Vom Differenzenquotienten zur Ableitung

Im Kapitel „Momentane Änderungsrate" haben wir gelernt, dass die momentane Änderungsrate der Steigung des Graphen einer Funktion f in einem bestimmten Punkt entspricht, und gleich der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt ist. Berechnet haben wir dort über eine umständliche Tabellenkalkulation.
Nun fragen wir uns natürlich, ob dies auch effizienter über eine einfache Rechenoperation möglich ist.

Dieses Kapitel bringt dir nun diese Rechenoperation näher. Wir unterscheiden dabei zwei wesentliche Operationen, nämlich

- **Steigungsbestimmung in einem bestimmten Punkt.**
- **Steigungsbestimmung in beliebigen Punkt.**

Betrachten wir zunächst die Steigungsbestimmung in einem bestimmten Punkt.
Der Mathematiker unterscheidet hier nach zwei Methoden, zum einen der sogenannten "x"–Methode und zum anderen der sogenannten "h"–Methode.

Beispiel 1

Bestimme für die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x$ die Steigung im Punkt $P(3|f(3))$.

Lösung 1: "x"–Methode

Auch hier müssen wir den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aufstellen. Ein beliebiger Punkt Q auf f hat die Koordinaten $Q(x|f(x))$.
Wir bilden den Differenzenquotienten mit

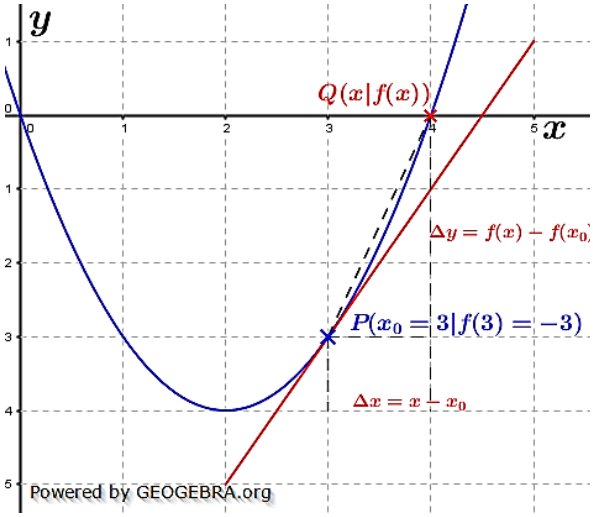
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-4x-(3^2-4\cdot 3)}{x-3}$$
$$= \frac{x^2-4x+3}{x-3};\ x \neq 3$$

Der Zähler $x^2 - 4x + 3$ lässt sich faktorisieren zu $(x-3)\cdot(x-1)$, sodass gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x-3)\cdot(x-1)}{x-3} = x - 1 = m(x)$$

Die Grenzwertbetrachtung führt zu:
$m(x)$ für $x \longrightarrow 3$:

$$\frac{dy}{dx}(3) = \lim_{x\to 3} m(x) = \lim_{x\to 3} x - 1 = 2$$



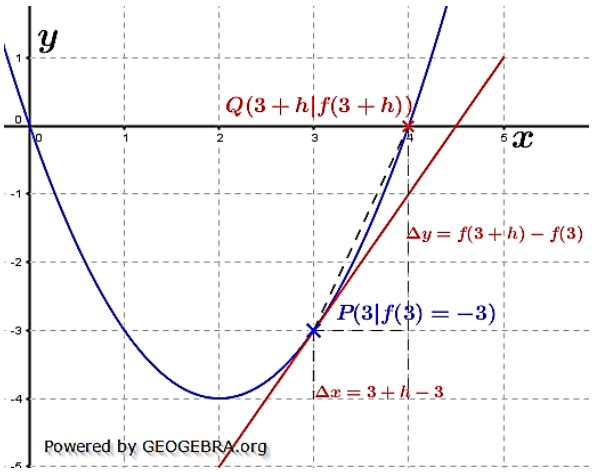
Die Steigung der Tangente an f in $P(3|-3)$ und damit auch die Steigung der Kurve beträgt $m = 2$.

Hinweis:
Die "x"–Methode ist im gymnasialen Schulbetrieb unüblich, wird jedoch an Universitäten behandelt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung 1: "h"–Methode

Im Gegensatz zur "x"–Methode wird hier ein beliebiger Abstand h der x-Koordinate, den der Punkt Q zu P hat, herangezogen (siehe Grafik).



