $f'(x)$.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x$. Bestimme die Ableitung f' mit Hilfe des Differenzenquotienten.

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = ln(x);\ x > 0$. Bestimme die Ableitung f' mit Hilfe des Differenzenquotienten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{sin(x+h)-sin(x)}{x+h-x} = \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$

Es gilt das Additionstheorem $sin(\alpha) - sin(\beta) = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$sin(x+h) - sin(x) = 2\,cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = 2\,cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)$

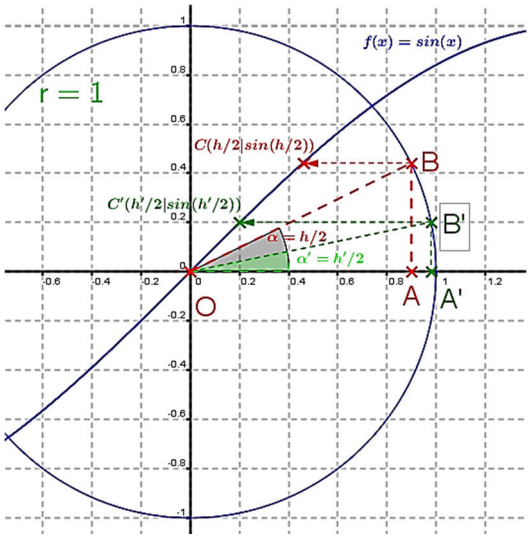
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ | Der Bruch wurde mit $\frac{1}{2}$ erweitert.

Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis.

Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

Mit kleiner werdendem h gilt für h':

$sin\left(\frac{h'}{2}\right) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A'B'}}{1} = \overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle|sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.



Mit $h \longrightarrow 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung. Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim\limits_{h\to 0} cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot 1 = cos(x)$

Lösung A2

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{cos(x+h)-cos(x)}{x+h-x} = \frac{cos(x+h)-cos(x)}{h}$

Es gilt das Additionstheorem $cos(\alpha) - cos(\beta) = -2\,sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$cos(x+h) - cos(x) = -2\,sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) = -2\,sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\,sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ | Der Bruch wurde mit $\frac{1}{2}$ erweitert.

Es erfolgt nun der Nachweis, dass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$. Hierzu betrachten wir uns die Situation am Einheitskreis (siehe Grafik gemäß Lösung A1).

Nach den trigonometrischen Funktionen gilt: $sin\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C\left(\frac{h}{2}\middle|sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Mit kleiner werdendem h gilt für h': $sin\left(\frac{h'}{2}\right) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A'B'}}{1} = \overline{A'B'}$. Dieser Wert liegt auf der Sinuskurve im Punkt $C'\left(\frac{h'}{2}\middle| sin\left(\frac{h'}{2}\right)\right)$.

Mit $h \longrightarrow 0$ wird $\overline{A'B'}$ immer kleiner und damit wandert C' gegen den Ursprung. Da dadurch auch $\frac{h'}{2}$ immer kleiner wird, streben sowohl $\frac{h'}{2}$ als auch $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ demselben Wert entgegen, sodass der Quotient aus $sin\left(\frac{h'}{2}\right)$ und $\frac{h'}{2}$ gegen 1 strebt.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} -\frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\longrightarrow 0} -sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot 1 = -sin(x)$$

Lösung A3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Wir dürfen den Nenner mit $h = 0$ auch schreiben als $\lim\limits_{k\longrightarrow 0} ln(1+k)$, denn $ln(1) = 0$.

Weiterhin ist auch $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} e^h = \lim\limits_{k\longrightarrow 0}(1+k)$, denn $e^0 = 1$ und $\lim\limits_{k\longrightarrow 0}(1+k) = 1$.

Somit gilt:

$$e^x\cdot\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{1+k-1}{ln(1+k)} = e^x\cdot\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{k}{ln(1+k)} = e^x\cdot\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{1}{\frac{1}{k}ln(1+k)} = e^x\cdot\frac{1}{ln\left(\lim\limits_{k\longrightarrow 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}\right)}$$

Da die Eulersche Zahl e definiert ist mit $e = \lim\limits_{k\longrightarrow 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ erhalten wir letztendlich

$$\frac{dy}{dx} = f'(0) = e^x\cdot\frac{1}{ln\left(\lim\limits_{k\longrightarrow 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}\right)} = e^x\cdot\frac{1}{ln(e)} = e^x\cdot\frac{1}{1} = e^x$$

Lösung A4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{ln(x+h)-ln(x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \qquad | \qquad \text{Erweitern mit } x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{x}\cdot\frac{1}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\left(ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\lim_{h\longrightarrow 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)$$

Da die Eulersche Zahl e definiert ist mit $e = \lim\limits_{k\longrightarrow 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ was gleichbedeutend ist mit $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$ erhalten wir letztendlich

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{x}\cdot ln(e)$ und mit $ln(e) = 1$ dann $f'(x) = \frac{1}{x}$.