Die Aufstellung des Differenzenquotienten führt damit zu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{(3+h)^2-4(3+h)-(3^2-4\cdot 3)}{h}$$
$$= \frac{9+6h+h^2-12-4h-9+12}{h}$$
$$= \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} \quad | \text{ mit } h \text{ gekürzt}$$
$$= h+2$$

Läuft nun h gegen Null, so bedeutet dies, dass der Punkt Q auf dem Graphen der Kurve solange verschoben wird, bis Q mit P zusammenfällt.

In diesem Fall wird dann aus der Sekante durch Q und P die Tangente in P.

$$\frac{dy}{dx}(3) = \lim_{h\to 0} h+2 = 2$$

Die Steigung der Tangente an f in $P(3|-3)$ und damit auch die Steigung der Kurve beträgt $m = 2$.

Betrachten wir nun die Steigungsbestimmung in einem beliebigen Punkt. (auf die "x"–Methode wird hier nicht mehr näher eingegangen).

Zunächst führen wir hier einen neuen Begriff ein, die ***„Ableitung"***. Spricht der Mathematiker nämlich von der Steigungsbestimmung in einem beliebigen Punkt des Graphen einer Funktion f, so sagt er hier kurz „Ableitung von f". Und selbstverständlich hat er sich auch ein diesbezügliches Formelzeichen ausgedacht, nämlich f' (sprich f Strich). f' wiederum ist eine Abkürzung für den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, der wiederum aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ herrührt.

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird zum Differenzialquotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in dem Moment, wo die beiden Punkte P und Q zusammenfallen und aus der Sekante eine Tangente wird.

Merksatz

Definition:

Die Funktion f sei auf einem Intervall I definiert und es sei $x_0 \in I$. Wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \longrightarrow 0$ einen Grenzwert besitzt, so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar (oder ableitbar). Ist f für alle $x_0 \in I$ differenzierbar, so nennt man f eine auf I differenzierbare Funktion.

*Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt **Differenzialquotient** oder **Ableitung von** f an der Stelle x_0. Dafür schreibt man kurz $\boldsymbol{f'(x_0)}$ und liest „f Strich von x_0".*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x;\ x \in \mathbb{R}$. Bilde mithilfe der "$h$"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{-\frac{1}{2}(x+h)^2+3(x+h)-(-\frac{1}{2}x^2+3x)}{h} = \frac{-\frac{1}{2}(x^2+2xh+h^2)+3x+3h+\frac{1}{2}x^2-3x}{h}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^2-xh-\frac{1}{2}h^2+3x+3h+\frac{1}{2}x^2-3x}{h} = \frac{-\frac{1}{2}h^2-xh+3h}{h} = \frac{h(-\frac{1}{2}h-x+3)}{h} \qquad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$= -\frac{1}{2}h - x + 3$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{2}h - x + 3 = -x + 3$$

Beispiel 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - x^2;\ x \in \mathbb{R}$. Bilde mithilfe der "$h$"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{2(x+h)^3-(x+h)^2-(2x^3-x^2)}{h}$$

In dieser Lösungsformel befindet sich nun das $(x+h)^3$. Die einfachste Form binomische Formeln mit einer Potenz größer als 2 aufzulösen, ist über das Pascalsche Dreieck, weshalb wir es hier noch einmal behandeln.

Das Pascalsche Dreieck

$(a+b)^0$	1	$= 1$
$(a+b)^1$	1 1	$= 1a + 1b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$= 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1h^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1h^5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-(x^2+2xh+h^2)-2x^3+x^2}{h} = \frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-x^2-2xh-h^2-2x^3+x^2}{h}$$

$$= \frac{6x^2h+6xh^2+2h^3-2xh-h^2}{h} = \frac{h(6x^2+6xh+2h^2-2x-h)}{h} \qquad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$= 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 6x^2 + 6xh + 2h^2 - 2x - h = 6x^2 - 2x$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x+1}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Bilde mithilfe der "$h$"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}}{h}=\frac{\frac{x+1-(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}=\frac{-h}{h\cdot(x+h+1)(x+1)} \quad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$=\frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

Beispiel 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x-1}$; $x \in \mathbb{R} \geq 1$. Bilde mithilfe der "h"–Methode die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung 5

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})} \quad | \quad \text{erweitert mit}$$

$$| \quad (\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})$$

$$=\frac{x+h-1-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})} \quad | \quad \text{Auflösung 3. Binomische Formel}$$

$$=\frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})}=\frac{1}{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}} \quad | \quad h \text{ kürzen}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de